

C 535

IOAN-IOVIȚ POPESCU FLOREA S. ULIU

Donatie pentru Biblioteca I.F.N. H.-H.
din partea autorilor
Sibiu, 1998

Popescu

BAZELE FIZICE

ALE

OPTICII

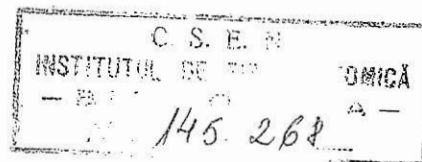
VOLUMUL I

OPTICĂ SCALARĂ

EDITURA UNIVERSITARIA

CRAIOVA

1998



Referenți științifici:

Prof. univ. dr. OLIVIU GHERMAN, Facultatea de
Științe, Universitatea din Craiova;

Prof. univ. dr. IANCU IOVA, Facultatea de Fizică,
Universitatea din București;

Prof. univ. dr. ing. IOAN M. POPESCU, Catedra de
Fizică, Universitatea Politehnică din București;

Tehnoredactare computerizată:

Teodora Elena Radu

Livia Popescu

Desene: tehn. Paula Costea

Coperta: ing. Titu Radu

ISBN: 973-9271-19-8

Toate drepturile asupra lucrării aparțin autorilor și Editurii
"UNIVERSITARIA" a Universității din Craiova,
strada Al. I. Cuza, nr.13, 1100 - Craiova, ROMANIA.

CUPRINS

Pagina

<i>Prefață</i>	V
CAPITOLUL I: OPTICA GEOMETRICĂ	1
§. 1.1. Principiile opticii geometrice	1
1.1.1. Ecuația eiconalului și ecuația razei de lumină	2
1.1.2. Principiul lui Fermat și formalismul lagrangeian	7
1.1.3. Condiții generale de stigmatism	17
§. 1.2. Sisteme optice centrate	28
1.2.1. Dioptrul sferic	29
1.2.2. Matricea de transfer	35
1.2.3. Elemente cardinale	40
1.2.4. Lentile sferice	57
1.2.5. Sisteme compuse	61
A. Dubletul de lentile subțiri	61
B. Dubletul de sisteme optice coaxiale	65
C. Sisteme focale și sisteme afocale (telescopice)	68
D. Sistemul triplet	75
E. Sisteme reflectante (catoptrice)	75
1.2.6. Diafragme	78
1.2.7. Aberații cromatice	84
1.2.8. Aberații geometrice	93
§. 1.3. Medii neomogene	106
1.3.1. Structuri planare	107
1.3.2. Structuri cilindrice	110
1.3.3. Structuri sferice	113
ANEXĂ: MOMENTE DIN ISTORIA OPTICII GEOMETRICE.	119
<i>BIBLIOGRAFIE</i>	163
CAPITOLUL II: DIFRAȚIA LUMINII.	167
§. 2.1. Considerente preliminare.	167
§. 2.2. Teorema integrală Helmholtz-Kirchhoff	169
§. 2.3. Formula fundamentală a difracției (Kirchhoff).	173
§. 2.4. Teorema (principiul) lui Babinet	179
§. 2.5. Formularea Rayleigh-Sommerfeld a problemei difracției pe un ecran opac plan, cu apertură.	181
§. 2.6. Difracția Fraunhofer și difracția Fresnel	184
§. 2.7. Aplicații ale difracției Fresnel	192

2.7.1. Apertura rectangulară	192
2.7.2. Fanta foarte lungă	196
2.7.3. Muchia rectilinie	198
2.7.4. Firul rectiliniu opac	200
2.7.5. Difrakția Fresnel pe o apertură circulară	201
2.7.6. Zonele lui Fresnel. Rețele zonate	206
§. 2.8. Aplicații ale difracției Fraunhofer	211
2.8.1. Apertura rectangulară și fanta liniară	211
2.8.2. Apertura circulară. Criteriul lui Rayleigh	216
2.8.3. Rețeaua optică de difracție	223
2.8.4. Utilizarea rețelei optice și a prisme optice ca instrumente spectrale	233
2.8.5. Componente de înaltă putere de rezoluție spectrală.	238
2.8.6. Rețele optice funcționând prin transmisie și prin reflexie. Montaje cu rețele optice	253
2.8.7. Difrakția undelor și microparticulelor pe rețele bi și tridimensionale.	266
ANEXE: 1. INTEGRALELE LUI FRESNEL	290
2. VALORILE FUNCȚIEI $(\sin x)/x \approx \text{sinc } x$	291
3. ZEROURILE FUNCȚIEI $J_0(x)$ ȘI VALORILE CORESPUNZĂTOARE ALE FUNCȚIEI $J_1(x)$	294
<i>BIBLIOGRAFIE</i>	295

CAPITOLUL III: BAZELE ANALIZEI ȘI OPTICII FOURIER	297
§. 3.1. Considerente introductive și scurt istoric	297
§. 3.2. Analiza Fourier a semnalelor monodimensionale	301
3.2.1. Serii Fourier	301
3.2.2. Exemple de semnale periodice	305
1. Succesiune infinită de impulsuri dreptunghiulare	305
2. Spectrul impulsurilor "dinte de fierăstrău".	307
3. Semnal cosinusoidal redresat în ambele alternanțe	307
4. Undă dreptunghiulară.	308
5. Undă triunghiulară	309
3.2.3. Integrale Fourier	309
3.2.4. Exemple tipice de transformate Fourier	319
1. Impuls dreptunghiular izolat	319
2. Funcția exponențial descrescătoare	320
3. Funcția gaussiană.	321
4. Semnal cosinusoidal de durată finită	322
5. Impulsul triunghiular	324
6. Semnal armonic, amortizat	325
3.2.5. Convoluția și corelația. Definiții, proprietăți, semnificații	326

§. 3.3. Modele de surse luminoase	335
§. 3.4. Lărgirea liniilor spectrale (surse reale)	340
3.4.1. Lărgirea liniilor spectrale prin ciocniri	341
3.4.2. Lărgirea liniilor spectrale prin efect Doppler	343
3.4.3. Lărgirea liniilor prin efecte combinate	347
§. 3.5. Unde (semnale) modulate	348
§. 3.6. Pachete de unde. Viteză de grup	352
§. 3.7. Lumina haotică	356
§. 3.8. Analiza Fourier a proceselor aleatoare	361
§. 3.9. Analiza Fourier a semnalelor bidimensionale	365
3.9.1. Sisteme liniare	365
3.9.2. Transformata Fourier bidimensională și spectrul pulsațiilor (frecvențelor) spațiale	367
§. 3.10. Lentila subțire ca transformator de fază	375
§. 3.11. Funcția de transfer optic (FTO) a unui sistem liniar invariant spațial (SLIS)	380
3.11.1. Răspuns la impuls și transfer optic	380
3.11.2. Spectrul unghiular al undelor plane	382
3.11.3. Difracția Fresnel și difracția Fraunhofer	386
§. 3.12. Lentila ca realizator de transformată Fourier bidimensională	391
A. Obiectul plasat înaintea lentilei, lângă ea	391
B. Obiectul plasat în fața lentilei (la o anumită distanță)	393
C. Obiectul plasat în spatele lentilei	394
§. 3.13. Formarea imaginilor în lumină monocromatică	396
3.13.1. Răspunsul la impuls al unei lentile convergente	396
3.13.2. Eliminarea factorilor de fază pătratici	397
3.13.3. Relația dintre obiect și imagine	399
§. 3.14. Analiza frecvențială (spectrală) a sistemelor optice de format imagini	401
3.14.1. Considerente introductive. Teoria lui Abbe a microscopului	401
3.14.2. Teoria (metoda) lui Rayleigh referitoare la difracția pe rețele	405
3.14.3. Metoda lui Rayleigh în caz general	413
A. Cazul iluminării coerente	413
B. Cazul iluminării necoerente	415
3.14.4. Influența aberațiilor asupra spectrului răspunsului	421
3.14.5. Asemănări și deosebiri între imaginile coerente și necoerente	424
§. 3.15. Filtrajul spațial și prelucrarea optică a informației	428
3.15.1. Experiențele Abbe-Porter	428
3.15.2. Microscopul cu contrast de fază	430
3.15.3. Filtrajul compensator al lui Marechal	434
3.15.4. Apodizația	435
3.15.5. Filmele (plăcile) fotografice și proprietățile lor	437
3.15.6. Sisteme de prelucrare optică a informației în lumină necoerentă	444

3.15.7. Sinteza în domeniul frecvențelor (lumină coerentă)	448
3.15.8. Filtrul Vander Lugt	452
3.15.9. Filtre adaptate și recunoașterea caracterelor (formelor)	457
<i>BIBLIOGRAFIE</i>	461
CAPITOLUL IV: BAZELE HOLOGRAFIEI	465
§. 4.1. Scurt istoric al holografiei	465
§. 4.2. Principiul holografiei plane	466
§. 4.3. Holografia Gabor (metoda "on axis")	470
§. 4.4. Holografia Leith-Upatnieks (metoda "off axis")	471
§. 4.5. Holograme plane de fază	479
§. 4.6. Holografia obiectelor tridimensionale	481
§. 4.7. Holograme Fourier	484
§. 4.8. Holograme volumice	487
§. 4.9. Holograme reflectante (Denisyuk)	494
§. 4.10. Holografia cu laseri în impulsuri	496
§. 4.11. Aplicații ale holografiei	497
4.11.1. Interferometria holografică	497
4.11.2. Microscopia holografică	502
4.11.3. Compensarea și corectarea aberațiilor sistemelor optice	504
4.11.4. Holografia și calculatoarele	507
A. Proiectarea imaginilor în tehnica circuitelor integrate	509
B. Memorii holografice	510
C. Dispozitive optice de memorare	515
D. Holograme generate pe calculator	518
<i>BIBLIOGRAFIE</i>	521

PREFAȚĂ

Onorată și cultivată cu o ardoare comparabilă, atât de eminențe ale științelor naturii - ca Einstein, cât și ale artelor - ca Goethe, optica - știința despre lumină, a cunoscut totuși, în decursul timpurilor, o evoluție contradictorie.

Astfel, până în prima jumătate a secolului trecut această ramură a fizicii s-a ocupat numai de studiul radiațiilor vizibile. După descoperirea radiațiilor infraroșii și ultraviolete, invizibile, optica și-a extins domeniul de preocupări și asupra acestora, iar în prezent opticienii sunt interesați, aproape în egală măsură, și de fenomenele generate de radiațiile X și gama, descoperite la sfârșitul secolului al XIX - lea.

În perioada 1930-1960, poziția opticii între alte ramuri ale fizicii a rămas modestă. Într-adevăr, în lipsa unor surse luminoase cu grad de coerență ridicat se ajunsese la acceptarea tacită a opiniei că optica nu ar mai fi capabilă de progrese spectaculoase, fie ele teoretice sau experimental-practice. În mod firesc, statutul de "știință încheiată" al opticii a avut urmări nefavorabile și asupra nivelului științific al manualelor de optică apărute vreme de câteva decenii, a nivelului predării acestei discipline în învățământul superior, pretutindeni în lume.

Apariția laserilor, în 1960, și a holografiei, în 1961-1962, au fost urmate de o adevărată avalanșă de aplicații practice, în domenii extrem de diverse, care au transformat optica în una din cele mai dinamice zone ale fizicii. Optica a pătruns adânc în cercetarea biologică și în practica medicală curentă, în cercetarea istorică și arheologică, au apărut videocomunicațiile, se prefigurează un nou gen de televiziune - digitală și un nou tip de fotografiere - enzimatică, se schimbă metodele de detectare utilizate în astronomie și astrofizică, microscopia de înaltă rezoluție cercetează nemijlocit atomul și structurile sale cele mai fine, se elaborează procedee tehnologice de mare randament cu ajutorul metodelor optice și holografice. Unii analiști ai evoluției științelor vorbesc chiar de o adevărată "revoluție a imaginilor", marcată de spectaculoasele realizări din ultimii 20-30 de ani, cum sunt laserii de mare putere, memoriile optice și holografice, sinteza numerică a imaginilor, sistemele de calcul electrono-optice, renașterea opticii neliniare și succesele opticii integrate, ca și de perspectiva realizării calculatoarelor pur optice. Iată de ce publicarea unor lucrări de optică noi, în pas cu progresele teoretice și cu realizările practice cu totul remarcabile ale acestei științe este o sarcină de mare însemnătate în etapa actuală.

Fizicienii zilelor noastre - ca și alți specialiști - trebuie să-și însușească în profunzime tot ceea ce este peren, clasic și modern, în acest domeniu de bogate tradiții ale fizicii, ce se arată atât de dinamic. Este potrivit să se înțeleagă cu deplină

claritate când poate fi utilizat conceptul de "rază de lumină", introdus de savanții antichității, și "optica geometrică" ce s-a construit pe baza sa, când se impune adoptarea conceptului de "undă luminoasă", la care au recurs oamenii de știință din secolele 17-19 pentru analiza unor fenomene în care natura ondulatorie, respectiv electromagnetică a luminii devine evidentă, și când trebuie să se apeleze la conceptul cuantic de "lumină fotonică", acreditat de fizicienii primelor decenii ale secolului nostru pentru interpretarea și explicarea unor fenomene de interacțiune între lumină și substanță, la nivel submolecular. Toate acestea fac parte din optica tradițională, clasică. Dincolo de acest nivel ni se revelează principiile funcționale și constructive ale generatoarelor de radiație laser, proprietățile acestora, conceptul de coerență și implicațiile sale, principiul și aplicațiile holografiei, optica fibrelor și optica integrată, optica Fourier și optica neliniară, semnificația și aplicațiile bistabilității optice, ale conjugării de fază - achiziții recente ale teoriei și practicii de profil, fără de care nu am putea accede cu adevărat la optica modernă, la "revoluția imaginilor" pe care o evocam.

Cartea de optică pe care o prefățăm își propune să prezinte cititorului atât problematica opticii clasice cât și pe cea a opticii moderne, într-o structură în care dialectica trecerii de la clasic la modern să pară firească, armonioasă și generatoare de reale satisfacții intelectuale. Lucrarea este concepută în două volume bine echilibrate, dedicate respectiv opticii scalare și opticii vectoriale, electromagnetice, precum și opticii cuantice.

Primul volum tratează mai întâi problemele fundamentale și aplicative ale opticii geometrice, pe baza ecuației eiconalului pentru suprafețele de undă și a ecuației asociate pentru razele de lumină, precum și a principiului lui Fermat, al timpului de propagare minim, din care derivă formalismele lagrangeian și hamiltonian ale opticii. Al doilea capitol se referă la studiul scalar al difracției luminii și aplicațiilor sale, în cadrul oferit de teoriile lui Kirchhoff și Rayleigh-Sommerfeld. Urmează o secțiune dedicată opticii Fourier, în care, după o consistentă introducere matematică, se analizează structura spectrală a semnalelor emise de sursele luminoase ideale și reale, problema transformărilor de fază realizate de lentile și, în general, de sistemele optice invariante spațial. Se întreprinde, totodată, studiul difracțional al formării imaginilor optice - cu considerarea spectrului frecvențelor spațiale, abordându-se și problematica filtrajului spațial și a aplicațiilor sale practice în domeniul, de mare actualitate, al prelucrării optice a informației. Ultimul capitol al volumului este rezervat bazelor holografiei și unora din numeroasele ei aplicații.

Problemele tratate în primul volum, pe care autorii le-au calificat ca aparținând "Opticii scalare", nu iau în considerare în mod deliberat natura vectorială a câmpului electromagnetic și, implicit, stările de polarizare. Este potrivit să observăm că, astfel, aprofundarea opticii scalare îi va permite cititorului să extindă cunoștințele însușite și la cazul undelor acustice, longitudinale - abordând fără dificultate, de exemplu, difracția și holografia acustică - sau la undele de Broglie asociate microparticulelor fără spin, nerelativiste, în mecanica cuantică sau în optica electronică și ionică, unde se deschid căi - după cum se știe - spre studiul difracției

microparticulelor, al structurii spectrale a pachetelor de unde asociate, al relațiilor de nedeterminare Heisenberg, al rezoluției microscopelor electronice.

În al doilea volum al cărții, după prezentarea ecuațiilor lui Maxwell aplicate la fenomenele de propagare a câmpurilor electromagnetice, transversalitatea undelor luminoase și stările de polarizare se vor avea permanent în vedere, în strânsă legătură cu proprietățile de coerență.

Un merit deosebit al cărții este acela că, în fiecare capitol, aspectele clasice și moderne sunt corelate în mod armonios. De pildă, în capitolul de optică geometrică, studiul sistemelor optice centrate începe cu dioptrul sferic, tratat clasic, spre a continua cu formalismul modern al matricei de transfer. De asemenea, delicatele probleme ale aberațiilor sistemelor optice și principiile corectării lor prin cele mai actuale metode se bucură de o tratare unitară. O atenție corespunzătoare se acordă și proprietăților mediilor neomogene, cu structură stratificată, importante în optica fibrelor și în optica integrată. Aplicațiile prezentate în cel de-al doilea capitol sunt puse în legătură cu spectroscopia optică de înaltă rezoluție, respectiv cu fizica atomică și subatomică, precum și cu studiul structurilor periodice bidimensionale și tridimensionale, atât de importante în fizica cristalelor lichide și în fizica solidului. Aspectele tratate în celelalte două capitole, temeinic ancorate în actualitate, au permanent în vedere aplicațiile curente și de perspectivă din domeniul prelucrării optice a informației, atât în lumină coerentă cât și în lumină necoerentă.

Capitolul de optică geometrică se încheie cu o anexă semnificativă, menită să întregască în mod fericit cultura științifică a cititorului: o cronologie a momentelor importante din istoria opticii geometrice.

Fiecare capitol al cărții cuprinde o reprezentativă bibliografie.

Cartea de față este rodul unei frumoase și fructuoase colaborări interuniversitare. În primul ei autor, academicianul Ioan-Ioviț Popescu, profesor la Universitatea din București, îmi este deosebit de plăcut să recunosc un specialist de amplă reputație pe tărâmul opticii, laserilor și plamei, cercetător pasionat și prestigios animator al unor productive echipe de cercetare, un universitar de aleasă cultură și exemplară abnegație față de cauza instruirii și educării tinerei generații. Co-autorul său, dr. Florea S. Uliu, profesor la Universitatea din Craiova, despre care păstrez cele mai plăcute amintiri din perioada studenției sale, l-a secondat în această întreprindere editorială cu deosebită pricepere și eficacitate.

Bazele fizice ale opticii acoperă un gol resimțit de mai multă vreme în literatura noastră de specialitate. Cititorul are în față o carte de referință pentru însușirea profesiunii de fizician, pe care o recomand cu căldură în primul rând studenților, dar și profesorilor de liceu, fizicienilor, inginerilor, informaticienilor, tuturor celor ce doresc să se inițieze sau să se perfecționeze în această disciplină a marilor tradiții și permanentei inovații.

Felicitându-i pe autori pentru cartea pe care ne-o oferă, se cuvine să adresăm mulțumiri și Editurii Universitaria din Craiova pentru îngrijirea pe care a consacrat-o acestui proiect, în folosul învățământului și cercetării de fizică din țara noastră.

Acad. prof. Ioan Ursu

Capitolul I

OPTICA GEOMETRICĂ

Este bine-cunoscut faptul că, prin intermediul organelor de simț, omul se află într-o legătură permanentă cu mediul în care trăiește și își desfășoară activitatea. Cu ajutorul acestora, el obține întregul ansamblu de informații despre obiectele și fenomenele care îl înconjoară. S-a estimat că aproximativ 90% din informațiile recepționate și prelucrate de ființa umană în timpul vieții sunt dobândite pe cale vizuală. Transportul informațiilor vizuale de la "obiecte" (apropiate - de cele mai multe ori, sau îndepărtate - cum este cazul în observația astronomică) la "observatori" se realizează ultrarapid, prin intermediul unor radiații cunoscute sub denumirea de *radiații luminoase* sau, simplu, *lumină*.

Deși de-a lungul secolelor știința despre lumină, adică *Optica*, a fost abordată de mari personalități ale științelor naturii - ca Huygens, Newton, Young, Fresnel, Maxwell, Einstein, Feynman, ale filozofiei - ca Descartes, Spinoza, cât și ale artelor - ca Leonardo da Vinci, Goethe, evoluția sa nu a fost rectilie. Dacă până în primele decenii ale secolului nostru am avut de-a face cu o lungă perioadă de acumulări faptice și conceptuale, adeseori sinuoasă, în ultimele decenii optica a devenit una din cele mai dinamice părți ale fizicii.

Respectând tradiția, la începutul cărții noastre de fundamentele opticii, prezentăm problematica *opticii geometrice*, care are la bază *cel mai simplu model de propagare a luminii*. După cum se știe, optica geometrică este acea parte a opticii în care propagarea luminii și interacțiunea ei cu mediile materiale se studiază cu ajutorul conceptului de *rază de lumină*, definit ca o curbă (în particular o linie dreaptă) de-a lungul căreia se propagă energia luminoasă. Acest concept a apărut și s-a fundamentat pe baze fenomenologice, pornindu-se de la observarea umbrelor și penumbrelor precum și a formării imaginii în camera obscură.

Fasciculele de lumină se consideră a fi formate dintr-un "ansamblu" infinit de raze de lumină *independente*, fiecare rază având propagare rectilie în mediile omogene și satisfăcând bine-cunoscutele legi ale reflexiei și refracției la limita de separare a două medii diferite.

Prin poziția importantă pe care o deține în tehnologia optică modernă, atât în proiectarea cât și în realizarea diverselor tipuri de piese, instrumente sau aparate, optica fasciculelor de lumină este și va rămâne o parte distinctă a oricărei cărți de optică, indiferent de nivelul acesteia.

În prezent se apreciază că, cu toate limitele ei, optica geometrică posedă trăsăturile caracteristice ale unei teorii științifice, căci ea are o structură logică unitară, conferită de principiul fundamental - *principiul lui Fermat*, din care derivă toate legile și consecințele supuse verificărilor experimentale.

§. 1. 1. Principiile opticii geometrice

Deși propagarea luminii poate fi tratată în detaliu cu ajutorul ecuațiilor lui Maxwell și al ecuației corespunzătoare a undelor electromagnetice, multe probleme practice pot fi rezolvate mult mai simplu pe baza conceptului de rază de lumină și a legilor opticii geometrice. Așa cum vom arăta în continuare, optica geometrică, sau optica razelor de

lumină, reprezintă o aproximație a opticii ondulatorii pentru lungimi de undă λ foarte mici (teoretic pentru $\lambda \rightarrow 0$) în comparație cu dimensiunile obiectelor (obstacolelor) care limitează fasciculele de lumină. În această aproximație, energia se propagă de-a lungul razelor de lumină, definite ca familia de traiectorii normale pe suprafețele de undă. La rândul lor, suprafețele de undă sunt definite ca suprafețele de fază constantă.

Remarcăm că o rază de lumină, ca o traiectorie a unui punct matematic în spațiu, nu reprezintă decât o abstracție geometrică și nu este observabilă fizic. Într-adevăr, în realitate, dacă încercăm să izolăm o singură rază de lumină cu ajutorul unei diafragme de diametru controlabil, vom observa că, sub o anumită limită, în loc să se subțieze, fasciculul se lărgițe și devine divergent. Această abatere de la propagarea energiei în lungul razelor geometrice de lumină este de natură ondulatorie și este cauzată de *difracția* undelor (vezi Cap. II). Dar, prin însăși restricția aproximației $\lambda \rightarrow 0$, difracția undelor nu poate fi descrisă în cadrul opticii geometrice.

Vom începe acest capitol cu deducerea ecuației fundamentale a opticii geometrice (*ecuația eiconanului*) pentru suprafețele de undă și a ecuației asociate pentru razele de lumină.

1.1.1. Ecuația eiconalului și ecuația razei de lumină

Să considerăm un mediu optic transparent și izotrop și *ecuația scalară a undelor*,

$$\Delta E = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}, \quad (1.1)$$

unde $E(\vec{r}, t)$ reprezintă oricare din componentele scalare ale câmpului electromagnetic iar $v(\vec{r}) = c/n(\vec{r})$ este viteza luminii în punctul considerat al mediului de indice de refracție $n(\vec{r})$. Remarcăm că ecuația (1.1) este valabilă numai dacă variațiile lui n și ale gradientului său pe o lungime de undă sunt neglijabile, condiții ideal îndeplinite în limita opticii geometrice ($\lambda \rightarrow 0$).

În continuare vom considera numai propagarea undelor monocromatice, adică a undelor cu dependență temporală dată de factorul $\exp(-i\omega t)$. În acest caz $\partial^2 E / \partial t^2 = -\omega^2 E$ și ecuația (1.1) devine ecuația undelor monocromatice (sau ecuația lui Helmholtz)

$$\Delta E + k^2 E = 0, \quad (1.2)$$

unde $k = \omega/v = 2\pi/\lambda = k_0 n$ și $k_0 = \omega/c = 2\pi/\lambda_0$ sunt modulele vectorilor de undă în mediu, respectiv în vid iar $\lambda = \lambda_0/n$.

Cele mai importante soluții ale ecuației (1.2) în *medii omogene* ($n = \text{const.}$) sunt undele plane, cilindrice și sferice. Undele mai complicate pot fi reprezentate ca superpoziții de astfel de unde. Să considerăm mai întâi unda plană monocromatică în reprezentarea complexă, adică soluții de forma

$$E(\vec{r}, t) = E_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad (1.3)$$

unde E_0 este o amplitudine constantă, în general complexă, $\vec{k} = k\vec{\tau} = k_0 n\vec{\tau}$ este vectorul de undă (sau de propagare) iar $\vec{\tau}$ este versorul direcției de propagare a undei. Vectorii $\vec{\tau}$, \vec{k} sunt constanți și perpendiculari pe suprafețele de fază constantă care, în acest caz, sunt plane date în orice moment t de ecuația $\vec{k} \cdot \vec{r} = \omega t + \text{const.}$ În fig.1.1. este reprezentată poziția la momente succesive a planului echifază $\vec{k} \cdot \vec{r} = \omega t$, respectiv $\vec{\tau} \cdot \vec{r} = vt$, corespunzător la zero radiani. Razele de lumină sunt rectilinii, pe direcția $\vec{\tau}$.

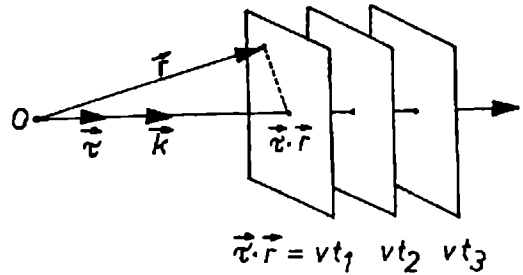


Fig.1.1. Trei poziții succesive pentru planul echifază $\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t = 0$, adică $\vec{\tau} \cdot \vec{r} = vt$.

În medii neomogene indicele de refracție variază spațial, adică $n = n(\vec{r})$, și expresia (1.3) nu mai reprezintă o soluție a ecuației undelor. De aceea, vom căuta soluții armonice de formă mai generală

$$E(\vec{r}, t) = E_0(\vec{r})e^{i[k_0\phi(\vec{r}) - \omega t]}, \quad (1.4)$$

unde funcția scalară reală $\phi(\vec{r})$, care reprezintă partea spațială a fazei, poartă numele de *eiconal*. Denumirea a fost introdusă de H. Bruns (1895) și provine din cuvântul grecesc εικων care înseamnă imagine*. Suprafețele de fază constantă sunt descrise în orice moment t de ecuația $k_0\phi(\vec{r}) = \omega t + \text{const.}$, astfel că avem $d\phi = c dt$. În fig.1.2 este ilustrată poziția la momente succesive a suprafeței echifază de zero radiani $\phi(\vec{r}) = c \cdot t$ și traiectoriile ortogonale asociate $\nabla\phi$ ale razelor de lumină care, în general, în medii neomogene, sunt curbilinii. Cum vom arăta mai departe, diferența $\phi_2 - \phi_1 = c(t_2 - t_1)$ este sinonimă cu *drumul optic* parcurs de razele de lumină între suprafețele de undă considerate și este, evident, proporțională cu diferența de fază $k_0(\phi_2 - \phi_1)$ corespunzătoare.

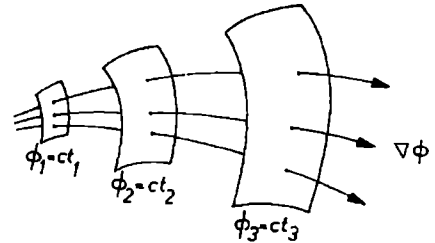


Fig.1.2. Trei poziții succesive pentru suprafața echifază de zero radiani $\phi(\vec{r}) = c \cdot t$ și traiectoriile ortogonale asociate, ale razelor de lumină, într-un mediu neomogen.

Să determinăm ecuația pentru funcția eiconal $\phi = \phi(\vec{r})$ din cerința ca expresia (1.4.) să fie soluție a ecuației undelor. Avem

$$\nabla E = (\nabla E_0 + ik_0 E_0 \nabla\phi)e^{i(k_0\phi - \omega t)},$$

$$\Delta E = \{\Delta E_0 + ik_0[2(\nabla E_0) \cdot (\nabla\phi) + E_0 \Delta\phi] - k_0^2 E_0 (\nabla\phi)^2\}e^{i(k_0\phi - \omega t)},$$

astfel că, înlocuind în ecuația undelor (1.2), obținem

* De aici, prin intermediul slavei vechi (vezi DEX), a rezultat cuvântul românesc *icoană*.

$$\left[n^2 - (\nabla\phi)^2 \right] E_0 + \frac{\Delta E_0}{k_0^2} + \frac{i}{k_0} \left[2(\nabla E_0) \cdot (\nabla\phi) + E_0 \Delta\phi \right] = 0, \quad (1.5)$$

sau, scriind separat partea reală și partea imaginară

$$\left[n^2 - (\nabla\phi)^2 \right] E_0 + \frac{\Delta E_0}{k_0^2} = 0, \quad (1.5')$$

$$2(\nabla E_0) \cdot (\nabla\phi) + E_0 \Delta\phi = 0. \quad (1.5'')$$

Să analizăm mai întâi consecințele ecuației (1.5') care, în limita opticii geometrice $\lambda_0 \rightarrow 0$, sau $k_0 \rightarrow \infty$, devine ecuația diferențială neomogenă de ordinul întâi și gradul al doilea

$$(\nabla\phi)^2 = n^2, \quad (1.6)$$

care permite determinarea funcției $\phi(\vec{r})$ dacă cunoaștem distribuția $n(\vec{r})$ a indicelui de refracție și condițiile la limită. Aceasta este *ecuația eiconalului*, dedusă pentru prima dată de A. Sommerfeld și I. Runge (1911), și *reprezintă ecuația fundamentală a opticii geometrice* deoarece funcția eiconal $\phi(\vec{r})$ caracterizează complet câmpul optic din punctul de vedere al suprafețelor de undă.

Alternativ, putem descrie câmpul optic prin razele de lumină definite ca familia de traiectorii normale la suprafețele de undă (justificarea acestei definiții va rezulta din analiza ecuației (1.5'')). Considerând traiectoria razelor de lumină în forma parametrică $\vec{r} = \vec{r}(s)$, unde parametrul independent s este lungimea de arc pe traiectorie (fig.1.3), versorul care determină în fiecare punct direcția razelor de lumină este

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}, \quad (1.7)$$

astfel că ecuația eiconalului se mai poate scrie în următoarele forme echivalente

$$|\nabla\phi| = n \quad \text{sau} \quad \frac{d\phi}{ds} = n, \quad (1.8)$$

$$\nabla\phi = n\vec{\tau}, \quad (1.9)$$

$$\nabla \times (n\vec{\tau}) = 0, \quad (1.10)$$

$$\nabla \times \vec{k} = 0, \quad (1.11)$$

unde $\vec{k} \stackrel{\text{def}}{=} k_0 n \vec{\tau}$ este vectorul de undă local.

Remarcăm că integrarea grafică a ecuației eiconalului, ecuația (1.8), este echivalentă cu *construcția lui Huygens (Traité de la lumière, 1692)* a suprafețelor de undă, din aproape în aproape. Într-adevăr, avem

$$d\phi = nds = cdt, \quad (1.12)$$

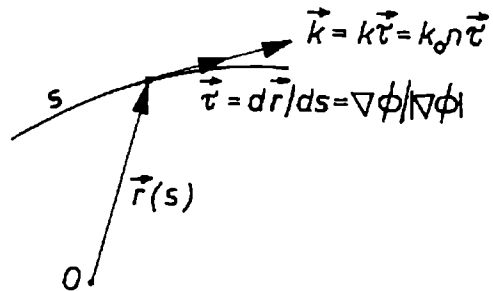


Fig.1.3. O traiectorie luminoasă, în reprezentare parametrică $\vec{r} = \vec{r}(s)$.

de unde rezultă $ds = cdt/n(\vec{r}) = v(\vec{r})dt$. Cu alte cuvinte, considerând punctele unei suprafețe de undă ca surse sincrone de unde sferice secundare, orice suprafață de undă vecină se realizează ca înfășurătoare a acestora (fig.1.4.) Evident, această construcție este aplicabilă în ambele sensuri de propagare (proprietatea de *reversibilitate a drumului razelor de lumină*).

Derivând ecuația eiconalului (1.9) față de parametrul s al traiectoriei razei și ținând cont de ecuația (1.8) rezultă

$$\frac{d}{ds}(n\vec{\tau}) = \frac{d}{ds}(\nabla\phi) = \nabla\left(\frac{d\phi}{ds}\right) = \nabla n,$$

adică *ecuația razei de lumină*,

$$\frac{d}{ds}(n\vec{\tau}) = \nabla n \quad \text{sau} \quad \frac{d}{ds}\left(n \cdot \frac{d\vec{r}}{ds}\right) = \nabla n. \quad (1.13)$$

În cazul particular al unui mediu omogen avem $n = \text{const.}$, $\nabla n = 0$, astfel că ecuația (1.13) devine $d^2\vec{r}/ds^2 = 0$ și traiectoriile razelor sunt drepte $\vec{r}(s) = \vec{r}_0 + \vec{\tau}_0 s$, unde \vec{r}_0 și $\vec{\tau}_0$ sunt constante de integrare. Evident, aceasta rezultă și direct din ecuația eiconalului (1.10) care devine $\nabla \times \vec{\tau} = 0$, adică $\vec{\tau}$ este constant. În cazul general al mediilor neomogene, direcția de propagare $\vec{\tau}$ se schimbă în mod continuu de-a lungul razei de lumină conform ecuației razei (1.13). Deoarece $\vec{\tau}^2 = 1$, avem $\vec{\tau} \cdot (d\vec{\tau}/ds) = 0$ adică versorul $\vec{\tau}$ al direcției de propagare și vectorul de curbură a razei de lumină

$$\vec{K} = \left(\frac{d\vec{\tau}}{ds}\right) = \frac{\vec{v}}{\rho}, \quad (1.14)$$

sunt ortogonali (\vec{v} este versorul normalei principale iar ρ raza locală de curbură), fig.1.5.

Ecuația razei (1.13) se poate transcrie în forma

$$\nabla n = \frac{d}{ds}(n\vec{\tau}) = \frac{dn}{ds}\vec{\tau} + n\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{dn}{ds}\vec{\tau} + \frac{n}{\rho}\vec{v}, \quad (1.15)$$

care evidențiază coplanaritatea vectorilor $\nabla n, \vec{\tau}, \vec{v}$ în *planul osculator* ($\vec{\tau}, \vec{v}$). Înmulțind ecuația (1.15) scalar cu \vec{v} obținem expresia generală a *curburii razei de lumină*

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\vec{v} \cdot \nabla n}{n} = \vec{v} \cdot \nabla(\ln n). \quad (1.16)$$

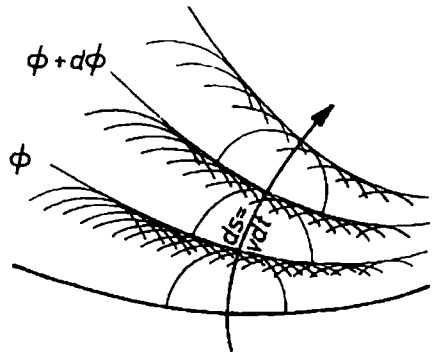


Fig.1.4. Construcția lui Huygens.

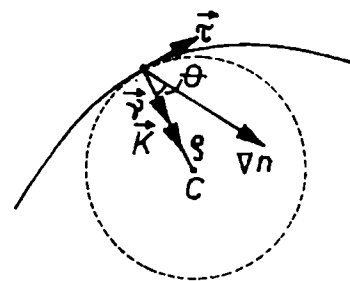


Fig.1.5. Determinarea curburii locale a razei de lumină.

Cum întotdeauna $1/\rho \geq 0$, avem succesiv $\vec{v} \cdot \nabla n = |\nabla n| \cos \theta \geq 0$, $\cos \theta \geq 0$, $\theta \leq \frac{\pi}{2}$. Am obținut, astfel *regula generală* conform căreia raza de lumină se curbează întotdeauna spre domeniul de refractivitate mai mare. Semnul de egalitate corespunde cazului limită al mediului omogen ($\nabla n = 0$) când curbura $1/\rho$ este nulă, adică raza de lumină este rectilinie.

Să analizăm, în aceeași limită, ecuația (1.5") pe care, cu ajutorul ecuației (1.9), o transcriem în forma

$$2n \frac{\partial E_0}{\partial s} + E_0 \Delta \phi = 0. \quad (1.17)$$

Prin integrare obținem

$$E_0(s) = E_0(0) \exp \left(- \int_0^s \frac{\Delta \phi}{2n} ds \right), \quad (1.18)$$

de unde rezultă că amplitudinea câmpului $E_0(s)$ în orice punct al unei raze date depinde de o valoare inițială $E_0(0)$ de pe *aceeași* rază, de distribuția indicelui de refracție $n(s)$ în lungul razei și de laplaceianul drumului optic $\phi(s) - \phi(0) = \int_0^s n(s) ds$, (vezi secțiunea 1.1.2). Ecuațiile opticii geometrice nu intercondiționează valorile câmpului de pe raze diferite, oricât de vecine ar fi acestea, astfel că un fascicul de lumină apare ca un agregat de raze independente (*principiul independenței razelor de lumină*).

Ținând cont, din nou, de ecuația eiconalului $\nabla \phi = n\vec{\tau}$, astfel că $\Delta \phi = \nabla \cdot (\nabla \phi) = \nabla \cdot (n\vec{\tau})$, ecuația (1.5") mai poate fi scrisă în felul următor

$$2(\nabla E_0) \cdot (n\vec{\tau}) + E_0 \nabla \cdot (n\vec{\tau}) = 0, \quad (1.19)$$

sau

$$\nabla \cdot (E_0^2 n\vec{\tau}) = 0, \quad (1.20)$$

adică sub forma ecuației de continuitate $\nabla \cdot \vec{j} = 0$ pentru un fluid incompresibil staționar cu densitatea de curent $\vec{j} \sim E_0^2 n\vec{\tau} \sim E_0^2 \vec{k}$. Vectorul \vec{j} este analogul vectorului Poynting \vec{S} din teoria electromagnetică și reprezintă densitatea curentului de energie în câmpul optic considerat de optica geometrică. Din aceste considerații rezultă un concept fundamental al opticii geometrice, anume cel conform căruia energia luminoasă se propagă de-a lungul razelor de lumină prin tuburile de linii de curent \vec{j} .

Ca și în cazul fluidelor, notând cu σ aria secțiunii transversale a unui fascicul subțire de raze de lumină (tub subțire de linii de curent) conform ecuației (1.20) rezultă că mărimea $E_0^2 n \sigma = \text{const.}$ de-a lungul fasciculului (tubului).

După toate aceste considerente strict teoretice, vom prezenta modul în care putem realiza *practic* un fascicul de raze luminoase izolate. Evident, acest lucru presupune introducerea unei diafragme în drumul unei unde luminoase spațial extinse, de forma (1.4), cu \vec{r} arbitrar. Dacă vrem ca razele din fascicul să îndeplinească condițiile de valabilitate ale ecuației eiconalului (lungime de undă λ_0 mică și amplitudinea $E_0(\vec{r})$ să nu varieze prea repede în spațiu, astfel încât să fie satisfăcută inegalitatea $|\Delta E_0 / E_0 k_0^2| = (\lambda_0^2 / 4\pi^2) \cdot |\Delta E_0 / E_0| \ll n^2$; pentru aceasta este suficient ca $|\lambda_0 \partial E_0 / \partial x| \ll E_0$ etc.) este necesar ca această diafragmă să nu fie prea îngustă iar fasciculul obținut să nu fie prea lung. Într-adevăr, pe marginile diafragmei și pe suprafața laterală a fasciculului obținut prin diafragmare, amplitudinea $E_0(\vec{r})$ variază puternic și, din această cauză, condițiile specificate mai sus (în paranteză) sunt violate; prin urmare, se

produce difracția luminii care lărgeste mult deschiderea fasciculului. Efectele de difracție sunt nesemnificative dacă diafragma este largă și dacă fasciculul luminos este scurt. În teoria difracției (vezi Cap. II) se demonstrează că ecuația eiconalului poate fi încă utilizată pe o distanță $s \ll D^2/\lambda_0 \equiv s_0$, unde D este lărgimea cea mai mică a difragmei. De exemplu, pentru $\lambda_0 = 500 \text{ nm}$ și o diafragmă circulară cu diametrul $D = 1 \text{ mm}$, obținem $s_0 = 2 \text{ m}$; aceasta înseamnă că, dincolo de diafragmă, pe distanțe de ordinul câtorva centimetri, putem vorbi încă de un fascicul de raze de lumină independente, pentru care ecuațiile (1.5) și (1.9) rămân valabile. Când $D \rightarrow \infty$ sau $\lambda_0 \rightarrow 0$, avem $s_0 \rightarrow \infty$ și aproximația opticii geometrice este valabilă pe distanțe s oricât de mari. Din păcate, în practică întâlnim foarte rar astfel de situații. De aceea, optica geometrică este numai "o primă aproximație" a opticii.

1. 1. 1. Principiul lui Fermat și formalismul langrageian

Ecuția eiconalului și ecuația razei de lumină descriu comportarea *locală* a suprafețelor de undă, respectiv a traiectoriilor razelor de lumină. În multe situații este însă convenabil să considerăm proprietățile integrale (globale) corespunzătoare.

Să considerăm mai întâi *teorema invariantului integral al lui Lagrange* conform căreia integrala vectorului $n\vec{\tau}$, ca și a vectorului de undă $\vec{k} = k_0 n\vec{\tau}$, între două puncte P_1, P_2 oarecare ale câmpului optic nu depinde de drum, adică

$$\int_{P_1}^{P_2} n\vec{\tau} \cdot d\vec{r} = \phi(P_2) - \phi(P_1), \quad (1.21)$$

deoarece, conform ecuației eiconalului (1.9), $n\vec{\tau} \cdot d\vec{r} = \nabla\phi \cdot d\vec{r} = d\phi$.

Alternativ, dacă ecuația locală (1.10) se integrează pe o suprafață *oarecare* Σ_C , care se sprijină pe un contur închis C , și se utilizează teorema lui Stokes, se obține *legea globală*

$$\iint_{\Sigma_C} \nabla \times (n\vec{\tau}) \cdot d\vec{A} = \oint_C n\vec{\tau} \cdot d\vec{r} = 0. \quad (1.22)$$

Teorema integrală de mai sus rămâne valabilă și în cazul în care conturul de integrare intersectează una sau mai multe suprafețe de discontinuitate ale indicelui de refracție. Desigur, aceste suprafețe trebuie considerate ca regiuni de tranziție relativ rapide dar continue ale indicelui de refracție, în care ecuația locală a eiconalului își păstrează valabilitatea. Ca aplicație, să considerăm o astfel de suprafață de separare intersectată de un contur închis oarecare $C = C_1 + C_2 + C_{12}$, unde contururile C_1 și C_2 se găsesc de o parte și de alta a suprafeței separatoare Σ iar conturul infinitesimal C_{12} intersectează efectiv această suprafață (fig.1.6). Conform ecuației (1.22) avem

$$\oint_C n\vec{\tau} \cdot d\vec{r} = \oint_{C_1} n_1 \vec{\tau}_1 \cdot d\vec{r}_1 + \oint_{C_2} n_2 \vec{\tau}_2 \cdot d\vec{r}_2 + \oint_{C_{12}} (n_1 \vec{\tau}_1 - n_2 \vec{\tau}_2) d\vec{r}_2 = 0. \quad (1.23)$$

Dar, integralele de pe contururile închise C_1 și C_2 sunt nule, astfel că rezultă proprietatea

$$(n_1 \vec{\tau}_1 - n_2 \vec{\tau}_2) \cdot d\vec{r}_2 = 0, \quad (1.24')$$

sau echivalent,

$$(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot d\vec{r}_2 = 0, \quad (1.24'')$$

valabilă în fiecare punct de trecere a razelor de lumină prin suprafața de discontinuitate Σ . Întrucât elementul de drum $d\vec{r}_2$ din ecuațiile (1.24'), (1.24'') reprezintă orice deplasare infinezimală pe suprafața Σ , aceste ecuații sunt echivalente cu condiția de continuitate a componentei tangențiale a vectorilor $n\vec{\tau}$ respectiv \vec{k} . Măsurând unghiul de incidență θ_1 și de refracție θ_2 față de normala la suprafață în punctul de incidență a razei (fig.1.7), această condiție este sinonimă cu *legea de refracție Snell-Descartes*

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2. \quad (1.25)$$

Să aplicăm în continuare, teorema invariantului integral al lui Lagrange, adică ecuația (1.21), pentru cazul în care conturul de integrare este chiar traiectoria unei raze de lumină astfel că $n\vec{\tau} \cdot d\vec{r} = n\vec{\tau} \cdot \vec{\tau} ds = n \cdot ds$. În acest caz, integrala (1.21) între două puncte P_1, P_2 oarecare ale razei, notată cu $[P_1 P_2]$, poartă numele de *drum optic* și are

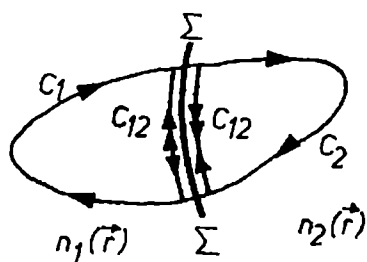


Fig.1.6. O suprafață de separare a două medii optice diferite (Σ) și un contur de integrare, închis, oarecare ($C=C_1+C_2+C_{12}$).

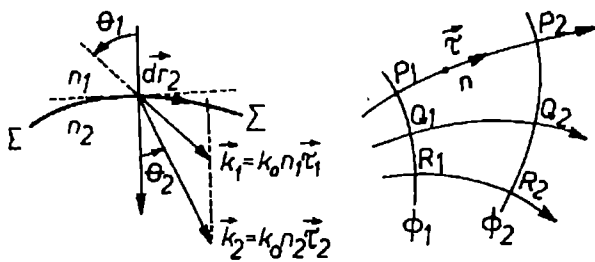


Fig.1.7. Refracția luminii și legea sa fundamentală (interpretare geometrică).

Fig.1.8. Principiul egalității drumurilor optice (teorema Malus-Dupin).

următoarele expresii echivalente

$$[P_1 P_2] \stackrel{\text{def}}{=} \int_{P_1}^{P_2} n ds = \lambda_0 \int_{P_1}^{P_2} \frac{ds}{\lambda} = c(t_2 - t_1) = \phi_2 - \phi_1, \quad (1.26)$$

unde am folosit expresia $n = k/k_0 = \lambda_0/\lambda$ și relația $nds = cdt$, adică ecuația (1.12). Cu alte cuvinte, *drumul optic între două puncte ale unei raze de lumină este proporțional cu numărul de lungimi de undă (căci $ds/\lambda = dN$), cu timpul de propagare a luminii, respectiv cu diferența de fază între oscilațiile armonice ale câmpului optic în punctele considerate.*

Conceptul de drum optic permite să formulăm următoarea proprietate generală, denumită *principiul egalității drumurilor optice* (sau *teorema Malus-Dupin*), conform

căreia, indiferent de mediile optice și de suprafețele de discontinuitate străbătute, *drumul optic între două suprafețe de undă oarecare este același pentru toate razele de lumină*. Valabilitatea acestei aserțiuni rezultă din aplicarea ecuației (1.26) la toate razele fasciculului de lumină considerat, adică (vezi fig.1.8)

$$[P_1P_2] = [Q_1Q_2] = [R_1R_2] = \dots = \phi_2 - \phi_1. \quad (1.27)$$

Acest principiu ține seama în mod automat de legea de refracție Snell-Descartes la suprafețele de discontinuitate. Astfel, să considerăm un fascicul subțire de raze de lumină, cuprins între razele vecine P_1P_2 și Q_1Q_2 , care trec prin suprafața de separare Σ dintre două medii omogene n_1 și n_2 (vezi fig.1.9). În virtutea principiului egalității drumurilor optice avem

$$[P_1PP_2] = [Q_1QQ_2],$$

adică

$$\underline{n_1 \cdot P_1P'} + n_1 \cdot \underline{P'P} + \underline{n_2 \cdot PP_2} = \underline{n_1 \cdot Q_1Q} + n_2 \cdot \underline{QQ'} + \underline{n_2 \cdot Q'Q_2},$$

unde, prin construcție, termenii subliniați se compensează. Cum $P'P = PQ \cdot \sin \theta_1$ și $QQ' = PQ \cdot \sin \theta_2$, din ultima relație rezultă astfel legea de refracție $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$, adică ecuația (1.25).

Principiul egalității drumurilor optice justifică, de asemenea, și construcția lui Huygens a suprafețelor de undă succesive pornind de la una dintre ele. Astfel, ca și în exemplul anterior, să considerăm suprafața de separare Σ dintre două medii omogene n_1 și n_2 (vezi fig.1.10). Fiind dată suprafața de undă ϕ_1 în mediul n_1 , se cere să construim geometric suprafața de undă ϕ_2 în mediul n_2 , care este separată de suprafața ϕ_1 prin drumul optic $\phi_2 - \phi_1 = \text{const}$. Pentru aceasta, în diversele puncte P_1, Q_1, R_1, \dots ale suprafeței ϕ_1 ridicăm normalele (razele de lumină) care intersectează suprafața de separare Σ în punctele corespunzătoare P, Q, R, \dots . În continuare, trasăm sferile S_P, S_Q, S_R, \dots cu centrele în punctele respective P, Q, R, \dots și razele $s_{2p}, s_{2q}, s_{2r}, \dots$ date de condiția de egalitate a drumurilor optice

$$n_1 s_{1p} + n_2 s_{2p} = n_1 s_{1q} + n_2 s_{2q} = n_1 s_{1r} + n_2 s_{2r} = \dots = \phi_2 - \phi_1.$$

Evident, înfășurătoarea acestor sfere reprezintă suprafața de undă ϕ_2 căutată iar punctele de tangență P_2, Q_2, R_2, \dots sunt totodată și punctele de intersecție ale razelor de lumină $P_1PP_2, Q_1QQ_2, R_1RR_2, \dots$ cu această suprafață.

În continuare, vom arăta că ecuațiile opțiicii geometrice pot fi deduse dintr-un singur principiu variațional (*principiul lui Fermat*). Astfel, cum se arată în fig.1.11, să

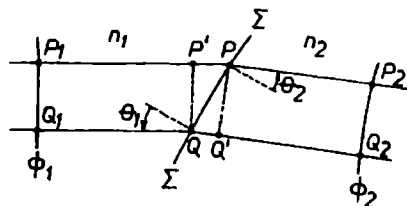


Fig.1.9. Deducerea legii (1.25) a refracției din teorema Malus-Dupin.

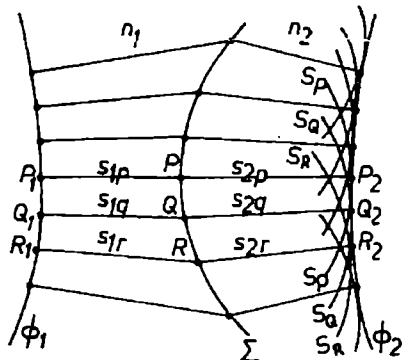


Fig.1.10. Justificarea construcției lui Huygens pe baza teoremei Malus-Dupin.

considerăm două traiectorii care trec prin aceleași puncte P_1 și P_2 și anume o *traiectorie reală*, efectiv aleasă de raza de lumină, și o *traiectorie virtuală vecină*, pe care raza de lumină nu o parcurge efectiv. Evident, există o infinitate de traiectorii virtuale vecine cu o rază de lumină reală dată. Variația drumului optic între cele două traiectorii considerate se scrie

$$\delta \int_{P_1}^{P_2} n ds = \int_{P_1}^{P_2} (\delta n) ds + \int_{P_1}^{P_2} n \delta(ds) . \quad (1.28)$$

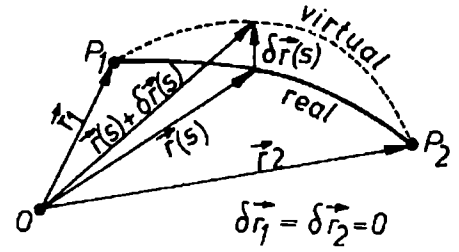


Fig.1.11. O traiectorie luminoasă reală și o traiectorie virtuală vecină (referitor la formularea principiului lui Fermat).

Întrucât traiectoriile sunt vecine

$$\delta n = \delta \vec{r} \cdot \nabla n. \quad (1.29)$$

De asemenea, avem succesiv identitățile $(ds)^2 = (d\vec{r})^2$, $\delta(ds)^2 = \delta(d\vec{r})^2$, deci $ds \cdot \delta(ds) = d\vec{r} \cdot \delta(d\vec{r})$ sau ținând cont că operatorii d și δ comută

$$\delta(ds) = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \delta(d\vec{r}) = \vec{\tau} \cdot d(\delta\vec{r}). \quad (1.30)$$

Introducând expresiile (1.29) și (1.30) în ecuația (1.28) avem

$$\delta \int_{P_1}^{P_2} n ds = \int_{P_1}^{P_2} (\delta \vec{r} \cdot \nabla n) ds + \int_{P_1}^{P_2} n \vec{\tau} \cdot d(\delta\vec{r}). \quad (1.31)$$

Integrând prin părți a doua integrală din membrul drept rezultă

$$\int_{P_1}^{P_2} n \vec{\tau} \cdot d(\delta\vec{r}) = n \vec{\tau} \cdot \delta\vec{r} \Big|_{P_1}^{P_2} - \int_{P_1}^{P_2} \delta\vec{r} \cdot d(n\vec{\tau}), \quad (1.32)$$

astfel că, finalmente, ecuația (1.31) se scrie

$$\delta \int_{P_1}^{P_2} n ds = n_2 \vec{\tau}_2 \cdot \delta\vec{r}_2 - n_1 \vec{\tau}_1 \cdot \delta\vec{r}_1 + \int_{P_1}^{P_2} \left[\nabla n - \frac{d}{ds}(n\vec{\tau}) \right] \cdot \delta\vec{r}(s) ds. \quad (1.33)$$

Dar punctele P_1, P_2 de la capete sunt presupuse fixe, adică $\delta\vec{r}_1 = \delta\vec{r}_2 = 0$, iar variația $\delta\vec{r}(s)$ este arbitrară. Deducem astfel că ecuația razei de lumină, adică $\frac{d}{ds}(n\vec{\tau}) = \nabla n$ și, implicit, ecuația eiconalului sunt matematic echivalente cu formularea variațională

$$\delta \int_{P_1}^{P_2} n ds = 0. \quad (1.34)$$

De aici rezultă *principiul lui Fermat* (1657) conform căruia *traiectoria reală a razei de lumină care unește două puncte P_1, P_2 oarecare este determinată de condiția ca drumul optic corespunzător să fie staționar (extremal în sensul calculului variațional)*, adică

$$\int_{P_1}^{P_2} n ds = \text{staționar (extremal)}, \quad (1.35)$$

unde staționar (extremal) înseamnă minim, maxim sau constant. Cu alte cuvinte, traiectoria reală a razei de lumină reprezintă o *traiectorie extremală a drumului optic*. Evident, această traiectorie este aceeași indiferent de sensul de propagare a luminii (proprietatea de *reversibilitate a razelor de lumină*). În particular, în medii omogene ($n = \text{constant}$), lumina se propagă pe drumul geometric extremal

$$\int_{P_1}^{P_2} ds = \text{constant} = \text{staționar (extremal)}, \quad (1.36)$$

adică în linie dreaptă (minim).

Menționăm că, din punct de vedere istoric, optica geometrică s-a dezvoltat ca teoria razelor de lumină, definite direct prin principiul lui Fermat, adică a traiectoriilor pe care drumul optic este staționar (extremal). Primul succes al principiului lui Fermat l-a constituit, desigur, deducerea legilor deja cunoscute ale reflexiei și refracției. Să deducem și noi, pe această cale, legea de refracție pe o suprafață Σ , de separare dintre două medii omogene n_1, n_2 (vezi fig.1.12). Conform principiului, pe traiectoria reală care trece prin punctele P_1, P_2 date, avem

$$n_1 s_1 + n_2 s_2 = \text{staționar (extremal)}. \quad (1.37)$$

La o deplasare virtuală $d\vec{s}_1$ a punctului de incidență a razei de lumină pe suprafața Σ rezultă deci

$$n_1 \delta s_1 + n_2 \delta s_2 = 0. \quad (1.38)$$

Dar $s^2 = \vec{s} \cdot \vec{s}$, $s \delta s = \vec{s} \cdot d\vec{s}$, $\delta s = \frac{\vec{s}}{s} d\vec{s} = \vec{\tau} \cdot d\vec{s}$, și, $\overrightarrow{P_1 P_2} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 = \text{constant}$ adică $d\vec{s}_1 = -d\vec{s}_2$ astfel că

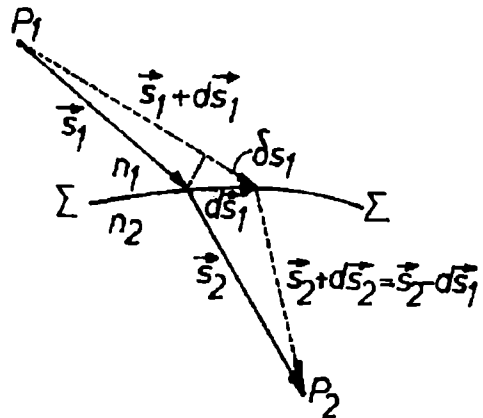


Fig.1.12. Deducerea legilor refracției din principiul lui Fermat.

$$(n_1 \vec{\tau}_1 - n_2 \vec{\tau}_2) \cdot d\vec{s}_1 = 0. \quad (1.39)$$

Cum deplasarea virtuală $d\vec{s}_1$ pe suprafața Σ este arbitrară, ecuația (1.39) este echivalentă cu condiția de continuitate a componentei tangențiale a vectorului $n\vec{\tau}$, adică cu *legea de refracție Snell-Descartes* $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$. În mod similar, considerând punctele P_1, P_2 în același mediu, se deduce și legea de reflexie.

Modul de a deduce legile naturii dintr-un principiu variațional integral, exprimat pentru prima dată prin principiul lui Fermat în optica geometrică, s-a dovedit a fi mult mai general și a dominat întreaga evoluție ulterioară a teoriilor fizicii. Astfel, de exemplu, să considerăm legea a doua a lui Newton

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla U \quad (1.40)$$

prin care mecanica clasică descrie mișcarea unui punct material de masă m și viteză \vec{v} într-un câmp de forță $\vec{F} = -\nabla U$ determinat de energia potențială $U(\vec{r})$. Din legea conservării energiei

$$\frac{1}{2}mv^2 + U(\vec{r}) = E, \quad (1.41)$$

unde E este energia totală, prin operația de gradient rezultă

$$mv \cdot \nabla v = -\nabla U, \quad (1.42)$$

astfel că ecuația (1.40) se mai scrie

$$\frac{1}{v} \frac{d\vec{v}}{dt} = \nabla v. \quad (1.43)$$

Ținând cont că $ds = v dt$ și introducând versorul $\vec{\tau} = \frac{\vec{v}}{v}$ al tangentei la traiectorie, din ecuația (1.43) obținem *ecuația traiectoriei particulei* în forma

$$\frac{d}{ds}(v\vec{\tau}) = \nabla v. \quad (1.44)$$

Această ecuație reprezintă analogul din mecanica clasică al ecuației razei de lumină, ecuația (1.13), locul indicelui de refracție $n(\vec{r}) = c/v(\vec{r})$ fiind luat acum de viteza particulei $v(\vec{r}) = [(2/m) \cdot (E - U(\vec{r}))]^{1/2}$. În mod corespunzător, analogul principiului lui Fermat, ecuația (1.35), se scrie deci

$$\int_{P_1}^{P_2} v ds = \text{staționar (extremal)} \quad (1.45)$$

și este cunoscut sub numele de *principiul Maupertuis-Euler* (1744). Așa s-a născut *analogia opto-mecanică* dintre problema trasării razelor de lumină într-un mediu de indice de refracție $n(\vec{r})$ și aceea a determinării traiectoriilor particulelor într-un câmp de forțe

descrie de funcția de energie potențială $U(\vec{r})$. Această analogie a fost fundamentată mai departe de Hamilton, care a aplicat calculul variațional atât integralei drumului optic din ecuația (1.35) pentru optica geometrică (*Theory of systems of rays*, 1828-1837), cât și integralei "acțiunii" din ecuația (1.45) pentru dinamica clasică (*On the application to dynamics of a general mathematical method previously applied to optics*, 1834).

Pentru frumusețe și puterea sa de cuprindere, în continuare vom prezenta formularea lagrangeiană și hamiltoniană a opticii geometrice. Pentru conveniență, vom repera traiectoria razei de lumină într-un sistem de coordonate cartezian, trecând de la reprezentarea parametrică $x(s), y(s), z(s)$ la reprezentarea $x(z), y(z), z$ în funcție de variabila independentă z (fig.1.13). Astfel, elementul de lungime pe traiectorie se scrie

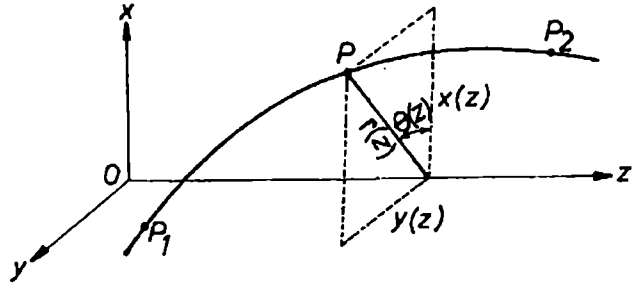


Fig.1.13. Reprezentarea $(x(z), y(z), z)$ a traiectoriei unei raze luminoase.

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} = (1 + x'^2 + y'^2)^{1/2} dz, \quad (1.46)$$

unde

$$\begin{cases} x' = \frac{dx}{dz} = \frac{\tau_x}{\tau_z}, \\ y' = \frac{dy}{dz} = \frac{\tau_y}{\tau_z}, \end{cases} \quad (1.47)$$

iar

$$\begin{cases} \tau_x = \frac{dx}{ds} = \cos \alpha, \\ \tau_y = \frac{dy}{ds} = \cos \beta, \\ \tau_z = \frac{dz}{ds} = \cos \gamma, \end{cases} \quad (1.48)$$

reprezintă componentele versorului $\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{ds}$ (cosinușii directori ai tangentei la traiectorie).

Vom schimba de asemenea variabila de integrare pentru drumul optic de la s la z , adică

$$[P_1 P_2] = \int_{P_1}^{P_2} n(s) ds = \int_{z_1}^{z_2} n \left(\frac{ds}{dz} \right) dz = \int_{z_1}^{z_2} L[x(z), y(z), x'(z), y'(z), z] \cdot dz, \quad (1.49)$$

unde

$$L(x, y, x', y', z) = n \frac{ds}{dz} = \frac{n}{\tau_z} = \frac{n}{\cos \gamma} = n(x, y, z) \cdot (1 + x'^2 + y'^2)^{1/2}, \quad (1.50)$$

reprezintă *lagrangeianul optic*. Conform principiului lui Fermat, traiectoria reală a razei de lumină trebuie să satisfacă ecuația (1.34), adică

$$\delta \int_{z_1}^{z_2} L(x, y, x', y', z) dz = 0 . \quad (1.51)$$

Cum se arată în calculul variațional, condițiile necesare impuse de relația (1.51) sunt date de *ecuațiile Euler-Lagrange*

$$\begin{cases} \frac{d}{dz} \left(\frac{\partial L}{\partial x'} \right) = \frac{\partial L}{\partial x} , \\ \frac{d}{dz} \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \right) = \frac{\partial L}{\partial y} . \end{cases} \quad (1.52)$$

Aceste ecuații reprezintă, de fapt, ecuația razei de lumină, adică ecuația (1.13)

$$\frac{d}{ds} (n\vec{\tau}) = \nabla n$$

sau, pe componente,

$$\begin{cases} \frac{d}{ds} (n\tau_x) = \frac{\partial n}{\partial x} , \\ \frac{d}{ds} (n\tau_y) = \frac{\partial n}{\partial y} , \\ \frac{d}{ds} (n\tau_z) = \frac{\partial n}{\partial z} . \end{cases} \quad (1.53)$$

Într-adevăr, derivând expresia lagrangeianului, adică ecuația (1.50), avem

$$\frac{\partial L}{\partial x'} = \frac{nx'}{(1+x'^2+y'^2)^{1/2}} = n \frac{dx}{ds} = n\tau_x . \quad (1.54)$$

Prima ecuație (1.52) se scrie explicit sub forma

$$\frac{d}{dz} (n\tau_x) = (1+x'^2+y'^2)^{1/2} \cdot \frac{\partial n}{\partial x} \quad \text{sau} \quad \frac{d}{ds} (n\tau_x) = \frac{\partial n}{\partial x} ,$$

adică este chiar prima ecuație (1.53). În mod similar, a doua ecuație (1.52) reprezintă a doua ecuație (1.53).

Observăm că numai primele două ecuații (1.53) sunt independente, a treia ecuație rezultând automat din celelalte două și din condiția pur geometrică

$$\vec{\tau}^2 = \tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2 = 1 . \quad (1.55)$$

Într-adevăr, înmulțind ecuația (1.55) cu dn/ds , respectiv derivând-o față de s și înmulțind cu n , avem

$$\left(\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2 \right) \cdot \frac{dn}{ds} = \frac{\partial n}{\partial x} \cdot \tau_x + \frac{\partial n}{\partial y} \cdot \tau_y + \frac{\partial n}{\partial z} \cdot \tau_z ,$$

$$\left(\tau_x \frac{d\tau_x}{ds} + \tau_y \frac{d\tau_y}{ds} + \tau_z \frac{d\tau_z}{ds} \right) n = 0 ,$$

de unde, prin adunare, obținem

$$\tau_x \left[\frac{d}{ds}(n\tau_x) - \frac{\partial n}{\partial x} \right] + \tau_y \left[\frac{d}{ds}(n\tau_y) - \frac{\partial n}{\partial y} \right] + \tau_z \left[\frac{d}{ds}(n\tau_z) - \frac{\partial n}{\partial z} \right] = 0. \quad (1.56)$$

Evident, a treia ecuație (1.53) reprezintă o identitate care nu mai aduce nimic nou față de primele două.

De la formalismul lagrangeian, prezentat mai sus, prin ecuațiile (1.50)-(1.52), se poate trece la formalismul hamiltonian prin definirea *momentelor (impulsurilor) canonice optice*

$$\begin{cases} p_x = \frac{\partial L}{\partial x'} = n\tau_x, \\ p_y = \frac{\partial L}{\partial y'} = n\tau_y, \end{cases} \quad (1.57)$$

și a *hamiltonianului optic*

$$H = p_x x' + p_y y' - L(x, y, x', y', z) = p_x \frac{\tau_x}{\tau_z} + p_y \frac{\tau_y}{\tau_z} - \frac{n}{\tau_z}. \quad (1.58)$$

Înlocuind cosinușii directori prin momente cu ajutorul ecuațiilor (1.57) și (1.55) obținem expresia hamiltonianului în funcție de variabilele canonice conjugate $(x, p_x), (y, p_y)$ și de parametrul independent z în forma

$$H(x, y, p_x, p_y, z) = - \left[n^2(x, y, z) - (p_x^2 + p_y^2) \right]^{1/2} = -n\tau_z = -n \cos \gamma. \quad (1.59)$$

Remarcăm că, în timp ce coordonatele optice (x, y) pot avea orice valoare, domeniul momentelor optice (p_x, p_y) este limitat de condiția

$$p_x^2 + p_y^2 = n^2(\tau_x^2 + \tau_y^2) = n^2(1 - \tau_z^2) = (n \sin \gamma)^2 \leq n^2 .$$

În mod corespunzător, avem $|H| \leq n$.

Diferențiala totală a hamiltonianului optic (1.59) ca funcție de coordonate și momente este

$$dH = \frac{\partial H}{\partial x} dx + \frac{\partial H}{\partial y} dy + \frac{\partial H}{\partial p_x} dp_x + \frac{\partial H}{\partial p_y} dp_y + \frac{\partial H}{\partial z} dz. \quad (1.60)$$

Pe de altă parte, din relația de definiție, ecuația (1.58), rezultă

$$dH = x' dp_x + \underline{p_x dx'} + y' dp_y + \underline{p_y dy'} - \frac{\partial L}{\partial x} dx - \frac{\partial L}{\partial y} dy - \underline{\frac{\partial L}{\partial x'}} dx' - \underline{\frac{\partial L}{\partial y'}} dy' - \frac{\partial L}{\partial z} dz, \quad (1.61)$$

unde termenii subliniați se compensează prin însăși definiția momentelor, ecuația (1.57). De asemenea, conform ecuațiilor Euler-Lagrange (1.52), avem

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{dp_x}{dz}, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{dp_y}{dz}, \quad (1.62)$$

astfel că ecuația (1.61) se scrie

$$dH = \frac{dx}{dz} dp_x + \frac{dy}{dz} dp_y - \frac{dp_x}{dz} dx - \frac{dp_y}{dz} dy - \frac{\partial L}{\partial z} dz. \quad (1.63)$$

Identificând cele două expresii (1.60), (1.63) ale diferențialei totale dH , rezultă finalmente ecuațiile diferențiale pentru variabilele canonice, denumite *ecuațiile canonice* sau *ecuațiile lui Hamilton*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dz} = \frac{\partial H}{\partial p_x}, & \frac{dp_x}{dz} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \\ \frac{dy}{dz} = \frac{\partial H}{\partial p_y}, & \frac{dp_y}{dz} = -\frac{\partial H}{\partial y}, \end{cases} \quad (1.64)$$

precum și $\partial H/\partial z = -\partial L/\partial z$. În locul a două ecuații Euler-Lagrange de ordinul al doilea am obținut astfel patru ecuații Hamilton de ordinul întâi. Cunoscând hamiltonianul sistemului, ecuația (1.59), și specificând condițiile la limită într-un punct $P_0(z_0)$, integrarea ecuațiilor (1.64) permite să determinăm starea razei de lumină în orice alt punct $P(z)$, adică poziția x, y și direcția de propagare $p_x = n\tau_x$, $p_y = n\tau_y$. Pentru interpretarea geometrică este comod să considerăm variabilele canonice în *spațiul fazelor* (x, y, p_x, p_y).

Cititorul poate verifica ușor, utilizând forma (1.59) a hamiltonianului, că ecuațiile canonice (1.64) conduc la definițiile (1.57) și la primele două ecuații din setul (1.53). Aceasta înseamnă că ansamblul ecuațiilor lui Hamilton este absolut echivalent cu ecuațiile Euler-Lagrange.

Studiul traiectoriilor luminoase poate fi dezvoltat la fel de bine și prin *metoda Hamilton-Jacobi*. Definind *acțiunea optică* $S(x(z), y(z), z)$ prin relația

$$S = \int_{P_1}^P L dz = \int_{P_1}^P (p_x x' + p_y y' - H) dz, \quad (1.65)$$

cunoscută din mecanica analitică, în care P_1 este un punct fixat, iar P - un punct arbitrar de pe o traiectorie luminoasă reală, exact ca în mecanica analitică, se obține

$$\frac{\partial S}{\partial z} = -H, \quad \frac{\partial S}{\partial x} = p_x, \quad \frac{\partial S}{\partial y} = p_y. \quad (1.66)$$

Ținând cont că hamiltonianul H este funcție de variabilele canonic conjugate (x, p_x), (y, p_y) și de z , prima ecuație din (1.66) devine

$$\frac{\partial S}{\partial z} + H(x, y, \frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial y}, z) = 0. \quad (1.67)$$

Am obținut astfel *ecuația Hamilton-Jacobi* pentru acțiunea optică. Folosind forma concretă (1.59) a hamiltonianului optic, din ecuația (1.67) obținem ecuația

$$\frac{\partial S}{\partial z} - \left[n^2(x, y, z) - \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 \right]^{1/2} = 0, \quad (1.68)$$

care se poate scrie imediat sub forma

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 = n^2(x, y, z). \quad (1.68')$$

Din compararea relației (1.68') cu ecuația (1.6) ajungem la concluzia că eiconalul este identic cu acțiunea optică iar ecuația eiconalului este în realitate ecuația Hamilton-Jacobi. În felul acesta "cercul" analogiei opto-mecanice s-a închis.

Cele prezentate în ultima parte a acestui paragraf ne permit să afirmăm că, între optica geometrică și mecanica analitică există o analogie perfectă. În mecanica cuantică ecuația Hamilton-Jacobi (adică ecuația eiconalului) este un caz limită (pentru $h \rightarrow 0$, $h =$ constanta lui Planck) al ecuației lui Schödinger-fundamentală pentru întreaga mecanică cuantică nerelativistă. Prin urmare, mecanica analitică și optica pot fi considerate, în sensul *principiului de corespondență*, ca niște cazuri particulare ale mecanicii cuantice. Natura duală a luminii (ondulatorie și corpuscular- fonică) este așadar integrată în natura duală a microobiectelor cuantice.

1.1.3. Condiții generale de stigmatism

Să considerăm un fascicul conic (homocentric) de raze de lumină emis de o sursă punctuală P_1 (fig.1.14, a). În general, din infinitatea de raze ale acestui fascicul, numai una singură va trece printr-un alt punct P_2 , și anume traiectoria extremală care satisface principiul lui Fermat. Pe de altă parte, funcția ideală a instrumentelor optice de format imagini constă în dirijarea fasciculului de raze în așa fel încât fiecărui punct P_1 din spațiul obiectului să-i corespundă un singur punct P_2 în spațiul imaginii. Din acest motiv, în continuare ne vor interesa acele cazuri excepționale în care punctele P_1 și P_2 sunt legate printr-o infinitate de raze (fig.1.14, b).

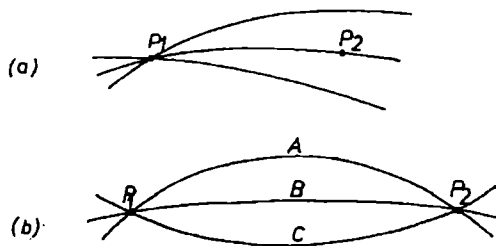
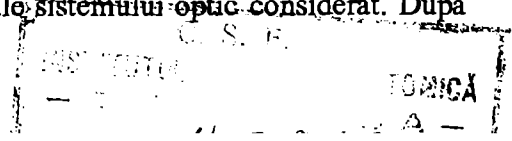


Fig.1.14.a,b. Cu privire la definirea stigmatismului.

Stigmatismul reprezintă conceptul fundamental al teoriei geometrice a imaginilor optice. Denumirea provine din cuvântul grecesc $\sigma\tau\iota\gamma\mu\alpha$ care înseamnă punct. Prin definiție, un sistem optic este stigmatic sau punctual pentru perechea de puncte P_1, P_2 dacă un fascicul conic de raze cu vârful în P_1 este transformat într-un fascicul conic de raze cu vârful în P_2 . Punctul P_2 poartă numele de *imagine stigmatică* a punctului P_1 . Evident, dacă schimbăm sensul de propagare a razelor de lumină, punctul P_1 reprezintă imaginea stigmatică a punctului P_2 . Perechea de puncte obiect și imagine astfel definite formează o *pereche de puncte stigmatice* sau *puncte conjugate* ale sistemului optic considerat. După



cum razele de lumină se intersectează efectiv sau numai prin prelungirile lor (rectilinii, în mediile omogene) punctul obiect sau imagine poartă numele de punct *real*, respectiv *virtual*.

În general, indiferent de complexitatea formei suprafețelor de undă, în imediata vecinătate a punctelor conjugate ele devin obligatoriu sferice, degenerând în punctele respective. Prin extensia principiului egalității drumurilor optice, drumul optic, timpul de propagare a luminii, numărul de lungimi de undă și diferența de fază între două puncte conjugate P_1, P_2 sunt aceleași pentru toate razele de lumină A,B,C.. care trec prin aceste puncte (fig.1.14.b). *Condiția de stigmatism* a punctelor conjugate P_1, P_2 se scrie deci sub forma

$$[P_1P_2] = [P_1AP_2] = [P_1BP_2] = [P_1CP_2] = \dots = \text{constant} \quad (1.69)$$

și reprezintă singurul mod în care lumina se poate propaga între două puncte adoptând efectiv și simultan mai multe drumuri alăturate. Într-adevăr, numai în acest fel condiția de staționaritate a drumului optic între punctele conjugate, impusă de principiul lui Fermat, ecuația (1.35), este satisfăcută în mod indiferent de orice rază de lumină din fasciculul considerat. Proprietatea de egalitate a timpului de propagare a luminii între punctele conjugate se numește *tautocronism*.

Poate, cel mai clar apare semnificația fizică a noțiunii de imagine în optica geometrică din proprietatea de egalitate a numărului de lungimi de undă, respectiv din aceea că faza relativă a undelor armonice care se propagă pe diversele raze este aceeași în punctele conjugate. Pentru a ilustra modul în care se realizează o imagine perfectă, în fig.1.15. a,b,c se arată reconstrucția undelor sferice la o *suprafață carteziană de refracție (ovalul lui*

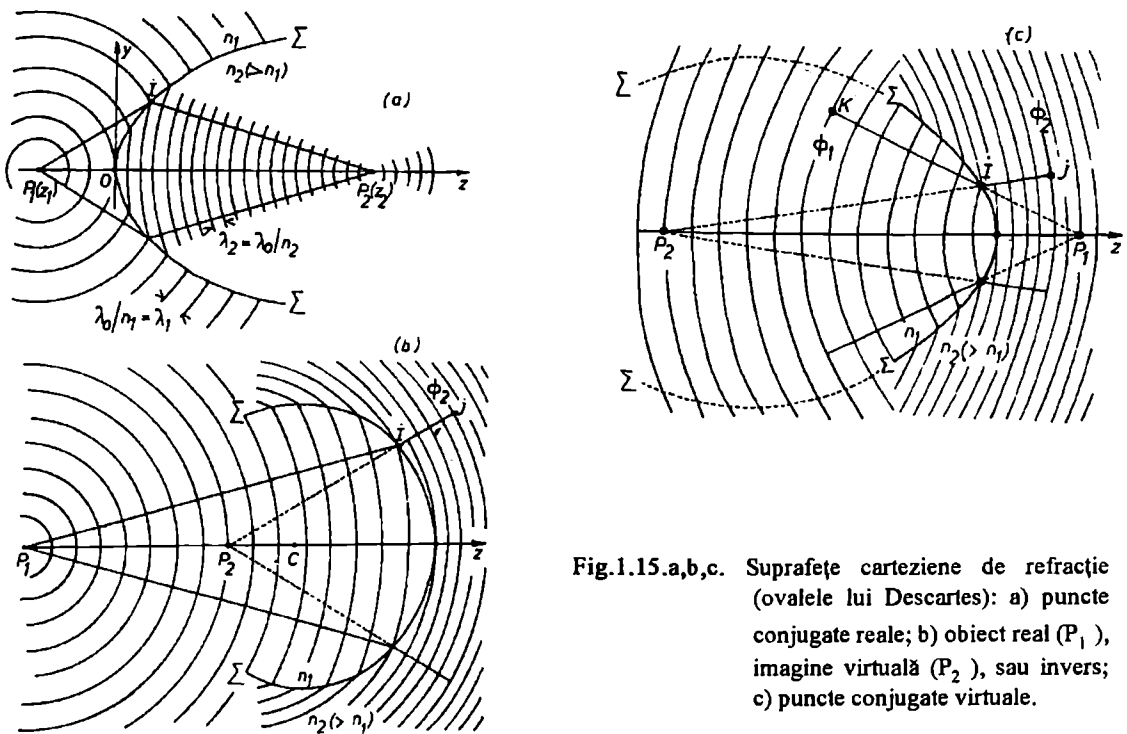


Fig.1.15.a,b,c. Suprafețe carteziene de refracție (ovalele lui Descartes): a) puncte conjugate reale; b) obiect real (P_1), imagine virtuală (P_2), sau invers; c) puncte conjugate virtuale.

Descartes), definită ca suprafață de separare Σ dintre două medii omogene n_1, n_2 și ale cărei puncte I satisfac condiția de stigmatism (numai) pentru o pereche dată de puncte conjugate P_1, P_2 . În general, ovalul lui Descartes reprezintă o *suprafață asferică* bipolară, cu simetrie de revoluție în jurul axului care trece prin punctele conjugate considerate. Astfel,

pentru cazul în care ambele puncte conjugate sunt reale, adică puncte prin care razele de lumină trec efectiv (fig. 1.15, a), suprafața carteziană satisface ecuația

$$[P_1IP_2] = n_1 \cdot P_1I + n_2 \cdot IP_2 = \lambda_0 \left(\frac{P_1I}{\lambda_1} + \frac{IP_2}{\lambda_2} \right) = \text{constant.} \quad (1.70)$$

Cu alte cuvinte, indiferent de punctul de incidență I al razelor de lumină pe suprafață, punctele conjugate sunt separate de același număr de lungimi de undă (în fig. 1.15.a acest număr a fost luat egal cu 23).

Condiția de stigmatism (1.70) poate fi extinsă și pentru cazurile în care unul sau ambele puncte conjugate sunt virtuale. Să considerăm, de exemplu, situația în care P_1 este real și P_2 virtual (fig.1.15,b). Prin P_2 trec acum numai prelungirile rectilinii ale razelor de lumină din mediul n_2 . Conform principiului egalității drumurilor optice, între punctul real P_1 și o suprafață de undă ϕ_2 , din mediul n_2 , dată (dar de altfel arbitrară) avem

$$[P_1IJ] = n_1 \cdot P_1I + n_2 \cdot IJ = n_1 \cdot P_1I + n_2 \cdot (P_2J - P_2I) = \text{constant,}$$

indiferent de punctul de incidență I. Segmentul P_2J reprezintă însă raza suprafeței sferice ϕ_2 considerate și este constant, astfel că rezultă condiția de stigmatism (ecuația suprafeței carteziene) în forma

$$n_1 \cdot P_1I - n_2 \cdot P_2I = \lambda_0 \left(\frac{P_1I}{\lambda_1} - \frac{P_2I}{\lambda_2} \right) = \text{constant.} \quad (1.71)$$

De data aceasta, spre deosebire de condiția (1.70), indiferent de poziția punctului de incidență I, punctele conjugate sunt separate de aceeași diferență de număr de lungimi de undă între raza reală P_1I și raza virtuală P_2I (pentru fig.1.15,b, constanta din ecuația (1.71) a fost aleasă, de exemplu, egală cu zero). În mod similar, se arată că ecuația suprafeței carteziene pentru situația în care punctul P_1 este virtual și P_2 real are forma

$$-n_1 \cdot IP_1 + n_2 \cdot IP_2 = \lambda_0 \left(-\frac{IP_1}{\lambda_1} + \frac{IP_2}{\lambda_2} \right) = \text{constant.} \quad (1.72)$$

Observăm că, în cazurile descrise de ecuațiile (1.71) sau (1.72), punctele conjugate se află de aceeași parte a suprafeței carteziene. În particular, când diferența drumurilor optice dintre raza reală și raza virtuală este nulă, suprafața carteziană degenerază într-o suprafață sferică (vezi fig.1.15,b) iar punctele conjugate corespunzătoare poartă numele de *punctele lui Weierstrass* (sau *punctele lui Young*). Aceste puncte prezintă o importanță practică deosebită deoarece, pe de o parte, suprafața sferică este cel mai ușor de realizat prin șlefuire și, pe de altă parte, punctele lui Weierstrass nu sunt numai stigmatice ci și aplanetice (vezi secțiunea 1.2.1.). În fine, în cazul în care ambele puncte conjugate sunt virtuale (fig.1.15,c), aplicând principiul egalității drumurilor optice între o suprafață de undă ϕ_1 , din mediul n_1 și o suprafață de undă ϕ_2 , din mediul n_2 , obținem

$$[KIJ] = n_1 \cdot KI + n_2 \cdot IJ = n_1 \cdot (KP_1 - IP_1) + n_2 \cdot (P_2J - P_2I) = \text{constant,}$$

indiferent de poziția punctului de incidență I. Dar, razele de curbură KP_1 și P_2J ale suprafețelor sferice ϕ_1 , respectiv ϕ_2 , sunt constante astfel că putem scrie

$$-n_1 \cdot IP_1 - n_2 \cdot P_2I = -\lambda_0 \left(\frac{IP_1}{\lambda_1} + \frac{P_2I}{\lambda_2} \right) = \text{constant.} \quad (1.73)$$

Deci, ca și în cazul punctelor conjugate reale, ecuația (1.70), punctele conjugate virtuale se află de o parte și de alta a suprafeței carteziene și, indiferent de poziția punctului de incidență I, sunt separate de același număr de lungimi de undă (în fig.1.15,c acest număr a fost luat egal cu 18).

Recapitulând rezultatele obținute în ecuațiile (1.70) - (1.73), avem:

$$\begin{array}{ll} P_1, P_2 \text{ reale:} & n_1 \cdot P_1I + n_2 \cdot IP_2 = \text{constant,} \\ P_1, P_2 \text{ virtuale:} & -n_1 \cdot IP_1 - n_2 \cdot P_2I = \text{constant,} \\ P_1 \text{ real, } P_2 \text{ virtual:} & n_1 \cdot P_1I - n_2 \cdot P_2I = \text{constant,} \\ P_1 \text{ virtual, } P_2 \text{ real:} & -n_1 \cdot IP_1 + n_2 \cdot IP_2 = \text{constant,} \end{array} \quad (1.74)$$

unde toate segmentele au fost considerate pozitive. Pe scurt, *condițiile de stigmatism riguros*, adică ecuațiile (1.74), se scriu

$$[P_1IP_2] = n_1 \cdot P_1I + n_2 \cdot IP_2 = \text{constant,} \quad (1.75)$$

unde segmentele sunt considerate algebric și anume: *facem convenția că drumul optic este pozitiv dacă este parcurs în sensul de propagare și negativ dacă este parcurs în sens invers.*

De fapt, distingem două categorii de situații și anume

$$n_1 \cdot |P_1I| \pm n_2 \cdot |IP_2| = \text{constant,} \quad (1.76)$$

unde semnul plus corespunde cazului în care punctele conjugate se află de părți diferite ale suprafeței carteziene iar semnul minus - cazului în care punctele conjugate se află de aceeași parte.

Remarcăm că, din punct de vedere formal, specializarea formulelor de mai sus pentru reflexie se face prin simpla înlocuire $n_2 = -n_1$ astfel că ecuația (1.76) devine

$$|P_1I| \mp |IP_2| = \text{constant,} \quad (1.77)$$

unde, de data aceasta semnul minus corespunde cazului în care punctele conjugate se află de părți diferite ale oglinzii iar semnul plus - cazului în care punctele conjugate se află de aceeași parte. Într-adevăr, cum rezultă din contemplarea fig.1.16, *suprafețele carteziene de reflexie* reprezintă fie hiperboloizi de revoluție (fig.1.16,b,c, cu focarele în punctele P_1, P_2 , din care unul real și altul virtual), fie elipsoizi de revoluție (fig.1.16,e,f, cu focarele în punctele P_1, P_2 , ambele reale sau ambele virtuale). Un caz particular de oglindă hiperbolică este oglinda plană (fig.1.16,d, când constanta din ecuația (1.77) este

nulă). De asemenea, când unul din focare se deplasează la infinit, oglinda eliptică devine parabolică (fig.1.16, g, h).

În general, spre deosebire de suprafețele carteziene de reflexie, ecuația (1.77), care sunt suprafețe cu secțiuni conice, suprafețele carteziene de refracție, ecuația (1.76), sunt mult mai complicate. Astfel, fixând punctele conjugate $P_1(z_1)$, $P_2(z_2)$ și alegând un sistem de coordonate carteziene yOz cu originea în vârful O al suprafeței Σ (fig.1.15,a), ecuația (1.76) se scrie

$$\begin{aligned} & n_1 \cdot \sqrt{(z-z_1)^2 + y^2} \pm \\ & \pm n_2 \cdot \sqrt{(z-z_2)^2 + y^2} = \\ & = n_1 \cdot |z_1| \pm n_2 \cdot |z_2|, \quad (1.78) \end{aligned}$$

unde semnul plus corespunde cazului în care punctele P_1, P_2 se află de părți diferite ale originii O , adică $z_1 z_2 < 0$, iar semnul minus - cazului în care punctele P_1, P_2 se află de aceeași parte, adică $z_1 z_2 > 0$. Eliminând radicalii prin două ridicări la pătrat și aranjând termenii în ordinea puterilor descrescătoare ale valorilor y, z , obținem finalmente *ecuația ovalului lui Descartes* în forma

$$\begin{aligned} & (n_1^2 - n_2^2)^2 \cdot (y^2 + z^2)^2 - 4(n_1^2 - n_2^2) \cdot (n_1^2 z_1 - n_2^2 z_2) \cdot z(y^2 + z^2) + \\ & + 4n_1 n_2 (n_1 z_1 - n_2 z_2)(n_1 z_2 - n_2 z_1)(y^2 + z^2) + 4(n_1^2 z_1 - n_2^2 z_2)^2 z^2 - \\ & - 8n_1 n_2 (n_1 - n_2)(n_1 z_1 - n_2 z_2) z_1 z_2 z = 0. \quad (1.79) \end{aligned}$$

Această ecuație reprezintă secțiunea meridională a unei suprafețe de revoluție de gradul al patrulea. Pentru anumite valori ale parametrilor n_1, n_2, z_1, z_2 , ovalul lui Descartes degenerază într-o suprafață de gradul al doilea. Astfel, termenii de gradul patru și trei se anulează dacă $n_1^2 - n_2^2 = 0$, adică $n_2 = \pm n_1$. Cazul $n_2 = n_1$ este trivial (mediile adiacente sunt identice) iar cazul $n_2 = -n_1$ se realizează în reflexie și a fost discutat mai sus. De asemenea, dacă avem relația

$$n_1 z_1 = n_2 z_2, \quad (z_1 z_2 > 0), \quad (1.80)$$

atunci ecuația (1.79) devine

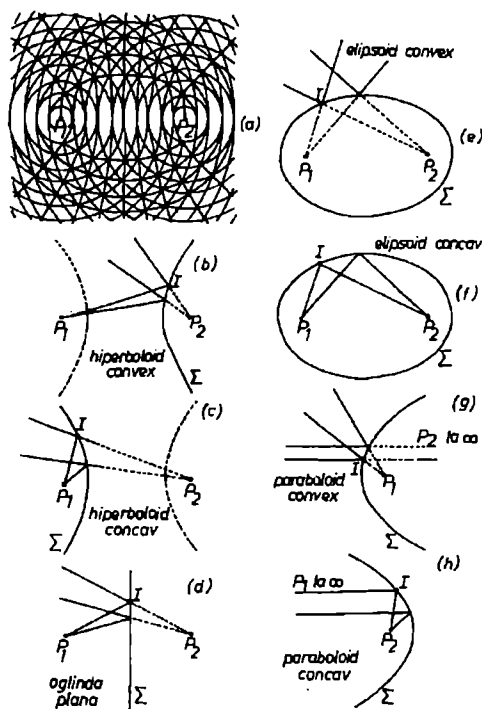


Fig.1.16. Suprafețe carteziene de reflexie: elipsoizi de revoluție (a, e,f), hiperboloizi de revoluție (b, c și, în particular, d) și paraboloidi de revoluție (g, h).

$$(n_1^2 - n_2^2) \cdot (y^2 + z^2) - 2z(n_1^2 z_1 - n_2^2 z_2) = 0 ,$$

adică sfera

$$y^2 + \left(z - \frac{n_1^2 z_1 - n_2^2 z_2}{n_1^2 - n_2^2} \right)^2 = \left(\frac{n_1^2 z_1 - n_2^2 z_2}{n_1^2 - n_2^2} \right)^2 , \quad (1.81)$$

cu centrul C în punctul

$$y_c = 0 , \quad z_c = \frac{n_1^2 z_1 - n_2^2 z_2}{n_1^2 - n_2^2} \quad (1.82)$$

și raza $r = |z_c|$. Folosind expresia lui z_c , ecuația (1.82), poziția *punctelor lui Weierstrass*, definite prin ecuația (1.80), se mai scrie

$$z_1 = \left(1 + \frac{n_2}{n_1} \right) z_c , \quad z_2 = \left(1 + \frac{n_1}{n_2} \right) z_c . \quad (1.83)$$

Observăm că punctele lui Weierstrass $P_1(z_1)$, $P_2(z_2)$ și centrul de curbură $C(z_c)$ se află de aceeași parte a suprafeței Σ , cum se arată în fig.1.15,b (pentru aplicații vezi secțiunea 1.2.1.)

În fine, dacă unul din punctele conjugate se află la infinit ($|z_1| \rightarrow \infty$ sau $|z_2| \rightarrow \infty$), atunci ovalul lui Descartes este un elipsoid sau hiperboloid de revoluție. Pentru a demonstra aceasta, observăm că membrul stâng al ecuației (1.79) reprezintă un polinom de gradul al doilea în z_1 (sau z_2), astfel că ecuația ovalului se mai scrie

$$\left[(n_1^2 - n_2^2)z^2 - n_2^2 y^2 - 2n_2(n_1 - n_2)z_2 z \right] \cdot z_1^2 + \dots = 0 .$$

Dacă $|z_1| \rightarrow \infty$, atunci paranteza dreaptă din ultima ecuație trebuie să se anuleze, adică

$$(n_1^2 - n_2^2)z^2 - n_2^2 y^2 - 2n_2(n_1 - n_2)z_2 z = 0 , \quad (1.84)$$

sau în forma canonică

$$\frac{\left(z - \frac{n_2 z_2}{n_1 + n_2} \right)^2}{\left(\frac{n_2 z_2}{n_1 + n_2} \right)^2} + \frac{y^2}{\frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2} z_2^2} = 1 . \quad (1.85)$$

Ecuația (1.85), în cazul $n_2 > n_1$, reprezintă un elipsoid de revoluție (fig.1.17,a,b), iar în cazul $n_2 < n_1$, un hiperboloid de revoluție (fig.1.17,c,d). La acest rezultat se poate ajunge și direct dacă observăm că, pentru $z_1 \rightarrow -\infty$, condiția de stigmatism impune ca drumul optic între un plan de undă incident (oarecare) și punctul imagine P_2 să fie constant. Astfel, de exemplu, pentru situația din fig.1.17,a, avem $[JIP_2] = [OP_2]$, adică

$$n_1 z + n_2 \cdot \sqrt{(z - z_2)^2 + y^2} = n_2 z_2,$$

de unde, prin izolarea radicalului, ridicare la pătrat și aranjare, obținem ecuația (1.85). Acest rezultat este valabil și pentru celelalte situații prezentate în fig.1.17.

Conform ecuației (1.85), semi-axa mare a , semi-axa mică b , distanța focală f și excentricitatea $e = f/a$ au expresiile

$$a = \frac{n_2 |z_2|}{n_1 + n_2}, b = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \right)^{1/2} |z_2|, f = \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{n_1 |z_2|}{n_1 + n_2}, e = \frac{n_1}{n_2} < 1, \quad (1.86)$$

pentru elipsoid ($n_2 > n_1$) și

$$a = \frac{n_2 |z_2|}{n_1 + n_2}, b = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_2 + n_1} \right)^{1/2} |z_2|, f = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{n_1 |z_2|}{n_1 + n_2}, e = \frac{n_1}{n_2} > 1, \quad (1.87)$$

pentru hiperboloid ($n_2 < n_1$). În ambele cazuri centrul C al secțiunii conice este în punctul

$$z_c = \frac{n_2 z_2}{n_1 + n_2}, y_c = 0. \quad (1.88)$$

Imaginea P_2 coincide cu focarul din dreapta (F_2) pentru $z_2 = z_c + f (> 0)$ sau cu focarul din stânga (F_1) pentru $z_2 = z_c - f (< 0)$.

În cazul reflexiei ($n_2 = -n_1$), ecuația (1.84) devine

$$y^2 = 4z_2 z \quad (1.89)$$

și reprezintă un paraboloid de rotație de parametru $p = 2z_2$. Dacă $p > 0$, imaginea este virtuală (fig.1.16, g), iar dacă $p < 0$, imaginea este reală (fig.1.16, h).

Suprafețele carteziene de reflexie prezintă importanță pentru construcția telescoapelor și a proiectoarelor. Astfel, obiectivul telescoapelor de reflexie (Newton, Herschel, Gregory, Cassegrain) este o oglindă parabolică concavă iar oglinda secundară este eliptică concavă (Gregory) sau hiperbolică convexă (Cassegrain), vezi secțiunea 1.2.5, (fig.1.61).

De asemenea, proprietatea de stigmatism riguros a suprafețelor carteziene de refracție este folosită pentru realizarea *lentilelor asferice*. În principiu, referindu-ne la fig.1.15,a,b,c, o lentilă asferică, confecționată din mediul optic n_2 , este limitată de

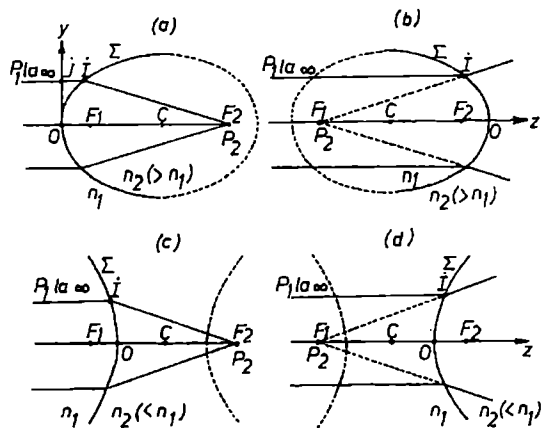


Fig.1.17. Suprafețe carteziene de refracție pentru P_1 la infinit: elipsoizi de revoluție (a,b), hiperboloizi de revoluție (c,d).

suprafața carteziană Σ și orice suprafață sferică ϕ_2 cu centrul în P_2 . În practică sunt folosite suprafețele carteziane cu secțiune conică, așa cum este ilustrat în fig.1.18 pentru lentila sfero-eliptică (a), plano-hiperbolică (b) sau dublu-hiperbolică (c). Datorită lipsei aberației de sfericitate (vezi secțiunea 1.2.8), lentilele asferice pot avea diametre D ale aperturii mult mai mari și distanțe focale f mult mai mici decât lentilele sferice. În consecință, se poate ajunge la

def. $numere$ $f = f/D$ (vezi secțiunea 1.2.6) foarte mici (în practică până la 0,6), respectiv la o densitate de flux luminos în planul imaginii foarte mare. Lentilele asferice permit astfel folosirea cea mai eficientă a surselor și detectorilor de lumină, de unde și numeroasele lor aplicații în sistemele optice actuale de comunicații și control. În fine, mai remarcăm folosirea proprietăților punctelor lui Weierstrass pentru realizarea lentilelor stigmatice și aplanetice și a obiectivelor de microscop de apertură numerică mare (vezi secțiunea 1.2.1.).

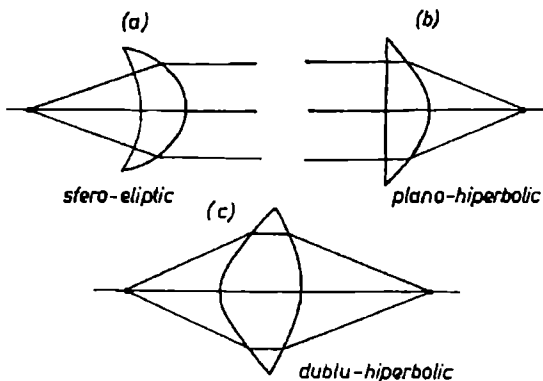


Fig.1.18. Trei tipuri de lentile asferice.

Spre deosebire de o suprafață carteziană sau o lentilă asferică, la care stigmatismul se realizează pentru o singură pereche de puncte conjugate, un *instrument optic perfect* (cum este, de exemplu, distribuția maxwelliană a indicelui de refracție, denumită "ochi de pește", vezi secțiunea 1.3.3), pune în corespondență biunivocă și reciprocă orice punct obiect P_1 din spațiul tridimensional cu imaginea sa punctuală P_2 . Dacă P_1 descrie o curbă C_1 , atunci și P_2 descrie o curbă conjugată C_2 . În mod similar, curbele conjugate generează suprafețe conjugate iar acestea volume conjugate. În acest mod, se introduce în optica geometrică noțiunea de *image stigmatică* a obiectelor spațiale extinse.

În cazul sistemelor optice reale proprietatea de conservare a conicității în perechi de puncte conjugate nu se mai poate menține pentru obiecte oricât de extinse și cu fascicule de raze de orice deschidere.

În continuare, vom deduce condiția generală pentru ca stigmatismul, presupus realizat pentru o pereche de puncte P_1, P_2 , să se mențină și pentru orice pereche de puncte vecine corespunzătoare Q_1, Q_2 (fig.1.19). Pentru aceasta, vom porni de la definiția punctelor conjugate, ecuația (1.69), conform căreia drumul optic pe orice rază P_1PP_2 este egal cu constanta $[P_1P_2]$ iar drumul optic pe orice rază Q_1QQ_2 este egal cu constanta $[Q_1Q_2]$. Condiția de conservare a stigmatismului în perechi de puncte vecine se scrie deci

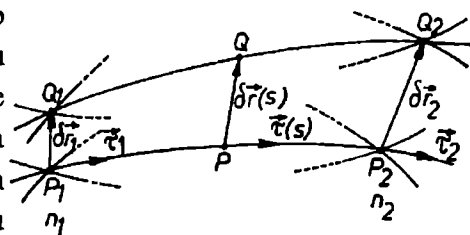


Fig.1.19. Pentru deducerea condiției generale de stigmatism la perechi de puncte vecine.

$$\delta[P_1P_2] = [Q_1Q_2] - [P_1P_2] = \text{constant.} \quad (1.90)$$

Dar drumul optic, ecuația (1.26), reprezintă diferența de fază dintre oscilațiile armonice în punctele considerate, adică $[P_1P_2] = \phi(\vec{r}_2) - \phi(\vec{r}_1)$. Prin variația perechii de puncte conjugate P_1, P_2 avem deci

$$\begin{aligned} \delta[P_1P_2] &= \delta\phi(\vec{r}_2) - \delta\phi(\vec{r}_1) = \nabla\phi(\vec{r}_2) \cdot \delta\vec{r}_2 - \nabla\phi(\vec{r}_1) \cdot \delta\vec{r}_1 = \\ &= n_2\vec{\tau}_2 \cdot \delta\vec{r}_2 - n_1\vec{\tau}_1 \cdot \delta\vec{r}_1, \end{aligned} \quad (1.91)$$

unde am folosit ecuația eiconalului $\nabla\phi = n\vec{\tau}$, adică ecuația (1.9). Variațiile $\delta\vec{r}_1 = \overrightarrow{P_1Q_1}$ și $\delta\vec{r}_2 = \overrightarrow{P_2Q_2}$ definesc o nouă pereche de puncte vecine Q_1, Q_2 . Dacă (P_1, P_2) și (Q_1, Q_2) reprezintă perechi de puncte conjugate, atunci din ecuațiile (1.90), (1.91) rezultă **condiția generală de stigmatism sau teorema cosinurilor**

$$n_2\vec{\tau}_2 \cdot \delta\vec{r}_2 - n_1\vec{\tau}_1 \cdot \delta\vec{r}_1 = n_2\delta r_2 \cos(\vec{\tau}_2, \delta\vec{r}_2) - n_1\delta r_1 \cos(\vec{\tau}_1, \delta\vec{r}_1) = \text{constant}. \quad (1.92)$$

Această ecuație leagă lungimile optice elementare $n_1 \cdot \delta r_1$ și $n_2 \cdot \delta r_2$ ale obiectului și imaginii sale stigmatice de orientarea acestora în punctele conjugate corespunzătoare P_1, P_2 față de orice rază de lumină P_1PP_2 care trece prin aceste puncte.

Teorema fundamentală de stigmatism (1.92) mai poate fi demonstrată considerând razele Q_1QQ_2 ca variații ale razelor P_1PP_2 (fig.1.19), astfel că ecuația (1.90) se scrie

$$\delta[P_1P_2] = \delta \int_{P_1}^{P_2} n ds = \int_{P_1}^{P_2} (\delta n) ds + \int_{P_1}^{P_2} n \delta(ds) = \text{constant}. \quad (1.93)$$

Dezvoltând calculul variațional ca și pentru ecuația (1.28), finalmente obținem

$$n_2\vec{\tau}_2 \cdot \delta\vec{r}_2 - n_1\vec{\tau}_1 \cdot \delta\vec{r}_1 + \int_{P_1}^{P_2} \left[\nabla n - \frac{d}{ds}(n\vec{\tau}) \right] \cdot \delta\vec{r}(s) ds = \text{constant}, \quad (1.94)$$

unde integrala se anulează în virtutea ecuației (1.13) a razei.

Majoritatea instrumentelor optice de format imagini au simetrie de rotație. Din acest motiv, în continuare vom analiza condiția de stigmatism în vecinătatea unei perechi oarecare de puncte conjugate P_1, P_2 situate pe axul optic Oz al unui sistem de revoluție.

Să considerăm mai întâi condiția de stigmatism transversal (aplanetism) pentru mici obiecte și imagini plane și perpendiculare pe axul optic (fig.1.20,a). Această condiție este cel mai frecvent impusă instrumentelor optice și, în mod

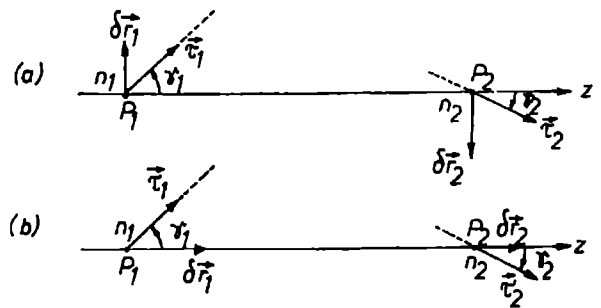


Fig.1.20. Pentru deducerea condiției de stigmatism transversal (a) și longitudinal (b).

special, obiectivelor de microscop și aparatelor de proiecție. În acest caz, condiția generală (1.92) capătă forma particulară

$$n_2 \delta r_2 \sin \gamma_2 - n_1 \delta r_1 \sin \gamma_1 = \text{constant.} \quad (1.95)$$

Pentru determinarea constantei vom folosi raza de lumină care se propagă în lungul axului optic ($\gamma_1 = \gamma_2 = 0$), astfel că finalmente obținem *condiția de stigmatism transversal (de aplanetism)*, denumită și *condiția de sinus a lui Abbe*

$$n_1 \delta r_1 \sin \gamma_1 = n_2 \delta r_2 \sin \gamma_2. \quad (1.96)$$

Această ecuație trebuie satisfăcută pentru orice rază $P_1 P P_2$ care trece prin punctele conjugate P_1, P_2 , adică pentru orice pereche de unghiuri γ_1, γ_2 . Pentru raze paraxiale, adică raze cu înclinare γ mică față de axul optic astfel că $\sin \gamma \approx \gamma$, condiția (1.96) se reduce la *teorema Lagrange-Helmholtz*

$$n_1 \delta r_1 \gamma_1 = n_2 \delta r_2 \gamma_2. \quad (1.97)$$

O cerință importantă impusă sistemelor optice este aceea ca imaginea să fie asemănătoare cu obiectul (*proprietatea de ortoscopie*). În aceste condiții, *mărirea liniară transversală* $m_t = \delta r_2 / \delta r_1$ a sistemului trebuie să fie constantă și condiția de sinus a lui Abbe se scrie

$$\frac{\sin \gamma_1}{\sin \gamma_2} = m_t \frac{n_2}{n_1} = \text{constant} . \quad (1.98)$$

Să considerăm în continuare condiția de stigmatism axial pentru mici obiecte și imagini liniare așezate de-a lungul axului optic (fig.1.20,b). Această condiție este importantă pentru construcția instrumentelor destinate să formeze imagini în profunzime sau să vizeze un punct mobil pe axul optic. În acest caz, condiția generală (1.92) devine

$$n_2 \delta r_2 \cos \gamma_2 - n_1 \delta r_1 \cos \gamma_1 = \text{constant} , \quad (1.99)$$

sau, determinând constanta cu ajutorul razei axiale ($\gamma_1 = \gamma_2 = 0$),

$$n_1 \delta r_1 (1 - \cos \gamma_1) = n_2 \delta r_2 (1 - \cos \gamma_2). \quad (1.100)$$

Am obținut astfel *condiția de stigmatism axial* sau *condiția de sinus a lui Herschel*

$$n_1 \delta r_1 \sin^2(\gamma_1/2) = n_2 \delta r_2 \sin^2(\gamma_2/2). \quad (1.101)$$

Această ecuație trebuie satisfăcută pentru orice rază $P_1 P P_2$, adică pentru orice pereche de unghiuri γ_1, γ_2 . Considerând *mărirea liniară axială* $m_a = \delta r_2 / \delta r_1$ a sistemului constantă, condiția de sinus a lui Herschel se scrie

$$\frac{\sin^2(\gamma_1/2)}{\sin^2(\gamma_2/2)} = m_a \cdot \frac{n_2}{n_1} = \text{constant} . \quad (1.102)$$

Din nefericire, condițiile Abbe, ecuația (1.98), și Herschel, ecuația (1.102), nu sunt compatibile pentru înclinări mari decât în cazul particular $|\gamma_1| = |\gamma_2|$, în care $|m_t| = |m_a| = n_1/n_2$. În concluzie, cu excepția menționată, este imposibil de realizat un instrument optic axial care să formeze cu fascicule de lumină cu deschidere mare imaginea stigmatică a unui element de volum situat pe axul optic. Din acest motiv, în realizarea practică a instrumentelor optice, se satisface acea condiție care este cea mai conformă cu destinația.

În general, cele două condiții de stigmatism (1.98) și (1.102), pot fi simultan satisfăcute numai dacă imaginea este formată cu ajutorul razelor paraxiale ($\sin \gamma \approx \gamma$), astfel că

$$\frac{\sin \gamma_2}{\sin \gamma_1} \approx \frac{\sin(\gamma_2/2)}{\sin(\gamma_1/2)} \approx \frac{\gamma_2}{\gamma_1} = m_u , \quad (1.103)$$

unde $m_u = \gamma_2/\gamma_1$ reprezintă *mărirea unghiulară*. Pentru raze paraxiale există relații simple între mărirea unghiulară și măririle liniare. Astfel, condițiile lui Abbe și Herschel devin

$$m_t m_u = n_1/n_2, \quad m_a m_u^2 = n_1/n_2, \quad (1.104)$$

și relația dintre cele trei mărimi se scrie sub forma

$$m_a m_u = m_t. \quad (1.105)$$

În încheiere, vom deduce o relație fundamentală între strălucirea unui mic obiect plan, transversal, de arie dS_1 , și aceea a imaginii sale aplanetice, de arie dS_2 (fig.1.21). Conform condiției de sinus a lui Abbe, ecuația (1.96), avem

$$n_1^2 dS_1 \sin^2 \gamma_1 = n_2^2 dS_2 \sin^2 \gamma_2. \quad (1.106)$$

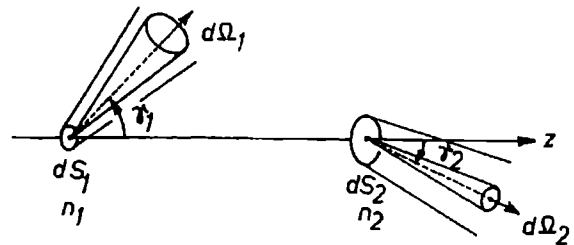


Fig.1.21. Pentru deducerea legăturii dintre strălucirea imaginii și strălucirea obiectului.

Strălucirea energetică a surselor de lumină spațial extinse, într-o direcție oarecare γ față de normala la suprafața lor, este caracterizată de *radianța (strălucirea, luminanța) $L(\gamma)$* , definită ca fluxul de energie emis în unitatea de unghi solid de unitatea de suprafață aparentă, adică

$$L(\gamma) = \frac{dF}{d\Omega dS \cos \gamma}. \quad (1.107)$$

În sistemul internațional strălucirea se măsoară deci în $\text{Watt/steradian.m}^2$. Sursele

care ascultă de *legea lui Lambert* emit lumină complet "randomizată" astfel că radianța lor nu depinde de γ (sursele corp negru sau sursele perfect difuzante). Pentru generalitate, vom păstra această dependență și vom folosi relația fluxurilor conjugate în forma

$$dF_2(\gamma_2) = T(\gamma_1)dF_1(\gamma_1), \quad (1.108)$$

unde factorul de transmisie $T(\leq 1)$ este determinat de pierderile de energie în sistem cauzate de reflexie, absorbție și difuzia luminii. Introducând radianța, ecuația (1.107), și considerând $d\Omega = 2\pi \sin\gamma d\gamma$, relația (1.108) se mai scrie sub forma

$$T(\gamma_1)L_1(\gamma_1)dS_1 \sin\gamma_1 \cos\gamma_1 d\gamma_1 = L_2(\gamma_2)dS_2 \sin\gamma_2 \cos\gamma_2 d\gamma_2. \quad (1.109)$$

Pe de altă parte, diferențiind ecuația (1.106) avem

$$n_1^2 dS_1 \sin\gamma_1 \cos\gamma_1 d\gamma_1 = n_2^2 dS_2 \sin\gamma_2 \cos\gamma_2 d\gamma_2. \quad (1.110)$$

Finalmente, din ecuațiile (1.109), (1.110), rezultă *teorema lui Clausius*

$$T(\gamma_1) \frac{L_1(\gamma_1)}{n_1^2} = \frac{L_2(\gamma_2)}{n_2^2}, \quad (1.111)$$

sau, folosind expresia radianței, ecuația (1.107), și egalitatea (1.108),

$$n_1^2 d\Omega_1 dS_1 \cos\gamma_1 = n_2^2 d\Omega_2 dS_2 \cos\gamma_2. \quad (1.112)$$

Mărimea $n^2 d\Omega dS \cos\gamma$ poartă numele de *extinderea fasciculului*. Teorema lui Clausius în forma (1.112) afirmă, deci, că *extinderea fasciculului se conservă*. Cu alte cuvinte, cu cât unghiul solid $d\Omega$ este mai mare, cu atât suprafața aparentă $dS \cos\gamma$ este mai mică (vezi fig.1.21). Această lege de conservare are numeroase consecințe practice în fotometrie. Astfel, de exemplu, în cele mai bune condiții ($T = 1$), din ecuația (1.111) avem $L_1/n_1^2 = L_2/n_2^2$. În particular, presupunând $n_1 = n_2$, rezultă că radianța se conservă, $L_1 = L_2$. În aceste condiții, nici cea mai bună focalizare nu poate crește strălucirea imaginii mai mult decât este strălucirea obiectului. Cu alte cuvinte, sistemul optic nu permite trecerea energiei de la o temperatură aparentă T_1 la o temperatură aparentă $T_2 > T_1$.

§. 1. 2. Sisteme optice centrate

Cele mai importante instrumente optice de format imagini, ca și părțile lor constitutive (lentile, oglinzi), sunt *sisteme optice centrate*. Acestea reprezintă o succesiune de medii optice omogene, izotrope și transparente, limitate de suprafețe sferice cu vârful și centrul de curbură pe aceeași dreaptă. Aceasta este axa de simetrie a sistemului și poartă numele de *ax optic principal*. În practică, sistemele optice centrate conțin un număr mare de dioptri, pentru a compensa parțial atât aberațiile cromatice (vezi secțiunea 1.2.7) cât și

aberațiile geometrice care apar în domeniul extraparaxial (vezi secțiunea 1.2.8). Proiectarea acestor sisteme se bazează pe trasarea razelor de lumină ("ray tracing") folosind în mod repetat legile de refracție sau reflexie la fiecare suprafață de separare și propagarea rectilinie în medii omogene între aceste suprafețe. Acest program, simplu în principiu, devine o sarcină formidabilă dacă este nevoie de foarte mare precizie. De aceea, proiectarea sistemelor optice, de la simpla trasare a razelor și până la corectarea aberațiilor supărătoare pentru aplicația dorită, se face astăzi cu ajutorul calculatoarelor de mare viteză. În funcție de performanțele cerute prin instrucțiuni, calculatorul poate selecta numărul de dioptri, curburile, indicii de refracție (tipurile de sticlă optică), grosimile, aperturile și, nu în ultimul rând, greutatea sistemului sau prețul de cost al produsului.

1.2.1. Dioptrul sferic

Suprafața cea mai ușor de confecționat cu mare precizie pentru realizarea lentilelor și oglinzilor este suprafața sferică. De aceea, în continuare, vom analiza condițiile în care este posibilă formarea imaginilor optice cu ajutorul unui *dioptru sferic* adică al unui ansamblu de două medii omogene, izotrope și transparente, separate de o suprafață sferică. În mod similar, se tratează și oglinda sferică.*

Pentru simplitate, vom studia mersul razelor de lumină dintr-un plan meridional yOz *convenind să orientăm axul optic Oz în sensul general de propagare a razelor incidente, ales de la stânga spre dreapta*. Astfel, să considerăm un fascicul subțire de raze, mărginit de razele înfinit vecine P_1PP_2'' și P_1QP_2''' care pleacă din punctul obiect P_1 situat pe axul optic; razele refractate corespunzătoare se intersectează între ele în punctul extraaxial P_2' și cu axul optic în punctele P_2'' și P_2''' (vezi fig.1.22).

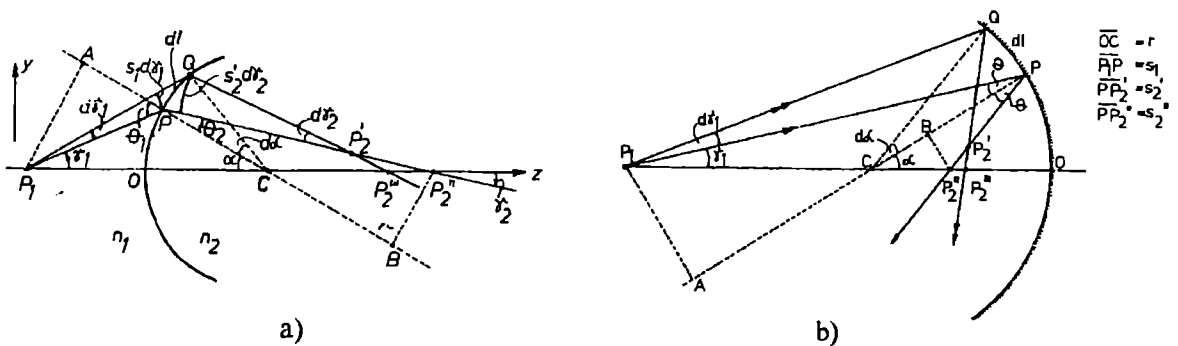


Fig.1.22. Formarea imaginilor în dioptrul sferic (a) și în oglinda sferică (b).

În continuare, vom nota raza dioptrului $OC = r$ și abscisele oblice $P_1P = s_1$, $PP_2' = s_2'$, $PP_2'' = s_2''$. Prin derivarea legii de refracție $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$ în raport cu arcul de cerc $\widehat{OP} = \ell$ avem

$$n_1 \cos \theta_1 \frac{d\theta_1}{d\ell} = n_2 \cos \theta_2 \frac{d\theta_2}{d\ell} \quad (1.113)$$

* *Dioptrica* (grec. $\delta\iota\alpha$ = prin) reprezintă optica sistemelor refringente iar *catoptrica* (grec. $\kappa\alpha\tau\alpha$ = pe), reprezintă optica sistemelor reflectante.

sau, ținând cont că $\theta_1 = \alpha + \gamma_1$ și $\theta_2 = \alpha - \gamma_2$,

$$n_1 \cos \theta_1 \left(\frac{d\alpha}{d\ell} + \frac{d\gamma_1}{d\ell} \right) = n_2 \cos \theta_2 \left(\frac{d\alpha}{d\ell} - \frac{d\gamma_2}{d\ell} \right). \quad (1.114)$$

Mărimile $d\alpha/d\ell$, $d\gamma_1/d\ell$, $d\gamma_2/d\ell$ din ultima ecuație vor fi înlocuite cu expresiile lor care rezultă din relațiile $d\ell = r d\alpha$, $s_1 d\gamma_1 = d\ell \cos \theta_1$, $s_2 d\gamma_2 = d\ell \cos \theta_2$, astfel că, finalmente, obținem *prima ecuație a lui Young*

$$\frac{n_1 \cos^2 \theta_1}{s_1} + \frac{n_2 \cos^2 \theta_2}{s_2} = \frac{n_2 \cos \theta_2 - n_1 \cos \theta_1}{r}, \quad (1.115)$$

care determină abscisa oblică s_2 .

Să considerăm în continuare, triunghiurile asemenea P_1AC și $P_2''BC$, obținute prin coborârea perpendicularelor din punctele P_1 și P_2'' pe dreapta CP . Avem $AC/BC = P_1A/P_2''B$ sau

$$\frac{s_1 \cos \theta_1 + r}{s_2 \cos \theta_2 - r} = \frac{s_1 \sin \theta_1}{s_2 \sin \theta_2} \equiv \frac{s_1 n_2}{s_2 n_1}, \quad (1.116)$$

de unde rezultă *a doua ecuație a lui Young*

$$\frac{n_1}{s_1} + \frac{n_2}{s_2} = \frac{n_2 \cos \theta_2 - n_1 \cos \theta_1}{r}, \quad (1.117)$$

care determină abscisa oblică s_2 .

O analiză similară cu cea efectuată mai sus pentru dioptrul sferic conduce la *ecuațiile lui Young pentru oglinda sferică* (vezi fig.1.22,b)

$$-\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} = \frac{2}{r \cos \theta_1}, \quad (1.118)$$

$$-\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} = \frac{2 \cos \theta_1}{r}. \quad (1.119)$$

Observăm că specializarea formulelor dioptrului sferic (1.115), (1.117) pentru reflexie se face prin simpla înlocuire formală $\theta_2 = \theta_1$ și $n_2 = -n_1$.

Ecuațiile lui Young au fost deduse pentru cazul particular în care punctul obiect P_1 este situat în stânga suprafeței dioptrului (oglinzii) iar punctele P_2 și centrul de curbură C în dreapta, conform fig.1.22.a. În continuare, este convenabil să adoptăm o *regulă a semnului segmentelor* care să permită exprimarea tuturor cazurilor posibile prin aceleași

ecuații. Din analiza diverselor cazuri particulare, ne putem convinge că o astfel de regulă există și anume să acordăm semnul absciselor punctelor P_1, P_2, C astfel că $s_1 > 0, s_2 < 0, r < 0$ dacă punctele se găsesc în stânga suprafeței dioptrului (oglinzii), și de semn opus dacă se găsesc în dreapta acesteia. Cu această convenție, în cazul dioptrului, punctele P_1, P_2 sunt *reale* dacă $s_1, s_2 > 0$ și *virtuale* dacă $s_1, s_2 < 0$, iar în cazul oglinzii sunt *reale* dacă $s_1 > 0, s_2 < 0$ și *virtuale* dacă $s_1 < 0, s_2 > 0$.

Diferența $\delta = s_2'' - s_2'$, care caracterizează abaterea de la stigmatism, poartă numele de *distanță de astigmatism*. În general, dioptrul sferic și oglinda sferică nu sunt riguros stigmatice, adică $\delta \neq 0 (s_2' \neq s_2'')$. Există totuși cazuri excepționale de *stigmatism riguros* cum sunt, de exemplu, *punctele lui Weierstrass (punctele lui Young)*. Astfel, din ecuațiile (1.115), (1.117) și condiția de stigmatism $s_2' = s_2'' = s_2$, rezultă

$$s_1 = \left(1 - \frac{n_2^2}{n_1^2} \right) \frac{n_1 r}{n_2 \cos \theta_2 - n_1 \cos \theta_1}, \quad (1.120)$$

$$s_2 = \left(1 - \frac{n_1^2}{n_2^2} \right) \frac{n_2 r}{n_2 \cos \theta_2 - n_1 \cos \theta_1}. \quad (1.121)$$

În acest caz, punctele P_2', P_2'', P_2''' coincid cu același punct P_2 situat pe axul optic. Pentru raza axială ($\theta_1 = \theta_2 = 0$) abscisele oblice devin obișnuite $s_1 = P_1 O = p_1, s_2 = O P_2 = p_2$, unde

$$\begin{cases} p_1 = -\left(1 + \frac{n_2}{n_1} \right) r, \\ p_2 = \left(1 + \frac{n_1}{n_2} \right) r, \end{cases} \quad (1.122)$$

stabilesc poziția *punctelor conjugate ale lui Weierstrass*. În fig.1.23 este ilustrat cazul $n_1 = 2, n_2 = 1$, deci $p_1 = -3r/2, p_2 = 3r$, unde $r < 0$. Din ecuația (1.122) rezultă că $r > 0$ implică $p_1 < 0, p_2 > 0$ iar $r < 0$ implică $p_1 > 0, p_2 < 0$, adică *punctele lui Weierstrass sunt de aceeași parte cu centrul de curbură C*.

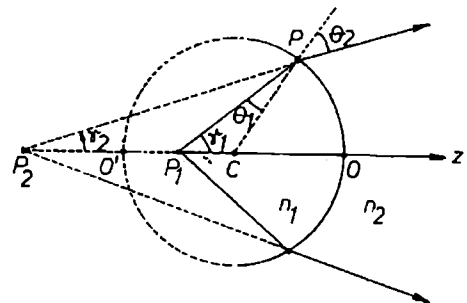


Fig.1.23. Punctele conjugate (Weierstrass, Young) ale dioptrului sferic.

Expresiile (1.122) se mai scriu $CP_1 = (n_2/n_1)r, CP_2 = (n_1/n_2)r$, de unde rezultă $CP_1 \cdot CP_2 = r^2$, adică punctele P_1, P_2 sunt conjugate armonice cu punctele O, O' de intersecție a suprafeței dioptrului cu axul optic. Mai putem scrie $CP_1/CP = CP/CP_2$, adică triunghiurile CP_1P și CPP_2 sunt asemenea, $\gamma_1 = \theta_2$ și $\gamma_2 = \theta_1$, deci

$$\frac{\sin \gamma_1}{\sin \gamma_2} = \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} = \frac{n_1}{n_2} = \text{constant}.$$

Am demonstrat astfel că punctele lui Weierstrass verifică condiția de sinus a lui Abbe (ecuația (1.98))

$$\frac{\sin \gamma_1}{\sin \gamma_2} = m_t \frac{n_2}{n_1} = \text{constant},$$

cu mărirea liniară transversală $m_t = (n_1/n_2)^2$.

Proprietatea de aplanetism a punctelor lui Weierstrass este folosită în construcția obiectivelor de microscop de mare *apertură numerică* $n_1 \sin \gamma_1$. În acest scop, de la fiecare punct P_1 al obiectului, trebuie colectat un con de lumină cât mai larg, cum este ilustrat în fig.1.24,a,b. Astfel, fig.1.24.a, prezintă *metoda lui Amici* cu lentile convexe-concave în care punctul obiect P_1 este situat în centrul dioptrului

sferic $1'$ și, totodată, în primul punct Weierstrass al dioptrului 1. Al doilea punct Weierstrass P_2 al dioptrului 1 reprezintă astfel imaginea aplanetică a punctului obiect P_1 în prima lentilă ($1, 1'$). În mod similar, punctul P_3 reprezintă imaginea aplanetică a punctului P_2 în a doua lentilă ($2, 2'$). În acest fel, respectând condiția de aplanetism riguros, fasciculul larg de lumină cu vârful în punctul obiect P_1 , cu o apertură care se poate apropia de valoarea teoretică $2\gamma_1 = \pi$, este transformat într-un fascicul de raze paraxiale cu vârful în P_3 . Obiectivul se termină, de regulă, cu un sistem acromat (A) pentru corectarea aberațiilor cromatice (vezi secțiunea

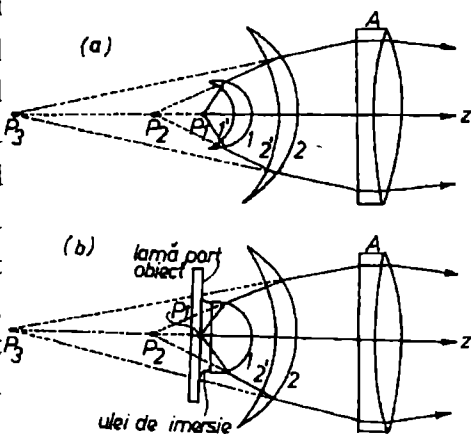


Fig.1.24. Obiective de microscop cu apertură numerică mare: a) de tip Amici, b) cu imersie.

1.2.7). Creșterea mai departe a aperturii numerice $n_1 \sin \gamma_1$ se realizează prin introducerea între obiectul de investigat și lentila frontală a unui lichid de imersie cu indice de refracție n_1 mare, de obicei ulei de cedru ($n = 1,515$), care are practic același indice de refracție cu cel al sticlei. Se reduc astfel și pierderile prin reflexie la prima suprafață a lentilei frontale. Fig.1.24.b ilustrează un astfel de *obiectiv cu imersie*. În acest caz, primul dioptru $1'$ nu mai are nici un rol, astfel că lentila frontală poate fi o lentilă plan-convexă. Am insistat asupra acestor probleme deoarece ele au reprezentat un moment important în dezvoltarea instrumentelor optice de format iangini. Cum vom vedea în Cap. II, dedicat difracției luminii, distanța minimă $(\delta r_1)_{\min}$ dintre două puncte ale obiectului care mai poate fi rezolvată este limitată de fenomenul de difracție, fiind dată de *formula lui Abbe*

$$(\delta r_1)_{\min} = \frac{0,61\lambda_1}{\sin \gamma_1} = \frac{0,61\lambda_0}{n_1 \sin \gamma_1}. \quad (1.123)$$

De aici rezultă că *puterea de rezoluție spațială a obiectivelor de microscop*, definită ca $1/(\delta r_1)_{\min}$, poate fi crescută prin folosirea unei radiații de lungime de undă cât mai mică și realizarea unei aperturi numerice $n_1 \sin \gamma_1$ cât mai mari.

Mai sus am considerat cazul excepțional de stigmatism riguros cu fascicule largi, al punctelor lui Weierstrass. Pentru raze paraxiale ($\sin \gamma \approx \gamma$), cum am arătat în paragraful anterior (secțiunea 1.1.3), condițiile Abbe și Herschel pot fi întotdeauna aproximativ

satisfăcute, permițând astfel realizarea unui *stigmatism aproximativ* pentru toate punctele de pe axul optic și din vecinătatea acestuia. În particular, pentru dioptrul sferic în aproximația paraxială* avem $s_1 \approx p_1$, $s_2' \approx s_2'' \approx p_2$, $\cos\theta \approx 1$, astfel că ecuațiile lui Young (1.115), (1.117) conduc la o ecuație unică

$$\frac{n_1}{p_1} + \frac{n_2}{p_2} = \frac{n_2 - n_1}{r}, \quad (1.124)$$

care reprezintă *relația punctelor conjugate*. Membrul drept al acestei ecuații depinde numai de parametrii sistemului (n_1, n_2, r). Pentru oglinzi sferice ($n_2 = -n_1$) relația (1.124) devine

$$-\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{2}{r}. \quad (1.125)$$

Relația punctelor conjugate (1.124) permite să stabilim, pentru orice dioptru sferic sau oglindă sferică ($n_2 = -n_1$), cu suprafață convexă ($r > 0$), concavă ($r < 0$) sau plană ($r \rightarrow \infty$), atât pozițiile p_1, p_2 ale punctelor conjugate față de vârful O al suprafeței, cât și caracterul real sau virtual al acestor puncte, folosind regula semnului segmentelor convenită mai sus.

Dacă în relația punctelor conjugate (1.124) $p_2 \rightarrow \infty$, atunci $p_1 \rightarrow f_1$, iar dacă $p_1 \rightarrow \infty$, atunci $p_2 \rightarrow f_2$, unde

$$f_1 = \frac{n_1 r}{n_2 - n_1}, \quad f_2 = \frac{n_2 r}{n_2 - n_1} \quad (1.126)$$

poartă numele de *distanțe focale* (obiect, respectiv imagine). Avem, evident, relațiile

$$f_2 - f_1 = r, \quad f_1/f_2 = n_1/n_2. \quad (1.127)$$

Distanțele focale determină pe axul optic *punctele focale* sau *focarele* corespunzătoare F_1, F_2 . Acestea sunt *reale* dacă $f > 0$ sau *virtuale* dacă $f < 0$.

Inversele distanțelor focale, adică $C_1 = 1/f_1$, $C_2 = 1/f_2$, poartă numele de *convergențe*. Dioptrul este convergent sau divergent după cum convergența sa este pozitivă sau negativă. Unitatea obișnuită de măsură a convergenței este *dioptria* (m^{-1}).

O formă echivalentă a relației punctelor conjugate (1.124) se obține prin împărțire cu $(n_2 - n_1)/r$ și introducerea distanțelor focale (1.126), adică

$$\frac{f_1}{p_1} + \frac{f_2}{p_2} = 1, \quad (1.128)$$

ecuație cunoscută sub numele de *formula Huygens-Gauss*.

* Mai exact, *aproximația paraxială*, de ordinul întâi sau gaussiană (după numele lui Gauss, care a folosit-o sistematic prima dată în *Dioptrische Untersuchungen*, (1843)) este valabilă atunci când razele fasciculului de lumină și normalele la suprafețele refringente fac unghiuri x mici (dar altfel arbitrare) cu axul optic astfel că $\sin x \approx \tan x \approx x$ și $\cos x \approx 1$, ceea ce practic înseamnă că $x \leq 0,1$ radiani $\approx 6^\circ$.

În fine, o altă formă a relației punctelor conjugate rezultă dacă determinăm pozițiile punctelor conjugate P_1, P_2 prin segmentele ζ_1, ζ_2 față de punctul focal corespunzător. Astfel, efectuând transformarea de coordonate (vezi fig.1.25)

$$\begin{cases} p_1 = \zeta_1 + f_1, \\ p_2 = \zeta_2 + f_2, \end{cases} \quad (1.129)$$

din formula lui Huygens-Gauss (1.128) rezultă imediat relația simplă și simetrică

$$\zeta_1 \zeta_2 = f_1 f_2, \quad (1.130)$$

ecuație care poartă numele de *formula lui Newton*.

Ecuatiile deduse mai sus rămân valabile și pentru oglinda sferică ($n_2 = -n_1$), deci cu distanțele focale

$$f_2 = -f_1 = \frac{r}{2}. \quad (1.131)$$

În acest caz, focarele F_1, F_2 sunt de aceeași parte a suprafeței oglinzii și coincid într-un punct focal comun, situat la jumătatea distanței dintre vârful oglinzii și centrul de curbură. Acest focar unic este real pentru oglinzi concave și virtual pentru oglinzi convexe.

Până acum am considerat relația punctelor conjugate P_1, P_2 situate pe axul optic principal (care trece prin centrul de curbură C și prin vârful O al calotei sferice). Evident, această relație rămâne valabilă și pentru punctele conjugate Q_1, Q_2 situate pe oricare alt ax secundar (care trece prin C dar nu și prin O), cum se arată în fig.1.25. Din acest motiv, imaginea unui arc de cerc sau calote sferice $\widehat{P_1Q_1}$ este un alt arc sau calotă $\widehat{P_2Q_2}$, ambele având centrul în C . În aproximația paraxială însă, considerăm numai punctele obiect și imagine din vecinătatea axului optic principal astfel că arcele și calotele \widehat{PQ} se confundă cu micile obiecte sau imagini transversale δr , tangente în punctul P corespunzător.

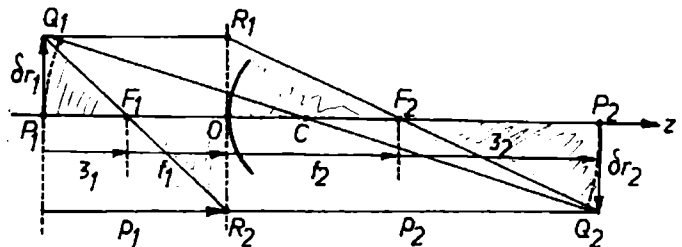


Fig.1.25. Construirea imaginii unui obiect în dioptrul sferic.

Construcția grafică a imaginilor se realizează în modul cel mai convenabil cu ajutorul unor raze de construcție (*raze principale*) care trec prin focare și prin centrul de curbură (fig.1.25). Această construcție este consistentă cu relația punctelor conjugate. Astfel, din asemănarea triunghiurilor $P_1Q_1F_1$ și OR_2F_1 sau $P_2Q_2F_2$ și OR_1F_2 rezultă

$$m_t = \frac{\text{def } \delta r_2}{\delta r_1} = -\frac{f_1}{\zeta_1} = -\frac{\zeta_2}{f_2}, \quad (1.132)$$

unde ultima egalitate confirmă relația $\zeta_1 \zeta_2 = f_1 f_2$, adică ecuația (1.130). O altă expresie pentru *mărirea liniară transversală* rezultă din asemănarea triunghiurilor P_1Q_1C și

$P_2 Q_2 C$, de unde obținem $\delta r_2 / \delta r_1 = -(p_2 - r) / (p_1 + r)$ sau, eliminând r cu ajutorul ecuației (1.124)

$$m_t \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\delta r_2}{\delta r_1} = -\frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{p_2}{p_1}. \quad (1.133)$$

Remarcăm că mărirea transversală m_t poate fi foarte mare dacă p_2 este foarte mare, adică dacă P_1 este în apropierea focarului F_1 .

Relația punctelor conjugate (1.124) și expresia (1.133) permit să determinăm poziția și mărirea imaginii $p_2, \delta r_2$, în funcție de poziția și mărirea obiectului, $p_1, \delta r_1$, și anume

$$\begin{cases} p_2 = \frac{n_2 r p_1}{p_1 (n_2 - n_1) - r n_1}, \\ \delta r_2 = \frac{n_1 r \delta r_1}{p_1 (n_2 - n_1) - r n_1}. \end{cases} \quad (1.134)$$

Aplicarea succesivă a acestor formule pentru fiecare dioptru în parte reprezintă o procedură directă pentru construcția imaginilor în sistemele optice centrate în aproximația paraxială. Astfel, imaginea formată de prima suprafață reprezintă un obiect în raport cu a doua suprafață, imaginea formată de a doua suprafață reprezintă un obiect în raport cu a treia suprafață ș.a.m.d.

Mărirea liniară axială rezultă din diferențierea relației punctelor conjugate (1.124), adică

$$m_a \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{dp_2}{dp_1} = \frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{p_2^2}{p_1^2}. \quad (1.135)$$

În fine, considerând o rază paraxială oarecare $P_1 P P_2$ între două puncte conjugate situate pe axul optic principal (vezi fig.1.22), avem $\widehat{OP} = p_1 \gamma_1 = -p_2 \gamma_2$, de unde rezultă *mărirea unghiulară*

$$m_u \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\gamma_2}{\gamma_1} = -\frac{p_1}{p_2}. \quad (1.136)$$

Înmulțind această expresie cu ecuația (1.133) avem confirmarea relației generale $m_t m_u = n_1 / n_2$, ecuația (1.104), respectiv a teoremei Lagrange-Helmholtz $n_1 \delta r_1 \gamma_1 = n_2 \delta r_2 \gamma_2$, ecuația (1.97). De altfel, cele trei mărimi ale dioptrului sferic verifică și celelalte relații generale, $m_a m_u^2 = n_1 / n_2$ și $m_a m_u = m_t$, valabile pentru orice sistem axial în aproximația paraxială (vezi § 1.3)

1. 2. 2. Matricea de transfer

În continuare, vom dezvolta analiza paraxială a sistemelor optice centrate. Acest studiu are o importanță practică deosebită deoarece imaginile realizate cu raze paraxiale nu prezintă aberații de natură geometrică iar formulele deduse în această aproximație sunt

suficient de precise pentru numeroase aplicații. Pe de altă parte, acestea constituie baza de pornire pentru calcule mai exacte, deviațiile de la formulele analizei paraxiale reprezentând o măsură convenabilă pentru aprecierea calității instrumentelor optice reale.

Cum am arătat mai sus, o metodă directă de analiză paraxială a sistemelor optice centrate constă în aplicarea succesivă a relațiilor (1.134) pentru fiecare dioptru în parte. Alternativ, datorită modului repetitiv în care apar aceleași tipuri de relații liniare care descriu propagarea rectilinie și refracția (sau reflexia), *orice sistem optic poate fi asociat cu o matrice de transfer* care se calculează ca simplul produs al matricelor fundamentale de translație și refracție (sau reflexie). Metoda matriceală reprezintă un puternic instrument pentru calculul și proiectarea sistemelor optice și, cum vom arăta mai departe, permite demonstrarea unor teoreme importante ale opticii geometrice paraxiale.

Pentru conveniență, în continuare vom considera razele paraxiale meridionale din planul yOz cu axele carteziene orientate conform cu regula semnului segmentelor stabilită la studiul dioptrului sferic (vezi secțiunea 1.2.1). Astfel, vom păstra convenția axei Oz situată pe axul optic principal și orientată în sensul general de propagare a razelor incidente, considerat de la stânga spre dreapta iar axa Oy orientată de jos în sus. Vom conveni de asemenea să măsurăm înclinarea γ a razelor de lumină în radiani față de sensul axei Oz și să-i acordăm semnul conform sensului trigonometric.

În continuare este convenabil să definim *starea razei de lumină*, în orice punct al ei, prin matricea coloană 2×1 sau *vectorul de stare*

$$V = \begin{bmatrix} y \\ \Gamma \end{bmatrix}, \quad (1.137)$$

unde y este *distanța la axul optic* iar $\Gamma = n\gamma$ este *înclinarea redusă*.

Propagarea rectilinie sau translația între planele $z = z_1$ și $z = z_2$ este descrisă de ecuațiile (vezi fig.1.26)

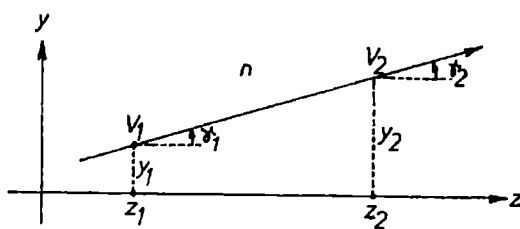


Fig.1.26. Descrierea matriceală a propagării rectilinii.

$$\begin{cases} y_2 = y_1 + (z_2 - z_1) \text{tg} \gamma_1, \\ \Gamma_2 = \Gamma_1. \end{cases} \quad (1.138)$$

Introducând *translația* $t = z_2 - z_1$, *translația redusă* t/n , *înclinările reduse* $\Gamma_1 = n\gamma_1$, $\Gamma_2 = n\gamma_2$ și ținând cont de aproximația paraxială $\text{tg} \gamma \approx \gamma$, transformările de translație (1.138) se pot scrie

$$\begin{cases} y_2 = 1 \cdot y_1 + (t/n) \Gamma_1 \\ \Gamma_2 = 0 \cdot y_1 + 1 \cdot \Gamma_1 \end{cases}, \quad (1.139)$$

sau, pe scurt, $V_2 = TV_1$, unde matricea pătratică 2×2

$$T = \begin{bmatrix} 1 & t/n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.140)$$

este *matricea de translație*. Această matrice conține toată informația cu privire la sistemul parcurs de rază, adică mediul optic de grosime t și indice de refracție n . Dacă translația este nulă ($t = 0$), matricea de translație devine matricea unitate astfel că $y_2 = y_1$, $\Gamma_1 = \Gamma_2$. Remarcăm că matricea de translație este de modul unitate, adică $\det T = 1$.

Să determinăm în continuare operatorul matriceal care reprezintă refracția, adică relația liniară dintre vectorul de stare $V_2(y_2, n_2\gamma_2)$ la începutul razei refractate și vectorul de stare $V_1(y_1, n_1\gamma_1)$ la sfârșitul razei incidente. Prima relație este simplu

$$y_2 = y_1. \quad (1.141)$$

A doua relație liniară rezultă din legea de refracție în aproximația paraxială $n_1\theta_1 = n_2\theta_2$, adică $n_1(\alpha + \gamma_1) = n_2(\alpha + \gamma_2)$, sau

$$n_1\left(\frac{y_1}{r} + \gamma_1\right) = n_2\left(\frac{y_1}{r} + \gamma_2\right), \quad (1.142)$$

cum rezultă din fig.1.27. De aici obținem relația căutăată

$$n_2\gamma_2 = \frac{n_1 - n_2}{r}y_1 + n_1\gamma_1. \quad (1.143)$$

Remarcăm că această ecuație reprezintă de fapt relația punctelor conjugate a dioptrului sferic, adică ecuația (1.124), deoarece $\gamma_1 = y_1/p_1$ și $\gamma_2 = -y_1/p_2$. Transformările de refracție (1.141), (1.143) se pot scrie sub forma

$$\begin{cases} y_2 = 1 \cdot y_1 + 0 \cdot \Gamma_1 \\ \Gamma_2 = Q \cdot y_1 + 1 \cdot \Gamma_1 \end{cases}, \quad (1.144)$$

sau, pe scurt, $V_2 = RV_1$, unde matricea pătratică 2×2

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Q & 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \frac{n_1 - n_2}{r}, \quad (1.145)$$

este *matricea de refracție*. Mărima Q , care conține toată informația cu privire la dioptru, adică n_1, n_2, r , poartă numele de *putere de refracție*. Dacă $Q = 0$, adică dacă $n_1 = n_2$ sau $r \rightarrow \infty$, matricea de refracție devine matricea unitate astfel că $y_1 = y_2$, $\Gamma_1 = \Gamma_2$. Remarcăm că matricea de refracție este de modul unitate, adică $\det R = 1$. Relațiile dioptrului sferic sunt valabile și pentru oglinda sferică ($n_2 = -n_1$)

unde, de data aceasta, mărima $Q = 2n_1/r$ poartă numele de *putere de reflexie*.

Să considerăm în continuare cazul general al trecerii unei raze paraxiale printr-un sistem optic centrat format din m suprafețe sferice separate de $m - 1$ medii de refringentă

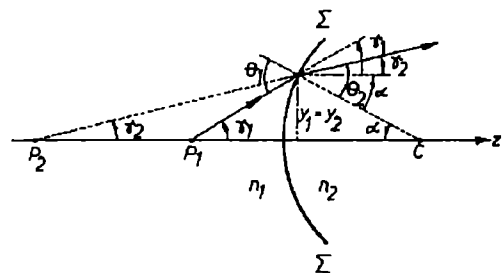


Fig.1.27. Descrierea matriceală a refracției în dioptru sferic.

diferită (fig.1.28). Un astfel de sistem dioptric axial este definit între planul de intrare, tangent la vârful primei suprafețe refringente Σ_1 și planul de ieșire, tangent la vârful ultimei suprafețe refringente Σ_m . Pe măsură ce raza de lumină progresa prin sistem, avem

$$\begin{aligned} V_1'' &= R_1 V_1', \\ V_2' &= T_1 V_1'' = T_1 R_1 V_1', \\ V_2'' &= R_2 V_2' = R_2 T_1 R_1 V_1', \\ &\dots\dots\dots \\ V_m'' &= R_m V_m' = R_m T_{m-1} R_{m-1} \dots R_2 T_1 R_1 V_1' . \end{aligned}$$

Ultima ecuație leagă vectorul de ieșire V_m'' de vectorul de intrare V_1' prin *ecuația de transfer*

$$V_m'' = S V_1', \quad (1.146)$$

unde

$$S = R_m T_{m-1} R_{m-1} \dots R_2 T_1 R_1 \quad (1.147)$$

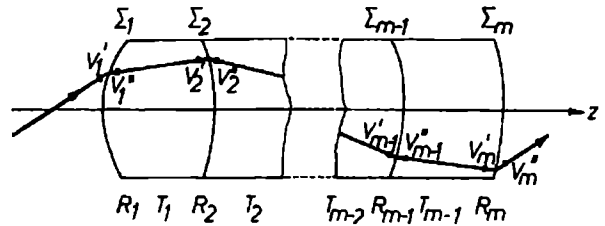


Fig.1.28. Trecerea unei raze paraxiale printr-un sistem optic centrat.

reprezintă *matricea de transfer a sistemului*, definit între vârfurile (planele)

sale de intrare și de ieșire. Remarcăm că matricea S asociată sistemului reprezintă produsul matricelor individuale de refracție și de translație efectuat *în ordine descrescătoare*, adică invers sensului în care lumina se propagă prin sistem. Întrucât matricele de refracție și de translație sunt matrice pătratice 2×2 și de modul unitate, rezultă că și matricea produs este de același tip, adică are forma

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}, \quad (1.148)$$

unde

$$\det S = S_{11} S_{22} - S_{12} S_{21} = 1. \quad (1.149)$$

Elementele matricei S conțin toată informația cu privire la parametrii sistemului optic și anume indicii de refracție, razele de curbură și grosimile dioptrilor componente. Datorită relației (1.149), rezultă că numai trei din cele patru elemente ale matricei S sunt independente iar acestea, cum vom arăta în secțiunile următoare, determină toate proprietățile sistemului ca instrument de format imagini. Proprietatea (1.149) permite o importantă verificare a corectitudinii calculelor, atât pe parcurs cât și în final. Astfel, pe măsură ce efectuăm produsul unui lung șir de matrice, este recomandabil să verificăm, din când în când, dacă determinantul matricei produs este egal cu unitatea. Dacă nu este, atunci înseamnă că s-a strecurat o eroare de calcul.

Datorită proprietății de asociativitate, în calculul practic al matricei S avem la dispoziție mai multe moduri de a efectua produsul de matrice. Cel mai convenabil este să le asociem inițial în perechi. Cum însă, în cazul general, avem secvențe alternative de produse RT, în efectuarea calculelor trebuie să respectăm ordinea descrescătoare deoarece, cum se poate verifica imediat, produsul RT nu este comutativ, adică $RT \neq TR$. Numai în cazurile

particulare de translații succesive prin straturi plan-paralele refringente sau de refracții succesive prin dioptri alipiți (lentile subțiri) produsele corespunzătoare sunt comutative și avem

$$S = \prod_{i=1}^m T_i = \begin{bmatrix} 1 & \sum_{i=1}^m t_i/n_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.150)$$

respectiv

$$S = \prod_{i=1}^m R_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sum_{i=1}^m Q_i & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.151)$$

Evident, schimbarea ordinii elementelor refringente componente afectează traiectoria razei în interiorul sistemului, dar nu și matricea S, astfel că relația dintre vectorul de ieșire și vectorul de intrare rămâne aceeași.

Pentru ilustrare, să calculăm matricea de transfer pentru o lentilă biconvexă de sticlă ($n_2 = 1,5$), cu razele de curbură $r_1 = +2$ cm și $r_2 = -1$ cm, de grosime $g = 0,5$ cm, imersată în aer ($n_1 = n_3 = 1$), fig.1.29,a. În acest caz

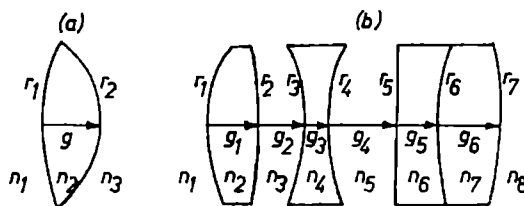


Fig.1.29. Pentru calcularea matricei de transfer a unei lentile (a) și a unui sistem Tessar (b).

$$S = R_2 T R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Q_2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & g/n_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Q_1 & 1 \end{bmatrix},$$

unde $Q_1 = (n_1 - n_2)/r_1$, $Q_2 = (n_2 - n_3)/r_2$. Introducând datele numerice și efectuând produsul matricelor obținem

$$S = \begin{bmatrix} 0,917 & 0,333 \\ -0,708 & 0,833 \end{bmatrix}. \quad (1.152)$$

Evident, avem $\det S = 1$.

În mod similar se procedează pentru sisteme optice, oricât de complexe. Să considerăm, de exemplu, un sistem Tessar (fig.1.29,b), ale cărui date sunt listate în tabelul următor:

Nr.	n	r (cm)	g (cm)
1	1	1,628	0,357
2	1,6116	-27,570	0,189
3	1	-3,457	0,081
4	1,6053	1,582	0,325
5	1	∞	0,217
6	1,5123	1,920	0,396
7	1,6116	-2,400	
8	1		

Acest sistem este corectat de aberații geometrice (astigmatism și curbura câmpului) și cromatice, multe din obiectivele fotografice moderne fiind variante ale acestuia. În acest caz, matricea S este dată de produsul a 13 matrice fundamentale și anume

$$S = R_7 T_6 R_6 T_5 R_5 T_4 R_4 T_3 R_3 T_2 R_2 T_1 R_1 .$$

Calculul concret, ușor de efectuat cu ajutorul unui program Fortran, conduce la rezultatul

$$S = \begin{bmatrix} 0,867 & 1,338 \\ -0,198 & 0,848 \end{bmatrix} . \quad (1.153)$$

Evident avem $\det S = 1$.

1. 2. 3. Elementele cardinale

Pentru analiza proprietăților de formare a imaginilor este convenabil să considerăm relația dintre doi vectori de stare ai razei, V_1 și V_2 , în plane de referință oarecare, $z = z_1$ și respectiv $z = z_2$, în general altele decât planele tangente în vârfurile de intrare și de ieșire ale sistemului optic (vezi fig.1.30). Ecuația de transfer (1.146) se generalizează imediat în forma

$$V_2 = M V_1 , \quad (1.154)$$

unde matricea de transfer între planele considerate este

$$M = T_2 S T_1 = \begin{bmatrix} 1 & t_2/n_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & t_1/n_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.155)$$

și are elemente

$$M_{11} = S_{11} + \frac{S_{21}}{n_2} t_2 , \quad (1.156)$$

$$M_{22} = S_{22} + \frac{S_{21}}{n_1} t_1 , \quad (1.157)$$

$$M_{21} = S_{21} , \quad (1.158)$$

$$M_{12} = \frac{S_{11}}{n_1} t_1 + \frac{S_{22}}{n_2} t_2 + \frac{S_{21}}{n_1 n_2} t_1 t_2 + S_{12} , \quad (1.159)$$

cu proprietatea

$$\det M = M_{11} M_{22} - M_{12} M_{21} = 1 . \quad (1.160)$$

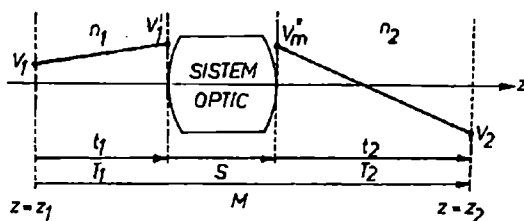


Fig.1.30. Pentru determinarea matricei de transfer a unui sistem centrat între două plane de referință oarecare ($z=z_1$ și $z=z_2$).

Remarcăm invarianța elementului S_{21} față de translația planelor de referință.

Ecuția de transfer (1.154) reprezintă transformările liniare

$$y_2 = M_{11}y_1 + M_{12}\Gamma_1, \quad (1.161)$$

$$\Gamma_2 = M_{21}y_1 + M_{22}\Gamma_1. \quad (1.162)$$

Conform proprietății (1.160) rezultă că pot fi nule cel mult două elemente ale matricei M . Să analizăm semnificația anulării, pe rând, a acestor elemente. Astfel, în cazul anulării unui element diagonal, ecuațiile (1.160), (1.161), (1.162) devin respectiv $\det M = -M_{12}M_{21} = -M_{12}S_{21} = 1$, $y_2 = M_{12}\Gamma_1$ (dacă $M_{11} = 0$), $\Gamma_2 = M_{21}y_1$ (dacă $M_{22} = 0$), de unde rezultă

$$y_1 = (n_2/S_{21})\gamma_2 \equiv -f_2\gamma_2 \quad (\text{dacă } M_{22} = 0), \quad (1.163)$$

$$y_2 = -(n_1/S_{21})\gamma_1 \equiv f_1\gamma_1 \quad (\text{dacă } M_{11} = 0). \quad (1.164)$$

Cum vom arăta puțin mai departe (vezi ecuațiile (1.182), (1.183)), mărimile

$$\begin{cases} \text{def} \\ f_1 = -n_1/S_{21}, \\ \text{def} \\ f_2 = -n_2/S_{21}, \end{cases} \quad (1.165)$$

care depind numai de elementul S_{21} al sistemului optic, au semnificația de *distanțe focale* obiect, respectiv imagine. Deocamdată, interpretarea geometrică a ecuațiilor (1.163), (1.164) rezultă din fig. 1.31 și anume, un fascicul homocentric de raze este transformat într-un fascicul paralel (fig.1.31,a) sau invers (fig.1.31,b). **Poziția planelor focale** (obiect, respectiv imagine) rezultă din condiția corespunzătoare, $M_{22} = 0$ sau $M_{11} = 0$, unde folosim expresiile (1.156), (1.157), adică

$$\begin{cases} t_{f_1} = -(n_1/S_{21})S_{22} \equiv f_1S_{22}, \\ t_{f_2} = -(n_2/S_{21})S_{11} \equiv f_2S_{11}. \end{cases} \quad (1.166)$$

Intersecția planelor focale cu axul optic determină **punctele focale** sau **focarele**, obiect F_1 respectiv imagine F_2 .

Să analizăm mai departe implicațiile anulării elementului 21 adică $M_{21} = S_{21} = 0$, astfel că planele focale (ecuațiile (1.166)) se deplasează la infinit, respectiv distanțele focale (ecuațiile (1.165)) devin infinite. Sistemele optice care au această proprietate poartă numele de **sisteme afocale** sau **telescopice**. În acest caz, ecuațiile (1.156), (1.157) devin

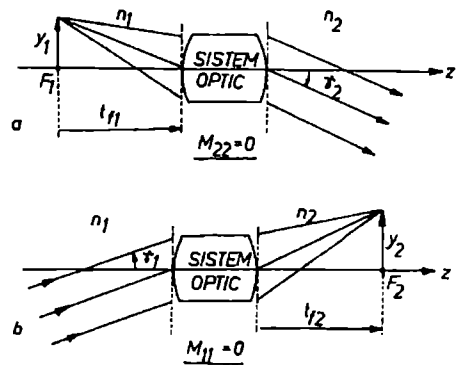


Fig.1.31. Interpretarea geometrică a ecuațiilor (1.163) și (1.164).

$M_{11} = S_{11}$, $M_{22} = S_{22}$ iar proprietatea (1.160) se scrie $\det M = M_{11}M_{22} = S_{11}S_{22} = 1$. Mai departe, din ecuația (1.162) rezultă $\Gamma_2 = S_{22}\Gamma_1$, adică

$$n_2\gamma_2 = S_{22}n_1\gamma_1. \quad (1.167)$$

Această relație exprimă proprietatea sistemelor optice afocale de transformare a unui fascicul paralel cu înclinarea γ_1 într-un fascicul paralel cu înclinarea γ_2 (fig.1.32).

Cea mai importantă mărime ce caracterizează sistemele afocale este *mărirea unghiulară*. Astfel, cum rezultă din ecuația (1.167), avem

$$\overset{\text{def}}{m_u} = \gamma_2/\gamma_1 = n_1 S_{22}/n_2 \equiv n_1/n_2 S_{11}. \quad (1.168)$$

Remarcăm că, spre deosebire de orice alt sistem optic, pentru sisteme telescopice mărirea unghiulară este aceeași pentru toate razele de lumină.

În fine, să analizăm semnificația condiției $M_{12} = 0$. În acest caz, ecuația (1.160) devine $\det M = M_{11}M_{22} = 1$, iar ecuația (1.161) se scrie

$$y_2 = M_{11}y_1 = \frac{1}{M_{22}}y_1. \quad (1.169)$$

Aceasta înseamnă că, indiferent de înclinarea Γ_1 , un fascicul conic cu vârful în planul $z = z_1$ este transformat într-un fascicul conic cu vârful în planul $z = z_2$ (vezi fig.1.33). Cu alte cuvinte, condiția $M_{12} = 0$ reprezintă *condiția de stigmatism* (în aproximația paraxială). Folosind expresia (1.159) a elementului M_{12} obținem forma generală a *relației planelor conjugate*

$$\frac{n_1}{t_1}S_{22} + \frac{n_2}{t_2}S_{11} + \frac{n_1n_2}{t_1t_2}S_{12} + S_{21} = 0. \quad (1.170)$$

Planele conjugate intersectează axul optic în punctele conjugate obiect P_1 , respectiv imagine P_2 .

Remarcăm că dacă $t_2 \rightarrow \infty$, atunci $t_1 \rightarrow t_{f_1}$, iar dacă $t_1 \rightarrow \infty$, atunci $t_2 \rightarrow t_{f_2}$ (vezi ecuația (1.166)). Prin urmare, fiecare plan focal este conjugat cu planul corespunzător de la infinit. Planele focale înseși nu formează o pereche de plane conjugate deoarece t_{f_1} și t_{f_2} nu verifică simultan relația (1.170) a planelor conjugate.

Ecuația (1.169) furnizează direct *mărirea liniară transversală*

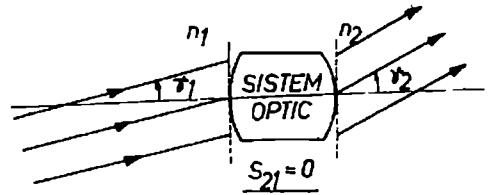


Fig.1.32. Sistem optic afocal (telescopic).

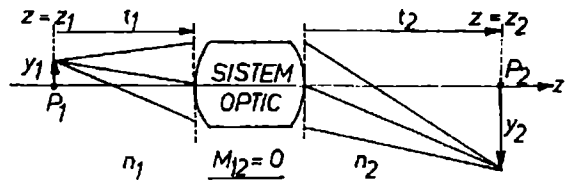


Fig.1.33. Interpretarea geometrică a relației $M_{12} = 0$ (plane conjugate).

$$m_t \stackrel{\text{def}}{=} \frac{y_2}{y_1} = M_{11} = \frac{1}{M_{22}} \quad (1.171)$$

sau, folosind expresiile (1.156), (1.157) și definiția distanțelor focale (1.165),

$$\begin{cases} m_t = S_{11} + \frac{S_{21}}{n_2} t_2 \equiv S_{11} - \frac{t_2}{f_2}, \\ m_t^{-1} = S_{22} + \frac{S_{21}}{n_1} t_1 \equiv S_{22} - \frac{t_1}{f_1}. \end{cases} \quad (1.172)$$

Observăm că, deoarece întotdeauna $M_{21} = S_{21}$, ecuația (1.158), matricea de transfer între două plane conjugate are următoarea structură

$$M_{P_1 P_2} = \begin{bmatrix} m_t & 0 \\ S_{21} & m_t^{-1} \end{bmatrix}. \quad (1.173)$$

Prin definiție, *planele principale* ale sistemului optic reprezintă acea pereche de plane conjugate pentru care mărirea liniară transversală are valoarea $m_t = +1$, adică imaginea are aceeași mărime și același sens cu obiectul. *Poziția planelor principale* (obiect, respectiv imagine) rezultă deci din condițiile $M_{11} = M_{22} = 1$ unde folosim expresiile (1.156), (1.157), adică

$$\begin{cases} t_{p1} = -\frac{n_1}{S_{21}}(S_{22} - 1) \equiv f_1(S_{22} - 1), \\ t_{p2} = -\frac{n_2}{S_{21}}(S_{11} - 1) \equiv f_2(S_{11} - 1). \end{cases} \quad (1.174)$$

Ne putem convinge că pozițiile (1.174) verifică, într-adevăr, relația planelor conjugate (1.170), ele fiind chiar prin definiție perechea conjugată pentru care $m_t = +1$. Intersecția planelor principale cu axul optic determină *punctele principale* obiect H_1 , respectiv imagine H_2 . Distanța $H_1 H_2$ dintre planele principale poartă numele de *interstițiu*.

Din expresiile (1.165), (1.166), (1.174) rezultă următoarele relații generale între pozițiile punctelor focale și principale și distanțele focale

$$\begin{cases} t_{f1} - t_{p1} = f_1, \\ t_{f2} - t_{p2} = f_2. \end{cases} \quad (1.175)$$

Remarcăm că matricea de transfer (1.173) scrisă pentru perechea de plane principale ($m_t = +1$), capătă forma simplă a matricei fundamentale pentru un dioptru sferic (vezi ecuația (1.145)), adică

$$M_{H_1 H_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ S_{21} & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.176)$$

În continuare, vom folosi această proprietate remarcabilă pentru a simplifica formulele, adoptând convenția măsurării distanței p_1 a obiectului, și p_2 a imaginii, față de planul principal respectiv (fig.1.34). Matricea de transfer între planele conjugate se scrie deci

$$M = T_2 M_{H_1 H_2} T_1 = \begin{bmatrix} 1 & p_2/n_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ S_{21} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & p_1/n_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.177)$$

și are elementele mai simple decât matricea (1.155), adică

$$M_{11} = 1 + \frac{S_{21}}{n_2} p_2 \equiv 1 - \frac{p_2}{f_2}, \quad (1.178)$$

$$M_{22} = 1 + \frac{S_{21}}{n_1} p_1 \equiv 1 - \frac{p_1}{f_1}, \quad (1.179)$$

$$M_{21} = S_{21}, \quad (1.180)$$

$$M_{12} = \frac{p_1}{n_1} + \frac{p_2}{n_2} + S_{21} \frac{p_1 p_2}{n_1 n_2} \equiv -\frac{1}{S_{21}} \left(\frac{p_1}{f_1} + \frac{p_2}{f_2} - \frac{p_1 p_2}{f_1 f_2} \right). \quad (1.181)$$

Condiția de stigmatism $M_{12} = 0$ conduce la *generalizarea formulei Huygens-Gauss* în forma dedusă pentru dioptrul sferic, ecuația (1.128), adică

$$\frac{f_1}{p_1} + \frac{f_2}{p_2} = 1, \quad (1.182)$$

unde distanțele focale f_1, f_2 au expresiile (1.165). De asemenea, folosind transformarea (vezi formula (1.129))

$$\begin{cases} p_1 = \zeta_1 + f_1, \\ p_2 = \zeta_2 + f_2, \end{cases}$$

unde segmentele ζ_1, ζ_2 determină poziția punctelor conjugate P_1, P_2 față de focarul corespunzător (vezi fig.1.34), din ecuația (1.182) rezultă *generalizarea formulei lui Newton*

$$\zeta_1 \zeta_2 = f_1 f_2. \quad (1.183)$$

Mărirea liniară transversală $m_t = M_{11} = 1/M_{22}$, ecuația (1.171), cu elementele M_{11}, M_{22} ale matricii (1.177), are expresiile

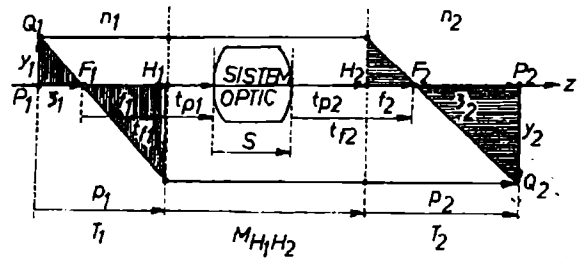


Fig.1.34. Planele principale ale unui sistem optic și utilizarea lor pentru construirea imaginilor.

$$\begin{cases} m_t = 1 + \frac{S_{21}}{n_2} p_2 \equiv 1 - \frac{p_2}{f_2} = -\frac{\zeta_2}{f_2}, \\ m_t^{-1} = 1 + \frac{S_{21}}{n_1} p_1 \equiv 1 - \frac{p_1}{f_1} = -\frac{\zeta_1}{f_1}, \end{cases} \quad (1.184)$$

adică

$$m_t \stackrel{\text{def}}{=} \frac{y_2}{y_1} = -\frac{f_1}{\zeta_1} = -\frac{\zeta_2}{f_2}. \quad (1.185)$$

Aceste relații rezultă și direct din geometria figurii 1.34 (din asemănarea triunghiurilor hașurate la fel). Alternativ, eliminând S_{21} , mai avem

$$m_t \stackrel{\text{def}}{=} \frac{y_2}{y_1} = -\frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{p_2}{p_1}. \quad (1.186)$$

Expresiile (1.185), (1.186) generalizează pe cele deduse pentru dioptrul sferic, (1.132), (1.133).

Punctele și planele focale și principale determină complet transformarea razelor paraxiale de către sistemul optic, de unde și denumirea acestora de *elemente cardinale*. Pentru ilustrare, fig. 1.34 prezintă construcția grafică a imaginii cu ajutorul celor patru puncte cardinale F_1, F_2, H_1, H_2 și a două raze de construcție care trec prin focare (*raze principale*). Regula de construcție este simplă: orice rază venind din stânga și care este paralelă cu axul optic este deviată la intersecția cu planul principal imagine (determinat de H_2) și trece prin F_2 ; orice rază venind din stânga și care trece prin F_1 este deviată la intersecția cu planul principal obiect (determinat de H_1) și iese paralel cu axul optic. Evident, construcția imaginii cu ajutorul razelor de lumină reale (care trec efectiv prin sistem) reprezintă, în general, o sarcină mult mai dificilă.

Punctele cardinale, obiectul și imaginea pot avea și altă ordine decât cea considerată în fig.1.34. Să aplicăm aceeași metodă a razelor principale pentru ordinea reprezentată în fig.1.35, adică F_1 , obiect, H_2, H_1, F_2 . Spre deosebire de fig.1.34, unde imaginea este reală (razele de lumină se intersectează efectiv în punctul Q_2), în cazul de față imaginea este virtuală deoarece razele nu trec efectiv prin punctul Q_2 dar, la ieșirea din sistem, se comportă ca și cum ar proveni din Q_2 .

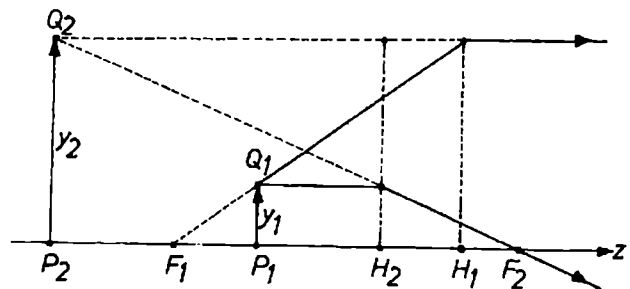


Fig.1.35. O altă situație posibilă privind poziția planelor principale.

În general, nu există o ordine apriorică a punctelor cardinale astfel că, dacă toate sunt distincte, există

$4! = 24$ de posibilități diferite de a le așeza pe axul optic. Luând mai departe în considerare și poziția obiectului, rezultă $5! = 120$ de cazuri diferite de construcție grafică a imaginilor, din care două au fost prezentate în fig.1.34 și 1.35.

Desigur, folosind proprietățile elementelor cardinale putem trasa traiectoria oricăror raze de construcție (nu neapărat principale) și construi imaginea direct cu ajutorul a două raze arbitrare, cum se arată în fig.1.36. Astfel, o rază incidentă oarecare $Q_1 I_1$ poate fi

considerată ca făcând parte dintr-un fascicul paralel de raze, dintre care una trece prin focarul F_1 . punctul de focalizare F al fascicului paralel cu raza Q_1I_1 se găsește la intersecția razei care trece prin F_1 cu planul focal imagine (determinat de F_2). În acest fel se stabilește direcția razei emergente I_2F , conjugată cu raza Q_1I_1 . În mod similar se construiește orice altă rază J_2G , conjugată cu Q_1J_1 și, prin aceasta, imaginea Q_2 a lui Q_1 .

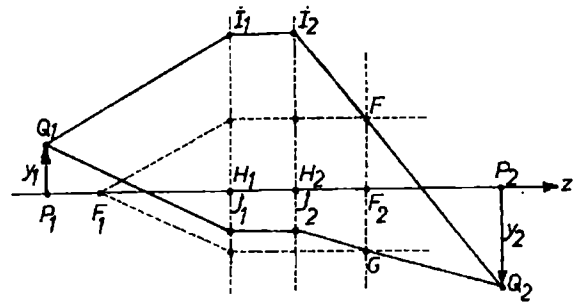


Fig.1.36. Construirea imaginii $P_2 Q_2$ a obiectului $P_1 Q_1$ într-un sistem centrat, cunoscând și poziția planelor focale.

Construcțiile grafice cu ajutorul punctelor cardinale demonstrează geometric relațiile stabilite mai înainte pe cale analitică. Astfel, fig.1.37 ilustrează modul în care un fascicul conic de raze cu vârful în punctul $Q_1(y_1)$, situat în planul focal obiect, este transformat într-un fascicul paralel cu înclinarea γ_2 , astfel că $y_1 = -f_2\gamma_2$ (vezi ecuația (1.163)), precum și problema inversă, privind transformarea unui fascicul paralel de raze cu înclinarea γ_1 într-un fascicul conic cu vârful în punctul $Q_2(y_2)$, situat în planul focal imagine, astfel că $y_2 = f_1\gamma_1$ (vezi ecuația (1.164)).

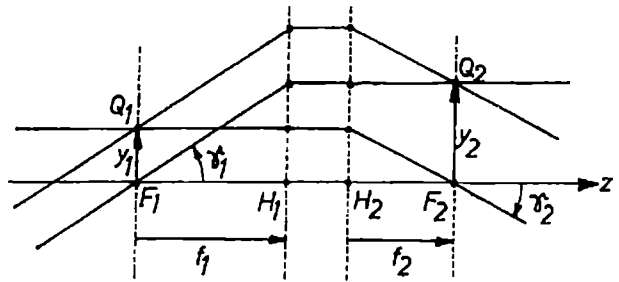


Fig.1.37. Trecerea unui fascicul conic sau paralel de raze, printr-un sistem centrat (conjugarea planelor focale cu planele de la infinit).

În continuare, vom demonstra geometric *teorema punctelor nodale* conform căreia există o pereche de puncte axiale conjugate N_1, N_2 , astfel că oricărei raze incidente orientate spre punctul nodal obiect, N_1 , îi corespunde o rază emergentă paralelă care vine dinspre punctul nodal imagine, N_2 . Astfel, fie un fascicul conic de raze cu vârful într-un punct oarecare Q_1 din planul focal obiect (vezi fig.1.38). Acest fascicul este transformat de sistemul optic într-un fascicul paralel cu raza I_2F_2 . Dintre toate razele care pornesc din punctul Q_1 , numai una singură este paralelă cu razele emergente (cu I_2F_2), și anume raza care se propagă pe direcția Q_1J_1 . Această rază intersecționează axul optic în N_1 , iar raza emergentă corespunzătoare J_2N_2 în N_2 . Dar, din egalitatea triunghiurilor $Q_1F_1N_1$ și $I_2H_2F_2$, respectiv $J_1H_1N_1$ și $J_2H_2N_2$, rezultă $F_1N_1 = f_2$, $N_2F_2 = f_1$, relații independente pe poziția punctului Q_1 . Cu alte cuvinte, poziția punctelor nodale (N_1, N_2) este determinată *numai* de poziția focarelor (F_1, F_2) și de distanțele focale (f_1, f_2). Putem transcrie relațiile obținute în forma

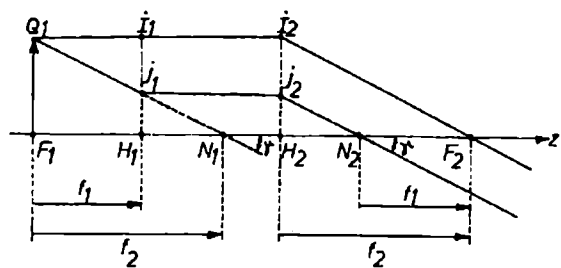


Fig.1.38. Punctele nodale ale unui sistem centrat (N_1, N_2).

$$\begin{cases} t_{f_1} - t_{n_1} = f_2, \\ t_{f_2} - t_{n_2} = f_1, \end{cases} \quad (1.187)$$

unde t_{n_1} , t_{n_2} reprezintă *pozițiile punctelor nodale* (obiect, respectiv imagine). Expresiile lor se obțin introducând în ecuațiile (1.187) distanțele focale (ecuațiile (1.165)) și pozițiile punctelor focale (ecuațiile (1.166)). Punctele nodale N_1 , N_2 pot de asemenea să fie folosite ca puncte cardinale pentru construcția imaginilor.

Pentru conveniență să recapitulăm expresiile *elementelor cardinale*:

$$\begin{cases} f_1 = -n_1/S_{21}, \\ f_2 = -n_2/S_{21}, \\ t_{f_1} = -n_1 S_{22}/S_{21} = f_1 S_{22}, \\ t_{f_2} = -n_2 S_{11}/S_{21} = f_2 S_{11}, \\ t_{p_1} = n_1(1 - S_{22})/S_{21} = f_1(S_{22} - 1), \\ t_{p_2} = n_2(1 - S_{11})/S_{21} = f_2(S_{11} - 1), \\ t_{n_1} = (n_2 - n_1 S_{22})/S_{21} = f_1[S_{22} - n_2/n_1], \\ t_{n_2} = (n_1 - n_2 S_{11})/S_{21} = f_2[S_{11} - n_1/n_2]. \end{cases} \quad (1.188)$$

Toate aceste mărimi depind numai de trei elemente (S_{11} , S_{22} , S_{21}) ale matricei de transfer S asociată sistemului (elementul S_{12} nu este independent deoarece $\det S = S_{11}S_{22} - S_{21}S_{12} = 1$), precum și de indicii de refracție ai spațiului obiect (n_1), respectiv imagine (n_2). În particular, dacă $n_1 = n_2$, atunci $f_1 = f_2$, $t_{p_1} = t_{n_1}$ și $t_{p_2} = t_{n_2}$. Distanțele focale f_1 , f_2 depind numai de elementul S_{21} care, dacă sistemul este imersat în aer ($n_1 = n_2 = 1$) reprezintă chiar convergența sistemului cu semnul schimbat.

Unele puncte cardinale se pot stabili ușor și experimental. Astfel, punctele focale F_1 , F_2 sunt date de poziția imaginii unui obiect îndepărtat. De asemenea, punctele nodale N_1 , N_2 pot fi localizate grație proprietății conform căreia un fascicul paralel rămâne focalizat în același punct dacă sistemul optic este rotit în jurul lui N_1 , respectiv al lui N_2 . În cazul dioptrului sferic, ecuația (1.145), sau al dioptrilor alipiți (lentile subțiri), ecuația (1.151), avem $S_{11} = S_{22} = 1$ astfel că $t_{f_1} = f_1$, $t_{f_2} = f_2$ și $t_{p_1} = t_{p_2} = 0$ adică planele principale coincid cu planul tangent în vârful dioptrului, respectiv în vârful comun al dioptrilor alipiți.

În general, schema optică echivalentă a oricărui sistem optic centrat, cu ajutorul căreia, folosind reguli cunoscute, putem construi grafic imaginile, este reprezentată de punctele sale cardinale. La rândul lor, acestea se determină din elementele matricei de transfer, ecuațiile (1.188), calculate din datele sistemului concret. Evident, un set de puncte cardinale definește o mulțime de sisteme concrete diferite dar echivalente din punctul de vedere al construcției imaginilor.

În încheierea acestei secțiuni vom ilustra calculul elementelor cardinale pentru trei sisteme optice concrete: o lentilă simplă, un sistem ocular compus din două lentile și un sistem mult mai complex, ochiul uman.

a) Fie lentila biconvexă de sticlă considerată în fig.1.29, a și pentru care am calculat deja matricea de transfer, ecuația (1.152). Din ecuațiile (1.188) obținem imediat elementele cardinale reprezentate în fig.1.39, unde datele numerice sunt exprimate în centimetri.

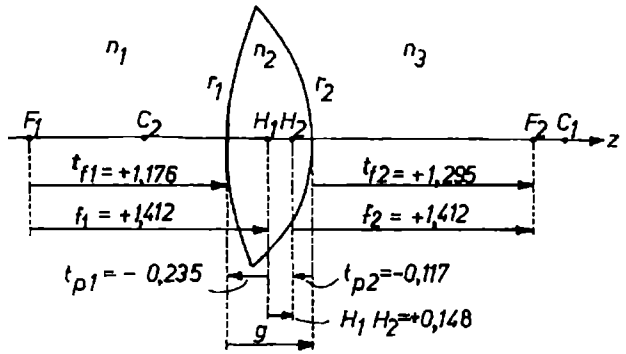


Fig.1.39. Elementele cardinale ale lentilei din fig.1.29, a.

b) În exemplul următor vom considera sistemul *ocular de tip Ramsden* ale cărui caracteristici sunt date în tabelul următor:

Nr.	n	r (cm)	g (cm)
1	1	∞	0,15
2	1,5	-0,5	0,60
3	1	+0,5	0,15
4	1,5	∞	
5	1		

Calculul matricei $S = R_4 T_3 R_3 T_2 R_2 T_1 R_1$ conduce la rezultatul

$$S = \begin{bmatrix} 0,260 & 0,666 \\ -1,400 & 0,260 \end{bmatrix}.$$

Conform ecuațiilor (1.188) avem

$$t_{f1} = -S_{22}/S_{21} = +0,186 \text{ cm},$$

$$t_{f2} = -S_{11}/S_{21} = +0,186 \text{ cm},$$

$$t_{p1} = (1 - S_{22})/S_{21} = -0,528 \text{ cm},$$

$$t_{p2} = (1 - S_{11})/S_{21} = -0,528 \text{ cm},$$

$$f_1 = f_2 = -1/S_{21} = +0,714 \text{ cm},$$

rezultate reprezentate în fig.1.40. Remarcăm că H_1 se află în dreapta lui H_2 .

c) Structura și proprietățile *ochiului uman* impun o serie de cerințe pentru proiectarea aparatelor vizuale. Acesta reprezintă un sistem optic centrat convergent, format dintr-o serie de dioptri practic sferici (fig.1.41). Mediile transparente succesive sunt

cornea, umoarea apoasă ($n = 1,336$), lentila cristalinului și umoarea vitroasă ($n = 1,336$). Apertura cristalinului (*pupila*) este controlată de o diafragmă (*irisul*) și are un diametru de 2-8 mm, în funcție de intensitatea luminii. Sistemul optic al ochiului este complicat datorită structurii neomogene a cristalinului. Acesta reprezintă o lentilă biconvexă, formată din circa 20000 de straturi transparente succesive, al căror indice de refracție variază de la $n \approx 1,405$ în straturile periferice până la $n \approx 1,454$ în centru.* Prin acțiunea *mușchilor ciliari* razele de curbură ale lentilei *cristalinului* variază în anumite

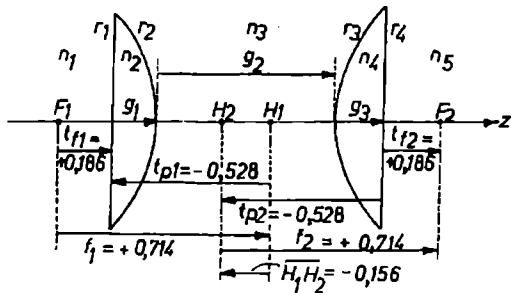


Fig.1.40. Elementele cardinale ale unui ocular de tip Ramsden.

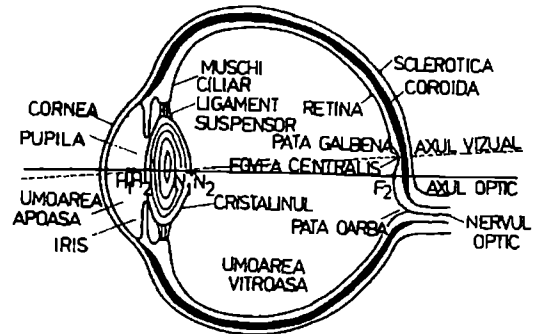


Fig.1.41. Structura ochiului uman.

limite, cea mai mare schimbare producându-se în curbură suprafeței sale frontale. Prin aceasta cristalinul se comportă ca o lentilă de distanță focală variabilă, permițând *acomodarea ochiului* astfel ca imaginea obiectelor vizate să se formeze întotdeauna pe retină. Cea mai mare putere de refracție a ochiului este localizată la suprafața corneei (care separă aerul de umoarea apoasă) dar variațiile acestei puteri, necesare pentru controlul acomodării, sunt cauzate de deformarea lentilei cristalinului. Când mușchii ciliari sunt relaxați, curbura cristalinului este cea mai mică, respectiv distanța sa focală este maximă, astfel că pe retină se focalizează imaginea obiectelor celor mai îndepărtate (*punctum remotum*). Spunem, în acest caz, că ochiul nu este acomodat. Pentru a focaliza pe retină obiecte din ce în ce mai apropiate, lentila cristalinului trebuie să se bombeze din ce în ce mai mult, până la o acomodare maximă, corespunzătoare unei *distanțe minime de vedere distinctă (punctum proximum)* și care, pentru *ochiul normal*, este de circa 25 cm.

Proprietăți apropiate de ochiul real se realizează considerând cornea ca pe o simplă suprafață refringentă între aer ($n_1 = 1$) și umoarea apoasă (n_2), iar cristalinul ca pe o lentilă omogenă (n_3) imersată între umoarea apoasă (n_2) și umoarea vitroasă (n_4). Un astfel de model, pentru ochiul neacomodat (relaxat), denumit și *ochiul schematic al lui Gullstrand*, are datele următoare:

Nr.	n	r (mm)	g (mm)
1	1	+7,8	3,6
2	1,336	-10,0	3,6
3	1,413	-6,0	
4	1,336		

* Cercetările privind mediile cu structură gradată (continuă) a indicelui de refracție sunt foarte actuale (vezi § 1.3)

Elementele cardinale ale acestui sistem, conform ecuațiilor (1.188) sunt

$$\begin{aligned} f_1 &= +1,678 \text{ cm}; & f_2 &= +2,242 \text{ cm}; \\ t_{f_1} &= +1,531 \text{ cm}; & t_{f_2} &= +1,697 \text{ cm}; \\ t_{p_1} &= -0,147 \text{ cm}; & t_{p_2} &= -0,545 \text{ cm}; \\ t_{n_1} &= -0,711 \text{ cm}; & t_{n_2} &= +0,019 \text{ cm}; \end{aligned}$$

Observăm că $H_1H_2 = N_1N_2 = 0,028 \text{ cm}$, dar pentru multe aplicații, putem considera că punctele principale, respectiv punctele nodale, coincid (vezi fig.1.41). Desigur, valoarea elementelor cardinale se modifică întrucâtva față de datele de mai sus atunci când cristalinul se acomodează pentru a focaliza pe retină obiecte aflate la distanță finită.

Retina, aflată pe fundul ochiului, reprezintă ecranul de proiecție a imaginilor obiectelor exterioare. Aceasta constă dintr-un mozaic de elemente fotosensibile, circa 130 milioane de "bastonașe" și 7 milioane de "conuri", perpendiculare pe suprafața retinei și conectate la creier prin nervul optic. Punctul de ieșire al nervului optic din ochi nu conține fotoreceptori (*pata oarbă*). Conurile sunt responsabile pentru *vederea diurnă* și pentru senzația de culoare, funcționând ca granulația foarte fină a unui film color, iar bastonașele sunt responsabile pentru *vederea crepusculară*. Densitatea superficială de conuri crește pe măsură ce ne apropiem de *pata galbenă* sau *macula*, reprezentând o depresiune în retină, și atinge valoarea maximă de circa 180000 conuri/ mm^2 în mijlocul acesteia, pe o arie de aproximativ 0,2 mm diametru, denumită *fovea centralis*. Pentru comparație, observăm că imaginea pe retină a lunii pline are un diametru tot de aproximativ 0,2 mm, conform formulei generale (ecuația (1.164))

$$y_2 = f_1 \gamma_1, \quad (1.164)$$

(vezi și fig.1.37), cu $f_1 \approx 17 \text{ mm}$ dată de tabelul prezentat anterior. Imaginea obiectului observat se formează întotdeauna în fovea centralis, care furnizează cea mai fină și detaliată informație și determină, împreună cu punctele nodale, *axul vizual* al ochiului. În aria foveală distanța medie dintre centrele conurilor vecine este de circa $2,5 \cdot 10^{-6} \text{ m}$. Admitând ipoteza că două puncte imagine sunt recepționate ca distincte dacă sunt separate de cel puțin un con neexcitat, adică luând $(y_2)_{\min} \approx 5 \cdot 10^{-6} \text{ m}$, rezultă *limita de rezoluție unghiulară a ochiului*

$$(\gamma_1)_{\min} = \frac{(y_2)_{\min}}{f_1} = \frac{5 \cdot 10^{-6}}{1,7 \cdot 10^{-2}} \text{ rad} = \frac{1}{3400} \text{ rad} \approx 1', \quad (1.189)$$

rezultat care concordă foarte bine cu estimările fiziologice privind *acuitatea vizuală* def
 $= 1/(\gamma_1)_{\min}$ a *ochiului normal*.

Alte aspecte fizice și fiziologice privind funcționarea ochiului uman ca receptor optic. După recapitularea elementelor principale ale structurii ochiului uman, este bine să aprofundăm câteva din aspectele sale funcționale, deosebit de importante din punct de vedere practic.

Așa cum se știe, din cauza aberațiilor geometrice (vezi și secțiunea 1.2.8) ale sistemelor de format imagini, apar abateri de la stigmatism și niciodată imaginea unui punct obiect nu este chiar un punct ci o pată luminoasă cu o anumită extindere spațială. Este firesc, deci, să ne întrebăm dacă ochiul uman, ca sistem optic, prezintă aberații de astigmatism și dacă da, cât sunt ele de supărătoare? Răspunsul la prima întrebare este afirmativ căci imaginea unui obiect punctiform nu este în realitate *niciodată* un punct. Este acest lucru deranjant? Răspunsul este de data aceasta negativ, iar explicația constă în aceea că, în cazul ochiului, imaginea de pe retină a punctului obiect este cu mult mai mică decât $y_{2 \text{ min}} \approx 5$ microni. De aceea, *acuitatea vizuală* (sau *puterea separatoare* - cum se mai numește uneri) a ochiului normal este determinată de structura celulară* a retinei și nu este influențată de aberațiile de astigmatism.

Nici fenomenele de difracție (vezi Cap. II) nu dau efecte supărătoare în observația vizuală. Pentru a putea înțelege mai exact această afirmație, să calculăm diametrul petei de difracție (așa-numitul *disc Airy*) produse de pupilă, adică de diafragma ochiului. Dacă pupila are diametrul $D = 2R$, deschiderea unghiulară a petei de difracție este $\gamma_1 = 1,22 \lambda/D$ (vezi Cap. II). Luând $\lambda = 550 \text{ nm}$ (la mijlocul spectrului vizibil) și $D = 2 \text{ mm}$ (valoarea *minim posibilă* a diametrului pupilar) obținem $\gamma_{1 \text{ max}}^{(\text{difr.})} = 3,355 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \approx 1'09''$, adică o valoare de ordinul de mărime al limitei de rezoluție unghiulară a ochiului (vezi relația (1.189)). La diametre pupilare mai mari (până la aproximativ 8 mm), unghiul $\gamma_1^{(\text{difr.})}$ este mai mic decât $(\gamma_1)_{\text{min}}^{(\text{difr})}$ și pata de difracție se formează în interiorul unei singure celule retiniane. Ori, așa cum am mai spus, detaliile ce se proiectează pe o singură celulă nu se disting, nu se separă, motiv pentru care nici petele de difracție, generate prin difracția pe apertura pupilară, nu sunt deranjante.

Cunoscând valoarea lui $(\gamma_1)_{\text{min}}$, nu este lipsit de interes să calculăm distanța limită $(y_1)_{\text{min}}$ dintre două puncte obiect, situate la diferite distanțe $|p_1|$ față de ochi, care mai pot fi observate separat. Dacă $|p_1| = 25 \text{ cm}$ (distanța minimă de vedere distinctă, corespunzătoare punctului proxim), avem $(y_1)_{\text{min}} = |p_1| \cdot (\gamma_1)_{\text{min}} = 0,074 \text{ mm}$ și $(y_1)_{\text{min}}$ crește odată cu creșterea lui $|p_1|$. Pentru a distinge două puncte situate la distanța $y_1 = 1 \text{ mm}$ între ele, este necesar ca ele să fie privite de la o distanță mai mică decât $|p_1|_{\text{max}} = 1/(\gamma_1)_{\text{min}} = 3,4 \text{ m}$

Pentru determinarea experimentală a acuității vizuale a ochiului se pot folosi mai multe procedee și dispozitive: inelul lui Landolt, mira lui Foucault, litera E Snellen, sau alfabetică etc. În continuare, ne vom referi numai la inelul lui Landolt (1874). Este vorba de un inel circular întrerupt, ca litera C de tipar, de culoare neagră pe fond alb, al cărui diametru exterior (interior) este de cinci (trei) ori mai mare decât deschiderea sa. Inelul, care

* O "celulă" retiniană este un hexagon închis într-un cerc cu diametrul egal cu $y_2 \approx 5 \cdot 10^{-6} \text{ m}$; două "celule" vecine au în centru câte un con și sunt separate între ele tot printr-un con.

În acest model, cel puțin în zona foveală, structura retinei seamănă cu un fagure. Fiecare "celulă" transmite creierului câte o singură informație (iluminarea medie a celulei).

dă acuitatea vizuală teoretică normală, este astfel plasat încât are diametrul unghiular exterior de $5'$ și deschiderea de $1'$.

Acuitatea vizuală se stabilește simplu, în funcție de distanța de la care observatorul, privind cu un singur ochi, mai distinge întreruperea inelului.*

Se numește *distanță de acomodare* distanța $|p_1|$ a obiectului a cărei imagine se proiectează pe retină prin reglarea razelor de curbură ale cristalinului. Pentru un ochi normal, distanța de acomodare $|p_1|$ variază între ∞ și 0,25 m. Pentru un ochi *miop*, când $|p_1| = \infty$, imaginea se formează în fața retinei (ochiul miop nu se poate acomoda pentru infinit). La un ochi *hipermetrop*, tot pentru $|p_1| = \infty$, imaginea se formează în spatele retinei. Miopia se corectează cu ochelari cu lentile divergente iar hipermetropia - cu lentile convergente, aducându-se imaginea pe retină.

Caracterul finit al acuității vizuale a ochiului are consecințe și aplicații extrem de importante care este bine să fie cunoscute. În primul rând, din această cauză, lucru pe care l-am subliniat și într-un aliniat anterior, caracterul aproximativ stigmatic (mai exact - nestigmatic) al imaginilor date de majoritatea instrumentelor, cu care ne confruntăm în practică, nu este supărător (decât dacă aberațiile sunt foarte mari). Pentru a înțelege mai bine esența acestei afirmații, să ne referim la observarea imaginii de pe ecranul unui televizor. Se știe că, de regulă, această imagine este formată din 625 fâșii (linii) paralele. Dacă înălțimea ecranului este h , lățimea unei fâșii este evident $h/625$. Când privim de la distanța $|p_1|$, fiecare fâșie se vede sub un unghi egal cu $h/625 |p_1|$ radiani. Pentru a nu observa discontinuitățile de pe ecran, este necesar ca acest unghi să fie inferior valorii $(\gamma_1)_{\min} = 1/3400$ radiani (la ochiul normal). Astfel, rezultă cu necesitate $|p_1| > 5,44h$. La un receptor Tv obișnuit, cu $h = 34$ cm, obținem $|p_1| > 1,85$ metri. În realitate, la unele persoane, limita de rezoluție unghiulară $(\gamma_1)_{\min}$ poate coborî sub valoarea "standard" de $1'$ (până la $10''$) și din această cauză distanța $|p_1|$ trebuie mărită corespunzător.

Cele învățate prin acest exemplu ne arată că și tablourile (picturile) au o distanță optimă de la care trebuie privite. De la distanțe mai mici, se văd prea multe detalii tehnice (de aplicarea vopselei pe pânză etc.), în schimb "nu se vede" tabloul în ansamblul său. Pe de altă parte, la citit și la lucru, se preferă, de obicei, o distanță de observare mai mică decât cea teoretică, chiar dacă, procedând în acest mod, se pot vedea și amănunte neinteresante (praf, pete, porozități ale hârtiei etc.). Ca regulă generală practică se recomandă folosirea unui unghi γ_1 cuprins în intervalul $(1 \div 5)(\gamma_1)_{\min}$.

Un alt aspect practic, de mare însemnătate, este cel al *adâncimii (profundității) câmpului vizual*. Se știe că, în afara punctelor obiect situate la distanța de acomodare, ochiul poate vedea clar și puncte situate la distanțe mai mari sau mai mici decât aceasta. Adâncimea câmpului vizual este tocmai distanța dintre limitele (superioară și inferioară) acestui domeniu. Să considerăm ochiul din fig.1.42, acomodat pentru distanța a , respectiv pentru planul (π) . Neglijând aberațiile geometrice și difracția (am văzut de ce!), presupunem că imaginea pe retină a punctului O , din planul (π) , este un punct P . Fie O' un alt punct obiect, situat la distanța a' ($\neq a$) față de ochi și cerem ca imaginea sa pe retină să fie o pată corespunzând unghiului $(\gamma_1)_{\min}$. Razele exterioare ale fasciculului conic de lumină, care

* Pentru detalii privind măsurarea acuității vizuale, recomandăm lucrarea P. Cernea, *Fiziologie oculară*, Editura Medicală, București, 1986 (Cap. XII).

formează această imagine, intersectează planul de acomodare (π) după un cerc AB. Pata de pe retină este chiar imaginea acestui cerc, de diametru $a \cdot (\gamma_1)_{\min} \equiv AB$. Din asemănarea triunghiurilor $O'AB$, $O'MN$, obținem ușor

$$\frac{D}{a'} = \frac{a(\gamma_1)_{\min}}{\pm(a' - a)} \quad ((+) \text{ pentru } a' > a; (-) \text{ pentru } a' < a),$$

sau

$$\frac{1}{a'} = \frac{1}{a} \mp \frac{(\gamma_1)_{\min}}{D}.$$

Pentru valoarea minimă a diametrului pupilar, $D = 2 \text{ mm}$, ultimul termen are valoarea $(\gamma_1)_{\min}/D = 0,147 \text{ dioptrii}$ și rezultă imediat

$$a' = \frac{a}{1 \mp 0,147a} \quad (1.190)$$

Când ochiul este acomodat pentru infinit ($a = \infty$) obținem $a' = \mp 6,8 \text{ m}$ (se aproximează cu 7 m), semnul (+) corespunzând obiectelor *reale* iar semnul (-) obiectelor *virtuale*. Aceasta ne arată că, un ochi standard, neîncordat, poate vedea concomitent, suficient de clar, obiecte reale situate la distanțe mai mari de 7 m și obiecte virtuale, din spate, tot de la distanțe mai mari de 7 m (vezi fig.1.43).

La încordarea maximă, când $a = 0,25 \text{ m}$ (punctum proximum), din formula dedusă obținem $a' = 24,1 \text{ cm}$, respectiv $a' = 26 \text{ cm}$.

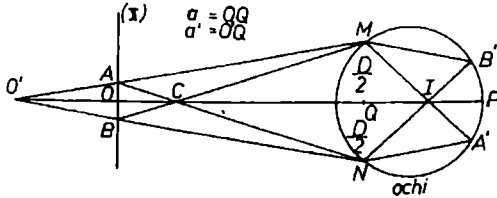


Fig.1.42. Determinarea profunzimii câmpului vizual al ochiului uman.

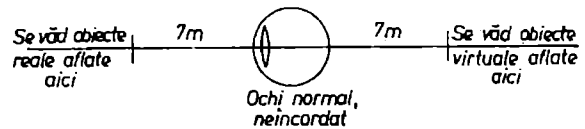


Fig.1.43. Domeniile din care vede ochiul uman normal, neîncordat (obiecte reale sau virtuale).

În cazul folosirii instrumentelor optice (lunete, telescoape, microscop etc.), problema adâncimii câmpului vizual trebuie analizată separat deoarece ea este dependentă și de grosimetru G al instrumentului. La utilizarea unui microscop, de exemplu, adâncimea câmpului vizual este practic nulă (vezi secțiunea 1.2.5).

Subliniem că cele discutate aici sunt valabile numai pentru situația în care imaginea se formează în zona foveală a retinei, adică în adâncimea petei galbene, cu un diametru de aproximativ $0,2 \text{ mm}$. Față de centrul optic al cristalinului, fovea centralis are un diametru unghiular de aproximativ 1° (sau $0,0175 \text{ radiani}$). Un obiect situat la distanța $|p_1| = 0,25 \text{ m}$ are o imagine care se proiectează pe regiunea foveală dacă diametrul său are valoarea de $4,35 \text{ mm}$. La distanța $|p_1| = 1 \text{ m}$, încapă în *câmpul vizual optim*, determinat de deschiderea unghiulară a foveei, un disc cu diametrul de $1,74 \text{ cm}$ ș.a.m.d.

Obiectele mai mari, proiectate și pe restul petei galbene, se văd în condiții mai puțin bune. Față de același centru optic, deschiderile unghiulare ale petei galbene sunt de

8° - în direcție orizontală și de 6° - în direcție verticală; acest *câmp vizual mai puțin optim*, cuprinde la $|p_1| = 0,25$ m, o dimensiune de 3,5 cm în direcție orizontală și de 2,6 cm în direcție verticală; la $|p_1| = 1$ m, dimensiunile obiectului din câmp sunt de 14 cm, respectiv 10,4 cm ș.a.m.d.

Acum, putem reveni la problema distanței optime de la care trebuie privit ecranul televizorului. Dacă ne așezăm în așa fel ca imaginea pe retină a ecranului să se încadreze pe pata galbenă, adică astfel încât înălțimea h a ecranului să se vadă sub un unghi de aproximativ 5° , lățimea fâșiilor se va vedea sub un unghi de $5^{\circ}/625$ linii $\approx 0,5' < (\gamma_1)_{\min}$. Se consideră că aceasta este poziția corectă în fața televizorului. Distanța $|p_1|$ la care trebuie să ne plasăm pentru a îndeplini condiția de mai sus este $|p_1| = 6/0,087 \approx 11,46$ h. Când $h = 34$ cm (ecran obișnuit) obținem $|p_1| = 3,90$ m.

Dacă ne punem problema de a vedea neapărat toate detaliile imaginii de pe ecran, chiar cu riscul de a vedea și liniile, este necesar să ne apropiem până pe la mijlocul acestei distanțe, în așa fel încât lățimea unei fâșii să se vadă sub unghiul $(\gamma_1)_{\min}$. De regulă, se face un compromis individual între cele două distanțe.

Considerăm necesar să mai analizăm aici problema vederii binoculare și, strâns legat de aceasta, problema vederii stereoscopice* lăsând pentru mai târziu problema perceperii culorilor. Precizăm că, privind același obiect cu ambii ochi nu obținem aceeași informație de două ori, ci prin prelucrarea automată, la nivelul creierului, a suprapunerii celor două imagini, dobândim și o anumită cantitate suplimentară de informație.

Menționăm mai întâi că ochii au posibilitatea de a se roti, cu aproximativ 120° în plan vertical (pe direcția nas-frunte) și cu 150° în plan orizontal. Aceasta face ca destul de îngustul câmp vizual să poată fi lărgit prin mobilitatea imaginilor ce provin de la diverse câmpuri vizuale care sunt măsurate cu privirea.

Când privim cu ambii ochi spre un același punct obiect, axele vizuale ale celor doi ochi sunt concurente în punctul obiect și, din înclinarea acestora față de direcția "înainte", se poate aprecia distanța obiectului (pe acest principiu se bazează funcționarea telemetrelor). Fie e *ecartul pupilar*, adică distanța dintre centralele celor doi ochi; ea variază de la individ la individ, fiind cuprinsă între 54 mm și 72 mm (se adoptă valoarea standard de 65 mm). Dacă un punct obiect se află la distanța $|p_1|$, se definește *paralaxa stereoscopică* η prin raportul $\eta = e/|p_1|$. Fie acum două puncte obiect, situate la distanțele $|p_1'|$ și $|p_1''|$. Diferența lor de paralaxă este evident $\Delta\eta = e(|p_1''|^{-1} - |p_1'|^{-1})$. Se consideră că diferența de paralaxă este sesizabilă (adică punctele obiect se văd în adâncimea spațiului observat) dacă ea nu este inferioară unei anumite valori minime $(\Delta\eta)_{\min}$, caracteristică fiecărui individ; aceasta variază între $10''$ și $7''$, dar, prin antrenament (cum este cazul aviatorilor), poate atinge chiar valori mai mici (de exemplu, $3''$). Pentru evaluări uzuale, în cazul unor ochi normali, se adoptă valoarea standard $(\Delta\eta)_{\min} = 10''$.

Să dăm din nou câteva exemple numerice. Dacă unul din obiecte este la infinit (de exemplu o stea) și considerăm celălalt obiect la distanța corespunzătoare lui $(\Delta\eta)_{\min}$, din formula diferenței de paralaxă obținem $|p_1''| = e/(\Delta\eta)_{\min} = 65 \text{ mm}/10'' = 1340$ m. Să notăm această distanță prin $|p_1|_{\min}$. Obiectele terestre situate la distanțe ce depășesc valoarea $|p_1|_{\min}$ se văd proiectate pe orizont, raza acestuia fiind de aproximativ 4 km.

* Capacitatea de a percepe dispunerea obiectelor în spațiu.

Dacă transcriem relația generală exprimând ecartul pupilar sub forma $e = |p_1|_{\min} \cdot (\Delta\eta)_{\min}$, obținem $(\Delta\eta) = (\Delta\eta)_{\min} |p_1|_{\min} (|p_1''|^{-1} - |p_1'|^{-1})$ și, în situația limită când $(\Delta\eta) = (\Delta\eta)_{\min}$, avem $|p_1|_{\min}^{-1} = |p_1''|^{-1} - |p_1'|^{-1}$. Cu ajutorul acestei relații putem calcula distanța $\Delta p_1 = |p_1'| - |p_1''|$ dintre punctul depărtat și cel mai apropiat, care se pot vedea în profunzime. Obținem $\Delta p_1 = |p_1''|^2 / (|p_1|_{\min} - |p_1''|)$. Când $|p_1''| = 25$ cm (punctum proximum) rezultă $\Delta p_1 \approx 0,05$ mm, iar când $|p_1''| = \infty$ avem $\Delta p_1 = \infty$. Între cele două situații extreme, obținem valori Δp_1 intermediare. De exemplu, pentru $|p_1''| = 100$ m, rezultă $\Delta p_1 \approx 8$ m.

Să analizăm acum în ce fel, vederea binoculară poate genera senzația de relief, adică efectul stereoscopic. Pentru aceasta să studiem situația schițată în fig.1.44. Fie M_S și M_D , două puncte obiect situate în același plan (π) , de acomodare, aflat la distanța $|p_1|$ față de ochi. Să considerăm că punctul M_S este observat numai cu ochiul stâng, iar punctul M_D - numai cu ochiul drept. Prelungind axele vizuale, ele se intersectează în punctele M și astfel se crează impresia că s-ar vedea (parcă) un punct obiect unic - M aflat la distanța $|p|$. Din asemănarea triunghiurilor putem scrie $e/|p| = \delta / (|p| - |p_1|)$, adică $|p| = e \cdot |p_1| / (e - \delta)$. Aici $\delta > 0$ când punctul M este mai departe decât planul (π) - situația din partea stângă a figurii - și $\delta < 0$, când punctul M este mai aproape decât planul (π) - situația din partea dreaptă a figurii.

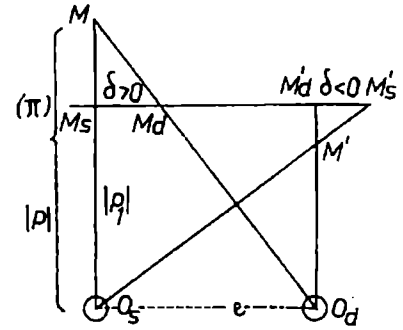


Fig.1.44. Vederea binoculară și obținerea efectului stereoscopic.

Desigur, în situațiile curente, într-un anumit plan (π) nu avem numai perechea de puncte M_S și M_D (sau M'_S și M'_D), ci o mulțime de puncte obiect, perechi, cu diferite valori și semne ale parametrului δ . Punctele aparente M și M' corespunzătoare diverselor perechi de puncte obiect, se vor vedea la distanțe $|p|$ diferite, în fața sau în spatele planului de acomodare (π) , în funcție de parametrul δ respectiv. În acest fel, se crează senzația de relief la nivelul creierului.

Prin mărirea artificială a ecartului pupilar e (de pildă prin folosirea telemetrelor sau a altor aparate optice) se poate crește atât distanța $|p_1|_{\min} = 1340$ m, numită *prag al vederii stereoscopice*, cât și efectul stereoscopic propriu-zis.

Cele prezentate până aici se referă numai la *vederea diurnă*, caracterizată prin valori ale iluminării de minim 100 luxi, în care receptorii optici elementari sunt conurile. Când iluminarea scade sub 100 luxi, conurile devin din ce în ce mai puțin sensibile la excitația luminoasă. Acum încep să devină din ce în ce mai importante bastonașele, însă acestea nu mai sunt sensibile la culoare. Așa cum am mai spus în prima parte a acestei secțiuni, pe retină, numărul bastonașelor este mai mare decât al conurilor, dar, fiind distribuite pe o arie mai întinsă, densitatea lor superficială este relativ mică.

Să schițăm o scurtă analiză a situației în care iluminarea este inferioară valorii de 1/100 luxi, adică a așa-numitei *vederi crepusculare*.

Între vederea diurnă și cea crepusculară există mai multe diferențe esențiale. Prima dintre acestea este dispariția culorilor, determinată de inhibarea activității conurilor. Apoi, strâns legată de această inhibare, este scăderea acuității vizuale, respectiv diminuarea

profunziunii câmpului vizual și, la limită, chiar pierderea senzației de stereoscopie. În vederea crepusculară, pata galbenă și mai ales macula, își pierd calitățile lor relative față de restul retinei. Chiar complementar, acum devin mult mai sensibile părțile periferice ale retinei.

Iluminările mari, necesare funcționării conurilor sunt dăunătoare bastonașelor și, în vederea diurnă, sau la iluminări foarte mari, bastonașele trebuie să fie ferite, protejate. Aceasta se realizează, pe de o parte, prin variația diametrului pupilar, între 8 mm și 2 mm, proces în care suprafața prin care pătrunde în ochi fluxul luminos se micșorează de aproximativ 16 ori. Trebuie să spunem însă că acest mecanism asigură numai o infimă parte din intervalul total de *adaptare* care este de ordinul de mărime 10^{12} (raportul dintre iluminarea maximă și minimă între care ochiul se poate adapta). Mecanismul fiziologic de bază al adaptării este de natură fizico-chimică și, în esență, constă în următoarele. Lumina incidentă pe o celulă retiniană produce descompunerea parțială a *purpurei vizuale* (sau *rodopsină*) aflate acolo, purpura descompusă iritând nervul vizual. Cu ajutorul energiei obținute prin alimentarea sanguină a retinei, purpura celulară se reface, stabilindu-se un echilibru dinamic între purpura descompusă și cea nedescompusă. Cu cât lumina este mai puternică, echilibrul se stabilește la o cantitate mai mică de purpură nedescompusă, deci sensibilitatea - proporțională cu aceasta - va fi mai mică. Pe lângă această formă de adaptare, mai intervine și o adaptare determinată de migrarea așa-numitului *pigment întunecat*. Anume, la iluminări slabe, pigmentul se retrage în domeniile limită dintre celule iar la iluminări puternice el se întinde peste întreaga suprafață a celulei, ferind-o de acțiunile dăunătoare ale luminozităților prea mari.

Deși se spune că adaptarea are loc în mod automat, trebuie să reținem că procesul (reuniune a mai multor tipuri de mecanisme) nu are loc instantaneu. El are o durată de ordinul minutelor (1-3 min) și este asimetric: adaptarea la iluminare mare (adică reducerea sensibilității) se face mai repede decât adaptarea la iluminare mică. Încă un aspect important este acela că, dintre cele trei mecanisme prezentate mai sus, cel mai rapid (aproape instantaneu) este cel al variației diametrului pupilar.

Un efect foarte important, relevant pentru deosebirile care apar la trecerea de la vederea diurnă la cea crepusculară a fost pus în evidență de Purkinje (1825). Fie două suprafețe identice, una roșie și alta albastră, vizibile la fel în condiții diurne, de aceeași luminanță (strălucire). Trecând, prin reducerea luminozității, la condițiile vederii crepusculare, se constată că suprafața albastră se vede cu mult mai bine decât cea roșie. Suprafața albastră va părea a fi albă iar cea roșie - gri închisă.

Analizând acest aspect, pătrundem, iată, în problema perceperii culorilor. Bazele teoretice ale vederii în culori au fost puse în secolul trecut de către Young și apoi de Helmholtz. Din păcate, mecanismul vederii culorilor nu este bine cunoscut nici în prezent și el continuă să se preteze la numeroase ipoteze. Cu toate acestea, esența teoriei Young-Helmholtz, fundamentată experimental, se consideră a fi adevărată, căci ea explică de ce în vederea diurnă culorile se pot distinge clar iar în cea crepusculară se pot distinge numai diferențe de luminozitate. Conform acestei teorii, de vederea diurnă sunt răspunzătoare conurile iar de cea crepusculară (nocturnă) - bastonașele. Mai mult, se admite că pe retină există trei tipuri de conuri, cu sensibilități spectrale diferite, care conțin fiecare câte un pigment fotosensibil pentru una din culorile fundamentale - roșu, verde și albastru. Atunci când aceste "particule" fotosensibile sunt stimulate de lumină, se produce senzația culorii respective iar prin amestecul cu ponderi specifice (dependente de sensibilitatea spectrală) a roșului, verdelui și albastrului se obțin toate celelalte culori. Pe această bază,

exprimarea oricărei culori prin trei "coordonate" ce indică componența în culori "fundamentale" (triunghiul culorilor lui Maxwell), conform ecuației "Culoare = r (roșu) + g (galben-verzui) + a(albastru)", pare extrem de firească.

Cercetările din ultima jumătate de secol au confirmat presupunerile teoriei Young-Helmholtz. De exemplu, studiile de absorbție spectrală întreprinse de G. Studnitz în anul 1941 au arătat existența unor maxime de absorbție (respectiv de sensibilitate retiniană) la $\lambda_1 = 470$ nm (albastru), $\lambda_2 = 550$ nm (verzui-galben) și $\lambda_3 = 650$ nm (roșu). Prin medierea celor trei curbe de absorbție rezultă că, în vederea diurnă, maximum de sensibilitate este situat la $\lambda_d = 555$ nm. Pe de altă parte, maximum de sensibilitate al vederii crepusculare, în care rolul principal îl joacă bastonașele, este situat la $\lambda_c = 510$ nm, adică el este deplasat (spre albastru) față de cel al vederii diurne (vezi fig.1.45). Pe baza acestei constatări efectul Purkinje poate fi înțeles acum ușor.

În prezent, se știe sigur că bastonașele sunt de un singur fel și au sensibilitate cromatică redusă (numai în domeniul $\lambda \leq 625$ nm). Nu se știe însă dacă fiecare con retinian are în structura sa trei receptori cromatici specializați sau dacă există trei tipuri de conuri cu curbe de sensibilitate spectrală distincte. După datele experimentale ale lui W.A. Rushton și R.A. Weale (din perioada 1952-1965) rezultă existența pe retină a trei pigmenți vizuali, corespunzând fiecare la o culoare, neamestecați în același con (fiecare con conține câte un singur pigment). Cercetările din anul 1967 ale lui T. Tomita au dus la detectarea a trei grupe de conuri, distribuite cu ponderile de 74%, 10% și 16%, care corespund la excitațiile de 611 nm, 529 nm și respectiv 462 nm. În acest fel, se conturează ideea existenței a trei tipuri de conuri specializate cromatic, în fiecare con aflându-se alt pigment (*eritrolab*, *clorolab* și respectiv *cianolab*).

Deși nu dorim să intrăm în detalii care depășesc cadrul fizic al lucrării noastre, precizăm totuși că există persoane (1% la bărbați și 0,1% la femei) în al căror aparat vizual lipsesc receptorii cromatici de un anumit tip (*dicromazie*). Cel mai tipic exemplu este cel al *daltonismului* - lipsa conurilor sensibile pentru roșu (bolnavul nu deosebește culoarea roșie de cea verde). Conurile corespunzătoare celorlalte două culori "de bază" lipsesc mult mai rar. Există de asemenea, deși extrem de rar, persoane la care lipsesc două din cele trei feluri de conuri (*monocromazie*), care nu deosebesc deloc culorile. Lipsa bastonașelor sau insuficiența lor, este cunoscută sub denumirea de *hemeralopie*. Un astfel de ochi funcționează normal diurn, dar nu se poate adapta la condiții crepusculare.

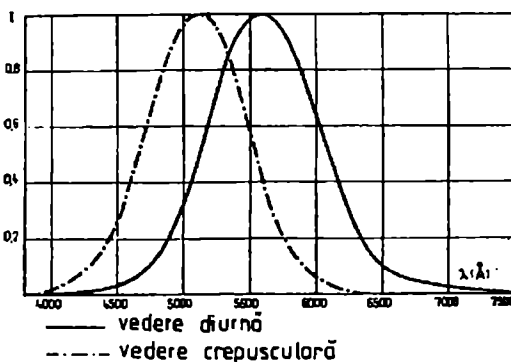


Fig.1.45. Curbele de sensibilitate ale ochiului uman.

1.2.4. Lentile sferice

Cel mai simplu sistem de diopri sferice este lentila sferică, formată din doi dioptri coaxiali cu același mediu interior. În continuare, vom deduce expresiile generale ale matricii de transfer S , respectiv ale elementelor cardinale, pentru o lentilă sferică oarecare (n_2, r_1, r_2, g) imersată în același mediu $(n_1 = n_3)$. Avem

$$S = R_2 TR_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_2 - n_3}{r_2} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \frac{g}{n_2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_1 - n_2}{r_1} & 1 \end{bmatrix},$$

de unde rezultă

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{11} = 1 + \frac{1-n}{n} \frac{g}{r_1}, \\ S_{22} = 1 + \frac{n-1}{n} \frac{g}{r_2}, \\ S_{12} = \frac{g}{n_1 n}, \\ S_{21} = n_1(1-n) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{n-1}{n} \frac{g}{r_1 r_2} \right), \end{array} \right. \quad (1.191)$$

unde prin $n = n_2/n_1 = n_2/n_3$ am notat indicele de refracție relativ al lentilei față de mediul de imersie. Observăm că toate elementele matricei S sunt funcții liniare de grosimea g a lentilei.

Din ecuațiile (1.188) rezultă aceeași valoare pentru distanța focală obiect și imagine

$$f = f_1 = f_2 = -n_1/S_{21}, \quad (1.192)$$

respectiv aceeași convergență

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{n-1}{n} \frac{g}{r_1 r_2} \right), \quad (1.193)$$

expresie cunoscută sub numele de *formula constructorului de lentile*. Pe montura lentilelor comerciale este imprimată valoarea convergenței acestora în aer ($n_1 = n_3 = 1$). În funcție de valoarea indicelui de refracție n , a razelor de curbură r_1, r_2 și a grosimii g , aceasta poate fi pozitivă (lentile convergente), negativă (lentile divergente) sau nulă (lentile afocale).

Formele Huygens-Gauss și Newton ale relației punctelor conjugate se scriu conform ecuației (1.182), respectiv ecuației (1.183), adică

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{f}, \quad \zeta_1 \zeta_2 = f^2. \quad (1.194)$$

Din ecuațiile (1.188) și (1.191) rezultă pozițiile punctelor cardinale

$$\left\{ \begin{array}{l} t_{f_1} = f S_{22} = f \left(1 + \frac{n-1}{n} \cdot \frac{g}{r_2} \right), \\ t_{f_2} = f S_{11} = f \left(1 + \frac{1-n}{n} \cdot \frac{g}{r_1} \right), \\ t_{p_1} = f(S_{22} - 1) = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{fg}{r_2}, \quad t_{p_1} = t_{n_1}, \\ t_{p_2} = f(S_{11} - 1) = \frac{1-n}{n} \cdot \frac{fg}{r_1}, \quad t_{p_2} = t_{n_2}. \end{array} \right. \quad (1.195)$$

În general, punctele principale pot fi localizate atât în interiorul, cât și în exteriorul lentilei și nu există o ordine apriorică a lor. Distanța dintre punctele principale ale lentilei este

$$H_1 H_2 = g + t_{p_1} + t_{p_2} = g \left[1 - f \frac{n-1}{n} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \right]. \quad (1.196)$$

Un caz particular interesant este cel al *lentilei afocale* ($S_{21} = 0$). Condiția corespunzătoare rezultă din anularea convergenței, ecuația (1.193), adică

$$g = \frac{n}{n-1} (r_1 - r_2). \quad (1.197)$$

Este ușor de verificat că această condiție este echivalentă cu aceea de coincidență a focarelor interioare ale celor doi dioptri ai lentilei. Mărirea unghiulară a lentilei afocale (imersată în același mediu), conform ecuațiilor (1.186) și (1.191), este

$$m_u = S_{22} = 1 + \frac{n-1}{n} \frac{g}{r_2},$$

sau, introducând grosimea g dată de condiția (1.197),

$$m_u = r_1 / r_2. \quad (1.198)$$

Pentru ilustrare să considerăm exemplul numeric $n = 1,5$, $r_1 = 100$ mm, $r_2 = -2$ mm, astfel că din ecuațiile (1.197), (1.198) rezultă $g = 306$ mm și respectiv $m_u = -50$. În acest caz, lentila afocală este de fapt o bară de sticlă cu capete sferice și reprezintă un *telescop simplu* cu o importantă mărire unghiulară.

Un caz particular de importanță practică deosebită este *lentila subțire*. Pentru lentila subțire ideală (doi dioptri complet alipți) avem $g \approx 0$ astfel că formula constructorului de lentile (1.193) devine

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (1.199)$$

Conform ecuațiilor (1.191), matricea de transfer, în acest caz, se scrie sub forma

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -n_1/f & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.200)$$

iar pozițiile punctelor cardinale, ecuațiile (1.195), sunt date de $t_{f_1} = t_{f_2} = f$, $t_{p_1} = t_{p_2} = t_{n_1} = t_{n_2} = 0$. Aceste rezultate se generalizează imediat pentru un *sistem de lentile subțiri alipite* (imersat în același mediu), a cărui matrice de transfer este evident

$$S = \prod_{i=1}^m S_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -n_1 \sum_{i=1}^m \frac{1}{f_i} & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.201)$$

Acest sistem este, deci, echivalent cu o singură lentilă subțire de convergență egală cu suma algebrică a convergențelor lentilelor componente, adică

$$\frac{1}{f} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{f_i}. \quad (1.202)$$

O aproximație mai bună a formulelor lentilelor subțiri, în care grosimea g nu mai este complet neglijată, se obține introducând distanța focală f din ecuația (1.199) în ecuațiile (1.195), (1.196). Pentru pozițiile punctelor principale ale unor astfel de lentile subțiri reale ($fg \ll r_1 r_2$) obținem deci, cu o bună aproximație,

$$\left\{ \begin{array}{l} t_{p1} = \frac{g/n}{(r_2/r_1) - 1}, \quad t_{n1} = t_{p1}, \\ t_{p2} = \frac{g/n}{(r_1/r_2) - 1}, \quad t_{n2} = t_{p2}, \\ H_1 H_2 = \frac{n-1}{n} g, \quad N_1 N_2 = H_1 H_2. \end{array} \right. \quad (1.203)$$

Punctele principale calculate cu aceste formule pentru câteva tipuri de lentile subțiri de sticlă în aer ($n = 1,5$) sunt ilustrate în fig.1.46. În aceste cazuri $H_1 H_2 = g/3$ (această relație este satisfăcută foarte bine și de lentila relativ groasă prezentată în fig.1.39).

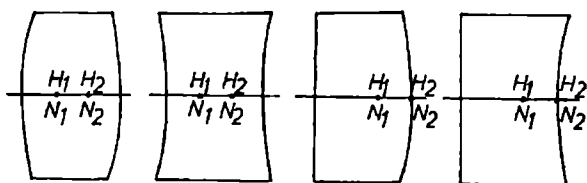


Fig.1.46. Punctele principale și nodale ale unor tipuri de lentile.

Ca aplicație a unei lentile convergente ($f > 0$) să considerăm *microscopul simplu (lupa)*. În acest caz, obiectul real de investigat ($y_1 > 0, p_1 > 0$) se așază în

vecinătatea focarului F_1 și anume puțin în dreapta acestuia, astfel că imaginea sa este virtuală, dreaptă și mărită ($y_2 > 0, p_2 < 0$) cum se arată în fig.1.35. În acest fel ochiul, plasat de obicei în vecinătatea planului focal imagine (F_2) vede imaginea sub un unghi θ_2 , mai mare decât unghiul θ_1 sub care ar vedea direct obiectul y_1 (adică fără intermediul lupei) dacă acesta ar fi așezat în planul imaginii (fig.1.47). Conform ecuației (1.184) avem

$$m_t \stackrel{\text{def}}{=} \frac{y_2}{y_1} = 1 - \frac{p_2}{f} = 1 + \frac{|p_2|}{f} > 0. \quad (1.204)$$

Cea mai avantajoasă distanță pentru vederea clară a obiectelor sau imaginilor lor este *distanța minimă de vedere distinctă (punctum proximum)* de aproximativ $0,25 \text{ m} = 1/4 \text{ m}$. Prin definiție, *grosimentul G* al microscopului (simplu sau compus) este

$$G \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\theta_2}{\theta_1} = \left(\frac{y_2}{y_1} \right) \Big|_{|p_2|=25 \text{ cm}} = 1 + \frac{1}{4f}, \quad (f \text{ în metri}). \quad (1.205)$$

Întrucât, de regulă $f \ll 25 \text{ cm}$,
 practic avem

$$G \approx 1/4f, \text{ (} f \text{ în metri).} \quad (1.206)$$

Creșterea grosimentului sistemului se realizează prin micșorarea distanței sale focale. Însă, cu o singură lentilă convergentă nu se poate depăși practic valoarea $G \approx 8$, corespunzătoare valorii $f \approx 3 \text{ cm}$, datorită razelor de curbură mici și aberațiilor geometrice și cromatice

corespunzătoare, mari. Aceste aberații pot fi compensate, în mare măsură, în sisteme de lentile convenabil alese. Astfel, un sistem acromat de lentile alipite, cu diafragmă de limitare a fasciculului, poate atinge valori $G \approx 25$ ($f \approx 1 \text{ cm}$). Aberațiile pot fi diminuate de asemenea folosind ca lupă un dublet de lentile subțiri separate de o distanță egală cu jumătate din suma distanțelor lor focale, cum sunt sistemele oculare de tip Ramsden sau de tip Huygens. De regulă, acestea sunt încorporate în sisteme optice mai complexe (microscop, telescop), unde servesc pentru examinarea imaginii furnizate de către obiectiv. Cum vom arăta în secțiunea următoare, cu ajutorul unor astfel de instrumente compuse, se pot obține grosimente de ordinul $G \approx 10^2 \div 10^3$.

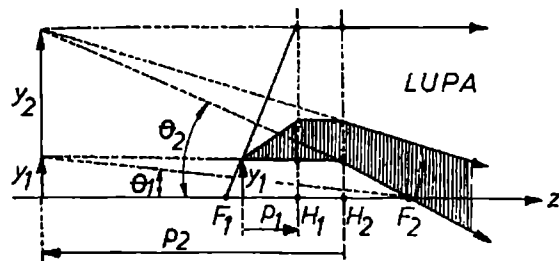


Fig.1.47. Construirea imaginii în lupă.

1. 2. 5. Sisteme compuse

În general, pentru a mări grosimentul și a ameliora calitatea imaginilor, cel mai adesea se asociază două sau mai multe lentile. Astfel de sisteme compuse sunt *obiectivele*, care formează imagini reale, și *ocularele*, care formează imagini virtuale. La rândul lor, *microscopul* (destinat observării micilor obiecte apropiate) și *telescopul* (destinat observării obiectelor îndepărtate) sunt compuse dintr-un obiectiv, care formează imaginea intermediară, și un ocular, utilizat ca lupă, care formează imaginea finală virtuală.

A. Dubletul de lentile subțiri

Să considerăm mai întâi cel mai simplu sistem compus, și anume *sistemul dublet*, format din două lentile subțiri, de convergențe $1/f_1, 1/f_2$, separate de distanța (*grosimea dubletului*)

$$d = f_1 + f_2 + \ell \quad (1.207)$$

și imersate în același mediu de indice de refracție n (fig.1.48). Mărimea ℓ , denumită *interval optic*, reprezintă distanța dintre focarele interioare ale dubletului. În fig.1.48 se arată construcția imaginii cu ajutorul razelor principale care trec prin focarele lentilelor componente. Prima lentilă, L_1 , poartă numele de *lentilă de câmp*, sau *lentilă colectoare* iar a doua lentilă, L_2 , de *lentilă de ochi*. Datorită aplicației sale principale, dubletul de lentile subțiri este sinonim cu *ocularul*. Acestea se clasifică în dublete (oculare) pozitive,

sau negative, după cum focarul obiect F_1 al sistemului este real (adică anterior lui L_1) sau, respectiv, virtual (adică după L_1). Evident, numai ocularul pozitiv poate fi utilizat ca lupă pentru observarea obiectelor reale și, respectiv, numai ocularul negativ pentru observarea obiectelor virtuale. Se obișnuiește ca orice dublet să fie caracterizat prin *simbolul* său, reprezentat de trei numere algebrice p, q, r , astfel că

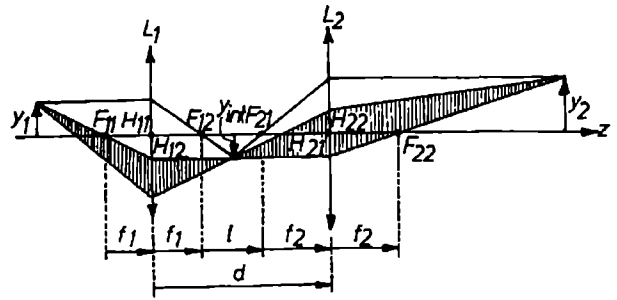


Fig.1.48. Sistemul dublet cu lentile subțiri.

$$\frac{f_1}{p} = \frac{d}{q} = \frac{f_2}{r} = \text{const.}, \quad (1.208)$$

unde constanta, din motive tehnice, nu poate fi mai mică decât câțiva milimetri. Câteva dublete, folosite în practică, sunt date în tabelul următor:

Ramsden:	1,	1,	1,	pozitiv
Ramsden modificat:	3,	2,	3,	pozitiv
Huygens:	4,	3,	2,	negativ
Dollond-Huygens:	3,	2,	1,	negativ
Wollaston:	2,	3,	6,	pozitiv

În continuare, vom deduce pe cale analitică formulele dubletului de lentile subțiri. Astfel, matricea de transfer a sistemului este

$$S = S_2 T S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -n/f_2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & d/n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -n/f_1 & 1 \end{bmatrix}$$

și are elementele

$$\begin{cases} S_{11} = 1 - d/f_1, \\ S_{22} = 1 - d/f_2, \\ S_{12} = d/n, \\ S_{21} = -n \left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2} \right). \end{cases} \quad (1.209)$$

Observăm că toate elementele matricei S sunt funcții liniare de distanța d dintre lentile, permițând astfel o ajustare convenabilă a elementelor cardinale în funcție de aplicația dorită. Din ecuațiile (1.188) și (1.209) obținem expresia convergenței dubletului

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2} = -\frac{\ell}{f_1 f_2}, \quad (1.210)$$

denumită și *formula lui Gullstrand*, precum și poziția punctelor cardinale

$$t_{p1} = -fd/f_2, \quad t_{p2} = -fd/f_1, \quad (1.211)$$

$$t_{f1} = f[1 - d/f_2] = f + t_{p1}, \quad t_{f2} = f[1 - d/f_1] = f + t_{p2}. \quad (1.212)$$

Mediile de imersie extreme fiind aceleași, avem și $t_{n1} = t_{p1}$, $t_{n2} = t_{p2}$. Am stabilit, astfel, toate elementele cardinale ale dubletului de lentile subțiri, și anume, distanța focală f , ecuația (1.210), punctele principale H_1, H_2 prin $t_{p1} = H_1H_{11}$, $t_{p2} = H_{22}H_2$, ecuația (1.211), și punctele focale F_1, F_2 prin $t_{f1} = F_1H_{11}$, $t_{f2} = H_{22}F_2$, ecuația (1.212). Mai putem determina poziția punctelor focale și din

$$\begin{cases} F_1F_{11} \equiv t_{f1} - f_1 = f_1^2/l, \\ F_{22}F_2 \equiv t_{f2} - f_2 = f_2^2/l. \end{cases} \quad (1.213)$$

Ultimele relații nu exprimă altceva decât chiar formula lui Newton, adică ecuația (1.183), dintre perechile de puncte conjugate F_1, F_{21} față de L_1 , respectiv F_{12}, F_2 față de L_2 .

Cele mai simple oculare, folosite la microscopie și telescopie, sunt *ocularul Huygens* și *ocularul Ramsden*, prezentate în fig.1.49. Elementele cardinale au fost calculate din ecuațiile (1.210) - (1.212) iar construcția imaginilor a fost realizată cu ajutorul razelor principale care trec prin focarele lentilelor componente. În ambele cazuri am presupus că ochiul, situat convenabil în spatele ocularului, privește relaxat imaginea finală (virtuală și situată la infinit), fapt ce implică localizarea imaginii furnizate de un sistem obiectiv (nearătat în figură) chiar în planul focal obiect F_1 al sistemului ocular. Dar, cum am văzut, punctele F_1 și F_{21} sunt conjugate față de lentila de câmp L_1 . Imaginea din F_1 reprezintă un obiect (virtual pentru ocularul Huygens și real pentru ocularul Ramsden) a cărui imagine (reală pentru ocularul Huygens și virtuală pentru ocularul Ramsden) este formată de lentila de câmp L_1 în planul focal obiect F_{21} al lentilei de ochi L_2 . Evident, imaginea finală furnizată de lentila L_2 (deci de întregul ocular) este virtuală și localizată la infinit. Ca și în cazul lupei, această imagine poate fi adusă până la distanța minimă de vedere distinctă (≈ 25 cm) prin deplasarea corespunzătoare a ocularului.

Cum vom arăta într-o altă secțiune (1.2.7), condiția de acromatizare a convergenței unui dublet de lentile subțiri, confecționate din aceeași sticlă, este

$$d = \frac{f_1 + f_2}{2}. \quad (1.214)$$

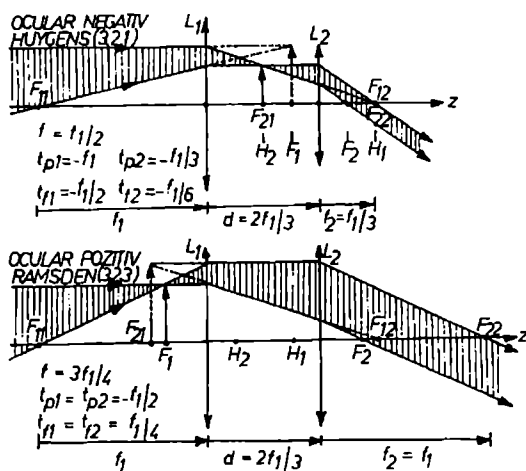


Fig.1.49. Ocularul Huygens (negativ) și ocularul Ramsden (pozitiv).

Se vede imediat că ocularele de tip Huygens (4,3,2,) și (3,2,1) satisfac această condiție. În plus, ocularul (3,2,1) mai are proprietatea că o rază incidentă paralelă cu axul optic principal suferă refracții de același unghi pe cele două lentile.* Această repartizare echilibrată a refracțiilor conduce la diminuarea aberațiilor de sfericitate. Mai observăm că și ocularul Ramsden (1, 1, 1) satisface ecuația (1.214). Însă, în acest caz, $d = f_2$ astfel că, din nefericire, planul focal F_{21} și imaginea corespunzătoare sunt localizate chiar pe lentila de câmp L_1 . Din această cauză, prin ocular se observă bine și orice impuritate sau defect de pe suprafețele acestei lentile (praf, pete, zgârieturi). Pentru a evita acest inconvenient cele două lentile ale dubletului se apropie puțin una de alta, până la $d = 2f_2/3$ menținând în continuare $f_1 = f_2$. Rezultă astfel *ocularul Ramsden modificat* (3, 2, 3), prezentat în fig.1.49, care nu mai îndeplinește strict condiția de acromatizare (1.214). Aberațiile cromatice, relativ slabe, ale acestui ocular sunt compensate în *ocularul Kellner* (3, 2, 3), la care singura modificare constă în înlocuirea lentilei de ochi cu un dublet de contact acromat realizat prin alipirea unei lentile convergente de sticlă crown de o lentilă divergentă de sticlă flint (vezi secțiunea 1.2.7). Ocularele de tip Ramsden au avantajul că permit montarea unui *micrometru ocular* în planul focal F_1 pentru măsurarea dimensiunilor imaginii reale formată de sistemul obiectiv.

În general, în practică, pentru asigurarea aplanetismului (vezi fig.1.24) și corectarea aberațiilor geometrice și cromatice supărătoare pentru aplicația dorită, obiectivele și ocularele sistemelor optice de mare performanță sunt ele însele sisteme compuse destul de complicate, cum se arată în fig.1.50 pentru un *ocular Erfle* cu $f = 25,4$ mm (Hopkins, 1962) și în fig.1.51 pentru un obiectiv de microscop cu apertura numerică $n_1 \sin \gamma_1 = 0,85$ și $f = 4,19$ mm (Ruben, 1964). Nu este în intenția noastră să introducem cititorul în complicațiile subtile ale proiectării sistemelor dioptrice moderne ci mai degrabă să îl familiarizăm cu evaluarea, folosirea și adaptarea sistemelor deja răspândite în practica curentă.

Nr.	n	V*	r (mm)	g (mm)
1	1,0		∞	5,5
2	1,638	55,5	-32,26	1,8
3	1,649	33,8	+36,36	11,5
4	1,638	55,5	-36,36	0,5
5	1,0		+81,30	8,0
6	1,638	55,5	-76,92	0,5
7	1,0		+42,74	12,0
8	1,638	55,5	-42,74	5,4
9	1,720	29,3	+62,89	
10	1,0			

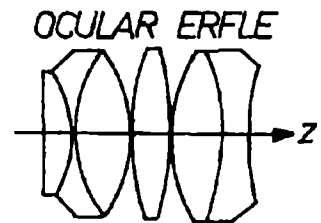


Fig.1.50. Ocularul Erfle.

* V este numărul lui Abbe (vezi secțiunea 1.2.7)

* Condiția pentru aceasta, în aproximația paraxială, este $f_1 - f_2 = d$ care, împreună cu $f_1 + f_2 = 2d$, ecuația (1.214), conduce la ocularul (3,2,1).

Nr.	n	V	r (mm)	g (mm)
1	1,0		-1,9055	3,39
2	1,620	60,3	-2,8576	0,10
3	1,0		-24,2100	1,60
4	1,620	60,3	-5,4450	0,10
5	1,0		∞	1,80
6	1,611	58,8	-10,1860	0,10
7	1,0		∞	1,40
8	1,620	60,3	-7,0469	0,70
9	1,751	27,8	+7,0469	0,06
10	1,0		+7,4473	1,80
11	1,517	64,5	+100,0000	0,44
12	1,0		-22,9090	3,60
13	1,617	54,9	-13,1830	4,70
14	1,0		-36,9830	3,90
15	1,720	36,2	-18,0300	9,00
16	1,0		+7,5858	3,67
17	1,617	54,9	+5,5463	
18	1,0			

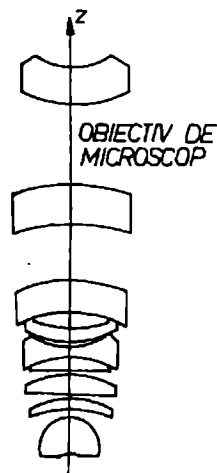


Fig.1.51. Obiectiv de microscop.

B. Dubletul de sisteme optice coaxiale

Până acum am învățat să calculăm matricea de transfer S a oricărui sistem optic centrat, și cu ajutorul ecuațiilor (1.188), să determinăm elementele cardinale ale acestuia. Cu aceasta am obținut schema optică echivalentă cu ajutorul căreia putem construi grafic imaginile. În continuare, pentru a înțelege mai bine funcționarea microscopelor și telescoapelor este necesar să generalizăm formulele dubletului de lentile subțiri, ecuațiile (1.210) - (1.213), pentru un **dublet de sisteme optice coaxiale oarecare**. Astfel, fie sistemul S (vezi fig.1.52) format din două subsisteme S_1 și S_2 , date prin matricele lor de transfer, respectiv, conform ecuațiilor (1.188), prin elementele lor cardinale și anume

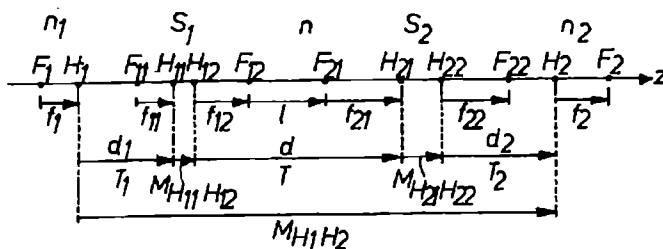


Fig.1.52. Elementele cardinale ale unui dublet de sisteme coaxiale.

$$S_1 : F_{11}, F_{12}, H_{11}, H_{12}; f_{11}, f_{12},$$

$$S_2 : F_{21}, F_{22}, H_{21}, H_{22}; f_{21}, f_{22}.$$

Vom nota cu ℓ intervalul optic, adică distanța $F_{12}F_{21}$ dintre focarele interioare ale dubletului, respectiv cu

$$d = f_{12} + f_{21} + \ell, \quad (1.215)$$

grosimea dubletului, adică distanța $H_{12}H_{21}$ dintre punctele principale interioare ale acestuia. Pentru generalitate, vom considera mediile de imersie diferite, și anume mediile extreme n_1, n_2 și mediul interior n . Problema constă în a determina, în funcție de aceste date, elementele cardinale ale sistemului compus, adică

$$S : F_1, F_2, H_1, H_2; f_1, f_2.$$

Metoda matriceală permite o analiză elegantă a sistemelor optice centrate compuse din mai multe subsisteme. Astfel, ținând cont de avantajul formei simple a matricei de transfer dintre planele principale, ecuația (1.176), în cazul dubletului de sisteme considerat aici avem

$$\begin{aligned} M_{H_1H_2} &= T_2 M_{H_{21}H_{22}} T M_{H_{11}H_{12}} T_1 = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & d_2/n_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ S_{21}^{(2)} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & d/n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ S_{21}^{(1)} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & d_1/n_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ S_{21} & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

După efectuarea produsului de matrice și identificare avem

$$S_{21} = S_{21}^{(1)} + S_{21}^{(2)} + S_{21}^{(1)} S_{21}^{(2)} \cdot \frac{d}{n}, \quad (1.216)$$

$$\frac{d_1}{n_1} = -\frac{S_{21}^{(2)}}{S_{21}} \cdot \frac{d}{n}, \quad \frac{d_2}{n_2} = -\frac{S_{21}^{(1)}}{S_{21}} \cdot \frac{d}{n}. \quad (1.217)$$

În continuare, vom înlocui elementele 21 prin distanțele focale corespunzătoare, conform definiției lor generale, ecuațiile (1.188), adică

$$\begin{cases} f_1 = -n_1/S_{21}, & f_{11} = -n_1/S_{21}^{(1)}, & f_{21} = n/S_{21}^{(2)} \\ f_2 = -n_2/S_{21}, & f_{12} = -n/S_{21}^{(1)}, & f_{22} = -n_2/S_{21}^{(2)} \end{cases}. \quad (1.218)$$

De aici avem, evident, și relațiile

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{n_1}{n_2}, \quad \frac{f_{11}}{f_{12}} = \frac{n_1}{n}, \quad \frac{f_{21}}{f_{22}} = \frac{n}{n_2}. \quad (1.219)$$

Din ecuația (1.216) obținem astfel *generalizarea formulei lui Gullstrand*, ecuația (1.210), adică

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{n_2 f_1} \equiv \frac{1}{n_1 f_2} = \frac{1}{n_2 f_{11}} + \frac{1}{n_1 f_{22}} - \frac{d}{n f_{11} f_{22}} = -\frac{\ell}{n f_{11} f_{22}}, \\ \frac{1}{f_1} = -\frac{\ell}{f_{11} f_{21}}, \quad \frac{1}{f_2} = -\frac{\ell}{f_{12} f_{22}}, \end{array} \right. \quad (1.220)$$

relații care permit determinarea distanțelor focale f_1, f_2 . Mai departe, din ecuația (1.217) rezultă generalizarea ecuațiilor (1.211), (1.212), adică

$$d_1 = -f_1 d / f_{21}, \quad d_2 = -f_2 d / f_{12}, \quad (1.221)$$

relații care permit determinarea punctelor principale H_1, H_2 din $H_1 H_{11} = d_1, H_2 H_2 = d_2$, respectiv a punctelor focale F_1, F_2 din $F_1 H_1 = f_1, H_2 F_2 = f_2$. Mai putem determina poziția punctelor focale și din

$$\left\{ \begin{array}{l} F_1 F_{11} = f_1 + d_1 - f_{11} = \frac{f_{11} f_{12}}{\ell}, \\ F_{22} F_2 = f_2 + d_2 - f_{22} = \frac{f_{21} f_{22}}{\ell}, \end{array} \right. \quad (1.222)$$

relații care generalizează ecuațiile (1.213).

Mai sus am determinat pe cale analitică elementele cardinale ale dubletului de sisteme. Într-un alt mod, acestea pot fi stabilite și grafic cu ajutorul razelor principale care trec prin focare, așa cum se arată în fig.1.53. Astfel, razele principale de tipul $I J F_{12} K L F_2 M$, care se propagă de la stânga spre dreapta, determină punctele cardinale F_2, H_2 . În mod similar, razele principale de tipul $M N F_{21} O P F_1 I$, care se propagă de la dreapta spre stânga, determină punctele cardinale F_1, H_1 . Formulele dubletului de sisteme rezultă direct din geometria figurii 1.53. Astfel, din asemănarea triunghiurilor hașurate în același fel, avem rapoartele

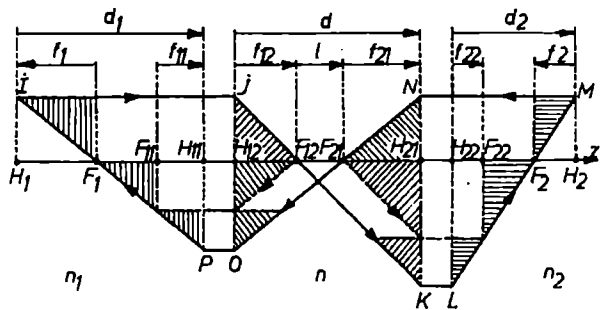


Fig.1.53. Construirea imaginii într-un sistem dublet și determinarea elementelor cardinale ale sistemului global.

$$-f_1 / f_{11} = f_{21} / \ell, \quad -f_2 / f_{22} = f_{12} / \ell, \quad (1.223)$$

$$-f_1 / d_1 = f_{21} / d, \quad -f_2 / d_2 = f_{12} / d, \quad (1.224)$$

$$F_1 F_{11} / f_{11} = f_{12} / \ell, \quad F_{22} F_2 / f_{22} = f_{21} / \ell, \quad (1.225)$$

care exprimă, respectiv, ecuațiile (1.220), (1.221), (1.222). Remarcăm că relațiile (1.222), (1.225) reprezintă formula lui Newton, adică ecuația (1.183), dintre perechi de puncte conjugate, și anume perechea F_1, F_{21} față de sistemul S_1 , respectiv perechea F_{12}, F_2 față de sistemul S_2 . Evident, construcțiile geometrice prezintă avantajul că sunt intuitive.

În cazul particular, cel mai des întâlnit în practică, în care sistemele S_1, S_2 sunt imersate în același mediu ($n_1 = n = n_2$) vom simplifica notația (sperăm fără risc de confuzie) prin înlocuirile

$$f_1 = f_2 \rightarrow f,$$

$$f_{11} = f_{12} \rightarrow f_1,$$

$$f_{21} = f_{22} \rightarrow f_2,$$

astfel că ecuațiile (1.220), (1.221), (1.222) devin respectiv

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2} = -\frac{\ell}{f_1 f_2}, \quad (1.226)$$

$$d_1 = -fd/f_2, \quad d_2 = -fd/f_1, \quad (1.227)$$

$$F_1 F_{11} = f_1^2/\ell, \quad F_{22} F_2 = f_2^2/\ell \quad (1.228)$$

Este remarcabil faptul că ecuațiile (1.226) - (1.228) ale dubletului de sisteme coaxiale oarecare generalizează în aceeași formă ecuațiile dubletului de lentile subțiri, adică ecuațiile (1.210) - (1.213).

C. Sisteme focale și sisteme afocale (telescopice)

Să aplicăm teoria elaborată mai sus la analiza unor sisteme de interes practic. Vom considera, mai întâi, clasa de *sisteme focale* ($S_{21} \neq 0$), destinate să formeze imagini reale sau virtuale cu o mărire liniară transversală cât mai mare. În continuare, vom presupune că mediile extreme sunt identice astfel că ecuația (1.184) se scrie

$$m_t = \frac{f}{f-p_1} = \frac{f-p_2}{f}. \quad (1.229)$$

Să considerăm mai întâi *obiectivul fotografic*. Acesta este un sistem optic convergent ($f > 0$) compus dintr-un număr oarecare de lentile cum este, de exemplu, obiectivul Tessar (fig.1.29,b) destinat să formeze imagini reale ale obiectelor exterioare. Cel mai adesea obiectele fotografice sunt suficient de îndepărtate astfel că $p_1 \gg f > 0$ și din ecuația (1.229) rezultă

$$m_t \approx -f/p_1 < 0, \quad |m_t| \ll 1. \quad (1.230)$$

Imaginea este răsturnată, iar mărirea m_t este proporțională cu distanța focală f a obiectivului. Dacă detaliile imaginii sunt prea mici, ele nu mai pot fi recunoscute datorită structurii granulare a materialului fotografic. Din acest motiv, trebuie folosite obiective cu

distanță focală mare. Aceasta, însă, implică lungirea camerei fotografice deoarece imaginea se formează practic în planul focal imagine F_2 .

O creștere substanțială a distanței focale, pentru fotografierea detaliilor obiectelor îndepărtate, menținând o lungime relativ mică a camerei fotografice, se realizează cu ajutorul dubletului *teleobiectiv*, format din sistemul convergent $S_1 (f_1 > 0)$ și sistemul divergent $S_2 (f_2 < 0)$. Folosind ecuația (1.226), expresia măririi (1.230) devine

$$m_t \approx f_1 f_2 / \ell p_1 < 0, \quad (1.231)$$

unde $f_1, \ell, p_1 > 0$ și $f_2 < 0$. Rezultă astfel condiția $\ell = d - f_1 + |f_2| > 0$ adică $|f_2| > f_1 - d > 0$, care trebuie satisfăcută pentru valori $f = f_1 |f_2| / \ell$ cât mai mari. Să ilustrăm această discuție cu exemplul numeric $f_1 = 20$ cm, $f_2 = -10$ cm, $d = 15$ cm, de unde, cu ajutorul ecuațiilor (1.226), (1.227), obținem $f = 40$ cm, $d_1 = 60$ cm, $d_2 = -30$ cm (fig. 1.54). Observăm că, deși distanța focală a sistemului este mare, lungimea camerei fotografice, egală cu $|f_2|$, rămâne mică (deoarece punctele cardinale ale teleobiectivului sunt deplasate mult în față). În practică, cele două componente S_1, S_2 sunt dublete acromate (vezi secțiunea 1.2.7).

Să considerăm în continuare *microscopul compus*, care constă dintr-un obiectiv convergent ($f_1 > 0$) care formează o imagine intermediară inversată y_{int} , și un ocular convergent ($f_2 > 0$) cu rol de lupă, care formează imaginea finală virtuală. Principiul este demonstrat în fig.1.55 unde, pentru ilustrare, am luat (în unități arbitrare) $f_1 = 17$, $f_2 = 20$, $\ell = 53$, deci $d = f_1 + f_2 + \ell = 90$; de aici, prin calcul, cu ecuațiile (1.226), (1.227), sau construcție grafică, avem $f \approx -6,5$, $d_1 \approx 29$, $d_2 \approx 34$. De exemplu, pentru $p_1 = 22$ rezultă $p_2 = -120$ și $m_t \approx -19$. Remarcăm că, pentru a asigura o apertură numerică $n_1 \sin \gamma_1$ cât mai mare, obiectele trebuie să fie foarte apropiate de primul plan focal (F_{11}) al obiectivului, practic localizate în primul plan focal (F_1) al sistemului.

În general, conform ecuațiilor (1.226), (1.229), avem

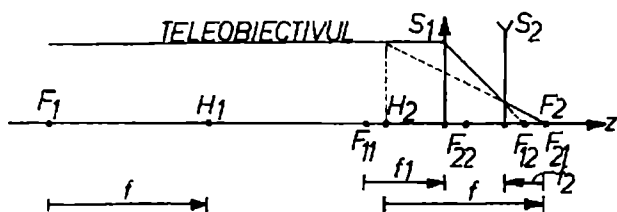


Fig.1.54. Schema simplificată a unui teleobiectiv.

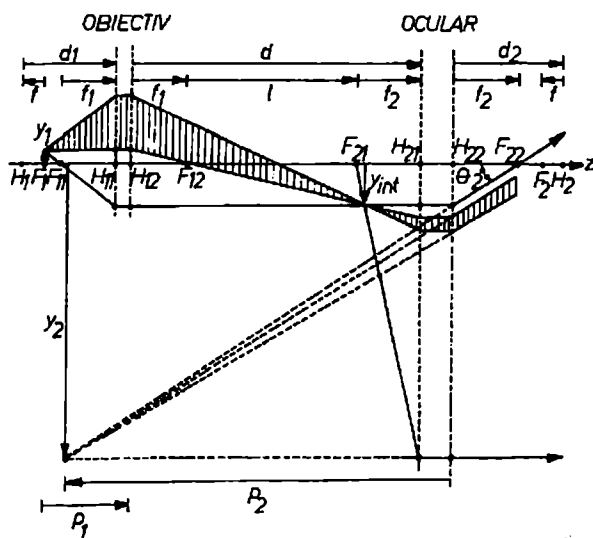


Fig.1.55. Formarea imaginii în microscopul compus și elementele sale cardinale.

$$m_t = 1 - \frac{p_2}{f} = 1 + \frac{|p_2|}{f} = 1 - \frac{\ell|p_2|}{f_1 f_2} \approx -\frac{\ell|p_2|}{f_1 f_2} < 0, \quad (1.232)$$

unde semnul minus înseamnă că imaginea finală este inversată. Aproximația făcută la ecuația (1.232) este foarte bună întrucât ne interesează numai cazul $p_2/f = \ell|p_2|/f_1 f_2 \gg 1$. Mai departe, din ecuațiile (1.205), (1.206) rezultă *grosismetul*

$$G \approx \frac{1}{4f} = -\frac{\ell}{4f_1 f_2}, \quad (\ell, f, f_1, f_2 \text{ în metri}). \quad (1.233)$$

În comparație cu grosismetul lupei simple, formată dintr-o singură lentilă, *grosismetul microscopului compus* poate fi crescut cu câteva ordine de mărime, atât prin micșorarea distanțelor focale ale obiectivului și ocularului cât, mai ales, prin creșterea corespunzătoare a distanței ℓ dintre focarele interioare (valorile standard pentru multe microscopice sunt $\ell = 150 \div 160$ mm). Astfel, de exemplu, un grosisment mediu $G \approx -160$ se realizează cu $f_1 = f_2 = 16$ mm și $\ell = 160$ mm ($d = f_1 + f_2 + \ell = 192$ mm); în acest caz, din ecuațiile (1.226), (1.227) avem $f = 1,6$ mm și $d_1 = d_2 = 19,2$ mm. Combinații între diverse obiective și oculare conduc în practică la valori în intervalul $|G| \approx 25 \div 3000$. În principiu, grosismetul $|G| = \ell/4f_1 f_2$, ecuația (1.233), poate fi oricât de mare. *Grosismetul util* este însă limitat de puterea de rezoluție a obiectivului și a ochiului observatorului. Astfel, ținând cont că $\theta_2 = G\theta_1 \geq (\gamma_1)_{\min}^{\text{ochi}}$, din ecuațiile (1.123) și (1.189) rezultă *grosismetul util maxim*

$$|G| = \frac{|p_2|(\gamma_1)_{\min}^{\text{ochi}}}{(\delta r_1)_{\min}} = \frac{|p_2|(\gamma_1)_{\min}^{\text{ochi}}}{0,61\lambda_0} n_1 \sin \gamma_1.$$

Luând $(\gamma_1)_{\min}^{\text{ochi}} \approx 1' \approx (1/3400)\text{rad}$, $\lambda_0 \approx 500$ nm = $5 \cdot 10^{-5}$ cm și $|p_2| = 25$ cm avem $|G| \approx 250 n_1 \sin \gamma_1$, adică $|G| \approx 250$ pentru obiectiv sec ($n_1 \sin \gamma_1 \approx 1$) și $|G| \approx 375$ pentru obiectiv cu imersie ($n_1 \sin \gamma_1 \approx 1,5$). Pentru a evita obosirea ochiului prin forțare la limita propriei puteri separatoare ($\approx 1'$) se recomandă folosirea unui grosisment de circa patru ori mai mare decât aceste valori, de unde rezultă *regula utilă* $|G| = 1000 \div 1500$. Dacă excesul de grosisment este prea mare, apare dezavantajul că observăm figurile difuze de difracție (discurile Airy) asociate punctelor obiect luminoase (vezi Cap. II), fără alte detalii.

Spre deosebire de sistemele focale ($S_{21} \neq 0$) discutate mai sus, *sistemele afocale sau telescopice* ($S_{21} = 0$) au distanțele focale infinite și punctele cardinale la infinit (conform ecuațiilor (1.188)). Cum am arătat în secțiunea 1.2.3, aceste sisteme au proprietatea generală că transformă orice fascicul paralel tot într-un fascicul paralel (fig. 1.32) cu mărirea unghiulară

$$m_u = n_1 S_{22}/n_2 = n_1/n_2 S_{11}, \quad (1.234)$$

aceeași pentru toate razele conjugate, deoarece m_u este o constantă a sistemului. Conform condițiilor de stigmatism Abbe și Herschel (ecuațiile (1.98) și (1.102)) în aproximația paraxială avem de asemenea

$$m_t = n_1/n_2 m_u = S_{11} = 1/S_{22}, \quad (1.235)$$

$$m_a = n_1/n_2 m_u^2 = n_2 S_{11}^2/n_1 = n_2/n_1 S_{22}^2, \quad (1.236)$$

unde am ținut cont că, pentru sisteme afocale, $\det S = S_{11}S_{22} = 1$. Rezultă astfel că și măririle liniare transversală și axială sunt constante ale sistemului, adică sunt independente de poziția obiectului. Acest rezultat apare evident prin construcție geometrică, așa cum este ilustrat în fig.1.56 pentru mărirea m_t cu ajutorul unei perechi de raze conjugate paralele cu axul optic.

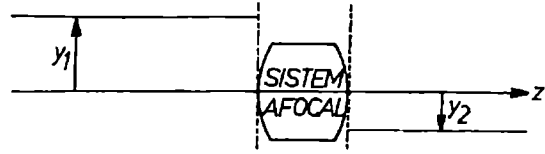


Fig.1.56. Sistem afocal (telescopic) simplu.

Expresiile măririlor liniare (1.235), (1.236) pot fi deduse și prin metoda matriceală. Astfel, ținând cont de condiția de definiție $S_{21} = 0$ a sistemelor afocale și de expresiile (1.234) ale măririi unghiulare, elementele (1.156) - (1.159) ale matricei de transfer între două plane de referință oarecare devin

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{11} = S_{11} = n_1/n_2 m_u, \\ M_{22} = S_{22} = n_2 m_u/n_1, \\ M_{21} = S_{21} = 0, \\ M_{12} = \frac{S_{11}}{n_1} t_1 + \frac{S_{22}}{n_2} t_2 + S_{12} = \frac{1}{n_2 m_u} t_1 + \frac{m_u}{n_1} t_2 + S_{12}, \end{array} \right. \quad (1.237)$$

astfel că relația planelor conjugate $M_{12} = 0$ se mai scrie

$$t_2 = -\frac{n_1 t_1}{n_2 m_u} - \frac{n_1 S_{12}}{m_u}. \quad (1.238)$$

Matricea de transfer între plane conjugate ale sistemelor afocale are astfel două forme echivalente, date de ecuația (1.173), respectiv de ecuațiile (1.237), adică

$$M_{P_1 P_2} = \begin{bmatrix} m_t & 0 \\ 0 & m_t^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1/n_2 m_u & 0 \\ 0 & n_2 m_u/n_1 \end{bmatrix} \quad (1.239)$$

de unde, prin identificare, rezultă ecuația (1.235). De asemenea, conform definiției

def $m_a = -dt_2/dt_1$, prin derivarea ecuației (1.238) obținem ecuația (1.236).

Să considerăm în continuare *dublețul afocal* de sisteme coaxiale (fig.1.57). În acest caz, formula lui Gullstrand (1.220) pentru sisteme afocale ($S_{21} = 0$, adică $1/f_1 = 1/f_2 = 0$) devine

$$\frac{n}{n_1}f_{11} + \frac{n}{n_2}f_{22} = d,$$

sau, ținând cont că $f_{11}/f_{12} = n_1/n$, $f_{21}/f_{22} = n/n_2$, ecuația (1.219),

$$f_{12} + f_{21} = d,$$

condiție echivalentă cu aceea de coincidență a focarelor interioare F_{12} și F_{21} .

Pentru calculul măririlor este necesar să determinăm elementele diagonale S_{11} , S_{22} și să impunem condiția $S_{21} = 0$. Vom proceda mai întâi la înmulțirea matricelor conform fig.1.57 și anume

$$S = S_2 T S_1 = \begin{bmatrix} S_{11}^{(2)} & S_{12}^{(2)} \\ S_{21}^{(2)} & S_{22}^{(2)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & t/n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_{11}^{(1)} & S_{12}^{(1)} \\ S_{21}^{(1)} & S_{22}^{(1)} \end{bmatrix}, \quad (1.240)$$

unde știm că

$$\begin{cases} \det S_1 = S_{11}^{(1)} S_{22}^{(1)} - S_{12}^{(1)} S_{21}^{(1)} = 1, \\ \det S_2 = S_{11}^{(2)} S_{22}^{(2)} - S_{12}^{(2)} S_{21}^{(2)} = 1. \end{cases} \quad (1.241)$$

Obținem astfel generalizarea ecuațiilor (1.209) în forma

$$\begin{cases} S_{11} = S_{11}^{(1)} S_{11}^{(2)} + S_{21}^{(1)} S_{12}^{(2)} + (t/n) S_{21}^{(1)} S_{11}^{(2)}, \\ S_{22} = S_{22}^{(1)} S_{22}^{(2)} + S_{12}^{(1)} S_{21}^{(2)} + (t/n) S_{22}^{(1)} S_{21}^{(2)}, \\ S_{12} = S_{12}^{(1)} S_{11}^{(2)} + S_{22}^{(1)} S_{12}^{(2)} + (t/n) S_{22}^{(1)} S_{11}^{(2)}, \\ S_{21} = S_{11}^{(1)} S_{21}^{(2)} + S_{21}^{(1)} S_{22}^{(2)} + (t/n) S_{21}^{(1)} S_{21}^{(2)}, \end{cases} \quad (1.242)$$

unde toate elementele sistemului compus sunt funcții liniare de distanța redusă t/n dintre sistemele componente. Condiția $S_{21} = 0$ ca sistemul compus să fie afocal se realizează pentru

$$\frac{t}{n} = -\frac{S_{11}^{(1)} S_{21}^{(2)} + S_{21}^{(1)} S_{22}^{(2)}}{S_{21}^{(1)} S_{21}^{(2)}}. \quad (1.243)$$

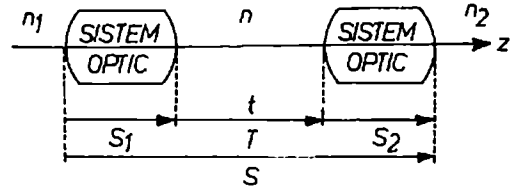


Fig.1.57. Dublet afocal de sisteme coaxiale.

Introducând această distanță redusă în ecuațiile (1.242), ținând cont de ecuațiile (1.241) și înlocuind elementele S_{11} prin distanțele focale corespunzătoare, obținem matricea sistemului compus afocal în forma

$$S = \begin{bmatrix} -f_{21}/f_{12} & (f_{12}S_{11}^{(2)} + f_{21}S_{22}^{(1)})/n \\ 0 & -f_{12}/f_{21} \end{bmatrix}. \quad (1.244)$$

Expresiile generale ale măririlor (1.234) - (1.236) devin în acest caz

$$\begin{cases} m_u = \frac{n_1}{n_2} S_{22} = -\frac{f_{11}}{f_{22}}, \\ m_t = S_{11} = -\frac{f_{21}}{f_{12}}, \\ m_a = \frac{n_2}{n_1} S_{11}^2 = \frac{f_{21}f_{22}}{f_{11}f_{12}}. \end{cases} \quad (1.245)$$

Pentru comparație cu metoda analitică prezentată mai sus, fig.1.58 arată construcția geometrică a imaginii într-un dublet afocal

cu ajutorul razelor principale care trec prin focarele F_{11} , $F_{12} = F_{21}$, F_{22} ale celor două subsisteme componente S_1 , S_2 . Mai întâi observăm că, din asemănarea triunghiurilor $IH_{12}F_{12}$ și $JH_{21}F_{21}$ rezultă $m_t = y_2/y_1 = -f_{21}/f_{12} = \text{const.}$ pentru orice pereche de plane conjugate. Apoi, din invariantul Lagrange-Helmholtz $n_1 y_1 \gamma_1 = n_2 y_2 \gamma_2$ (ecuația (1.97)), avem

$m_u = \gamma_2/\gamma_1 = n_1 y_1/n_2 y_2 = -n_1 f_{12}/n_2 f_{21} = -f_{11}/f_{22}$. În fine, aplicând succesiv formula lui Newton, ecuația (1.183), avem $\zeta_1 \zeta_{int} = f_{11} f_{12}$, $-\zeta_{int} \zeta_2 = f_{21} f_{22}$, de unde, prin eliminarea lui ζ_{int} și diferențiere, rezultă $m_a = -d\zeta_2/d\zeta_1 = f_{21} f_{22}/f_{11} f_{12}$. Am obținut astfel, pe o cale geometrică intuitivă, expresiile măririlor (1.245).

În particular dacă mediile extreme și intermediar sunt aceleași ($n_1 = n = n_2$) vom nota $f_{11} = f_{12} = f_1$, $f_{21} = f_{22} = f_2$ astfel că formulele (1.240), (1.245) ale dubletului afocal se scriu simplu

$$f_1 + f_2 = d, \quad (1.246)$$

$$m_u = -f_1/f_2, \quad m_t = -f_2/f_1, \quad m_a = (f_2/f_1)^2. \quad (1.247)$$

Remarcăm că acestea sunt identice cu formulele dubletului afocal de lentile subțiri, cum ne putem convinge folosind elementele de matrice (1.209).

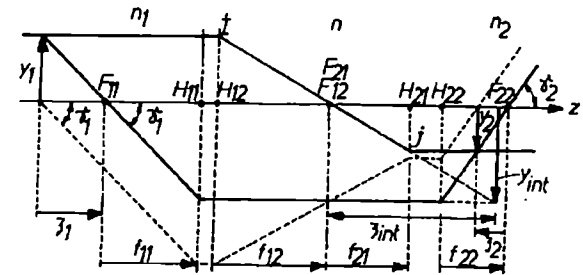


Fig.1.58. Construcția imaginii într-un dublet afocal.

O aplicație relevantă a dubletului afocal este *telescopul de refracție* sau *luneta*, instrument optic destinat observării obiectelor îndepărtate. Ca și microscopul compus, aceasta constă dintr-un obiectiv convergent S_1 ($f_1 > 0$) care dă o imagine intermediară inversată y_{int} , și un ocular S_2 , convergent sau divergent, care joacă rolul de lupă. Datorită distanțelor foarte mari până la obiectul cercetat, și spre deosebire de microscop, imaginea intermediară se formează în planul focal imagine (F_{12}) al unui obiectiv de distanță focală mare. În mod normal, telescopul, funcționează ca dublet afocal astfel că ocularul, mobil, este deplasat până la coincidența focarelor interioare, $F_{12} = F_{21}$, pentru ca ochiul să privească relaxat (neacomodat) imaginea finală virtuală localizată la infinit. În figurile următoare este ilustrat principiul lunetei pentru trei variante: *luneta astronomică* sau *luneta lui Kepler* ($f_1 > 0, f_2 > 0$, deci $m_u < 0$), fig.1.59,a, *luneta lui Galilei* ($f_1 > 0, f_2 < 0$, deci $m_u > 0$), fig.1.59,b, și *luneta terestră* ($f_1 > 0, f_v > 0, f_2 > 0$, deci $m_u > 0$), fig.1.60, unde, pentru conveniență, sistemele componente sunt reprezentate prin lentile subțiri L_1, L_2, L_v , cu distanțele focale corespunzătoare $f_1, |f_2|, f_v$ în raportul 7 : 3 : 4. Lentila intermediară sau *lentila vehicul* L_v introdusă în luneta terestră, reprezintă sistemul convergent care asigură redresarea imaginii cu raportul $m_t = -f_v/\zeta_1 = -\zeta_2/f_v = -1$ (vezi ecuația (1.185)). Observăm că, la mărire unghiulară egală (în cazurile discutate aici $|m_u| = 7/3$), luneta lui Galilei ($d = f_1 - |f_2|$) este mai scurtă, iar luneta terestră ($d = f_1 + f_2 + 4f_v$) este mai lungă decât luneta astronomică ($d = f_1 + f_2$).

În general, datorită depărtării mari a obiectelor observate, razele utile care traversează obiectivul au o înclinare γ_1 foarte mică față de axul optic. În acest caz, aberația cea mai importantă este aberația cromatică axială. Din acest motiv, obiectivul telescoapelor de refracție reprezintă, în practică, un sistem acromatizat de lentile alipite, de regulă dublet sau triplet acromat.

Deseori, în locul observației vizuale se preferă înregistrarea fotografică. Pentru astfel de aplicații, în continuare (și coaxial cu sistemul telescopic) se montează un sistem de formare a unei imagini finale reale, cum este dubletul teleobiectiv discutat mai înainte.

O altă aplicație interesantă a dubletului afocal este aceea de *expandor de fascicul*, folosit pentru creșterea secțiunii transversale a unui fascicul îngust de radiație laser. Pentru aceasta, în fig.1.59, fasciculul laser se trimite axial, de la dreapta spre stânga. Observăm că dubletul galileian (b) este preferabil celui keplerian (a) la puteri laser mari, pentru a evita ionizarea și străpungerea optică a aerului în focarul interior real. Cum rezultă din geometria figurii, raportul liniar de expandare al unui fascicul axial (sau, în general, paraxial) este egal cu modulul măririi unghiulare $|m_u| = |f_1/f_2|$.

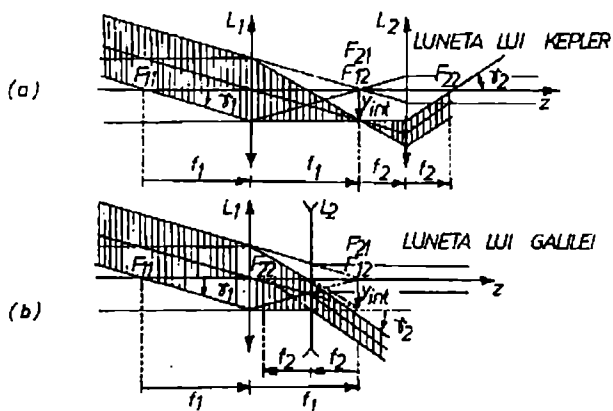


Fig.1.59. Luneta lui Kepler (a) și luneta lui Galilei (b).

D. Sistemul triplet

Până acum am analizat proprietățile de formare a imaginilor cu ajutorul unui dublet de sisteme dioptrice coaxiale. Este interesant de extins formulele obținute pentru triplet ș.a.m.d., datorită posibilităților suplimentare de ajustare a distanțelor dintre sistemele componente. Astfel, ca și în cazul dubletului, formulele pentru *sistemul triplet* se deduc din matricea de transfer corespunzătoare $S = S_3 T_2 S_2 T_1 S_1$. Pentru ilustrare, să considerăm un triplet de lentile subțiri, imersat în același mediu, de tipul reprezentat în fig.1.60. În acest caz, formula convergenței, a lui Gullstrad, ecuația (1.210), se extinde în forma

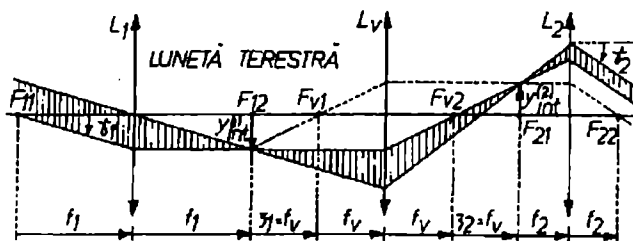


Fig.1.60. Luneta terestră

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_3} - \frac{1}{f_1} \left(\frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_3} \right) d_{12} - \frac{1}{f_3} \left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \right) d_{23} + \frac{d_{12} d_{23}}{f_1 f_2 f_3}, \quad (1.248)$$

unde d_{12} și d_{23} sunt distanțele dintre prima și a doua lentilă, respectiv dintre a doua și a treia lentilă. Vom folosi această expresie pentru descrierea principiului de funcționare al unui sistem "Zoom" (*transfocator*). Prin definiție, un astfel de sistem permite variația continuă a distanței sale focale, deci a măririi, fără a schimba poziția imaginii. Aceasta se realizează cel mai simplu cu un triplet de lentile subțiri prin modificarea poziției lentilei din mijloc față de celelalte două, care rămân fixe. Notând distanța dintre acestea cu d , avem $d_{12} = x$ și $d_{23} = d - x$, astfel că expresia convergenței, ecuația (1.248), capătă forma $1/f = F(x) = Ax^2 + Bx + C$, unde A, B, C sunt constante. Ecuația $F(x) = 0$ admite, în general, două rădăcini, x_1, x_2 , în afara cărora convergența $1/f \neq 0$. Pentru a realiza distanțe focale mari și variabile, sistemul este proiectat astfel încât să permită excursii în jurul acestor rădăcini. De regulă, se mai impune condiția suplimentară ca rădăcinile să fie confundate pentru ca deplasările lentilei din mijloc în jurul poziției $x_1 = x_2$ să aibă consecințe simetrice.

E. Sisteme reflectante (catoptrice)

Spre deosebire de sistemele dioptrice considerate până acum, *sistemele reflectante (catoptrice)* prezintă avantajul important că nu au aberații cromatice. În plus, la dimensiuni mari, sunt mult mai ușor de fabricat oglinzi decât lentile. Aceste avantaje au fost folosite în construcția *telescoapelor de reflexie*, cum se arată în fig.1.61 pentru variantele lor principale (Newton, Herschel, Gregory, Cassegrain), în care rolul obiectivului îl joacă o oglindă parabolică concavă (oglindea principală). În calea razelor reflectate de acest obiectiv se interpune o mică oglindă (oglindea secundară) care deplasează planul focal F al sistemului într-o poziție convenabilă pentru un instrument vizual (ocularul), pentru suportul plăcii sau filmului de fotografiat, pentru receptorii fotoelectrici sau pentru analiza spectrală. Excepție

face numai *telescopul lui Herschel*, în care deplasarea focarului F se realizează direct, printr-o ușoară înclinare a oglinzii principale (aleasă de distanță focală suficient de mare). În telescopul lui Newton (sau telescopul cu viziune laterală) este folosită o oglindă secundară plană care deviază fasciculul perpendicular pe axul optic. În *telescopul lui Gregory* focarul oglinzii principale parabolice coincide cu primul focar al unei oglinzi secundare eliptice concave, astfel că focarul F al întregului sistem se formează în al doilea focar al acesteia iar fasciculul iese axial printr-un mic orificiu circular practicat în centrul oglinzii principale. În mod similar funcționează și *telescopul lui Cassegrain*, cu singura deosebire că oglinda secundară este hiperbolică și convexă. În aceste telescoape este folosită proprietatea de stigmatism riguros a focarelor suprafețelor carteziene de reflexie (paraboloidul, elipsoidul și hiperboloidul), cum am arătat în

secțiunea 1.1.3. Focarele acestor suprafețe nu sunt însă și aplanetice astfel că deschiderea unghiulară în care se pot obține imagini clare este de numai câteva minute de arc. O soluție ingenioasă este folosită în *sistemul optic al lui Schmidt* (fig.1.61) în care aberațiile de sfericitate ale oglinzii principale sferice (nu parabolice) sunt eliminate cu ajutorul unei lame refringente corectoare potrivite, care are o suprafață plană și o suprafață șlefuită după o curbă ușor toroidală. În acest fel, razele marginale și razele paraxiale sunt aduse în același focar F unde se află suportul sferic al filmului fotografic. Datorită deschiderii sale unghiulare foarte mari, de aproximativ 25° , telescopul lui Schmidt reprezintă un instrument ideal pentru cercetarea cerului de noapte. Acest sistem este compus din elemente reflectante

(catoptrice) și refringente (dioptrice), făcând astfel parte din categoria *sistemelor catadioptrice*. Din aceeași categorie face parte și *telescopul lui Maksutov* (fig.1.61), cu oglindă secundară convexă sau concavă, în care aberația de sfericitate a oglinzii principale sferice este corectată cu ajutorul unei lentile menisc, mult mai ușor de confecționat decât suprafața asferică a lamei corectoare Schmidt.

Ca și în cazul microscopului (vezi formula lui Abbe, ecuația (1.123)), difracția luminii (Cap. II) impune o limită inferioară pentru deschiderea unghiulară γ_1 dintre cele două surse punctuale îndepărtate (de exemplu dintre componentele unei stele duble) care mai poate fi rezolvată de obiectivul unui telescop, și anume

$$(\gamma_1)_{\min} = 1,22 \frac{\lambda}{D}, \quad (1.249)$$

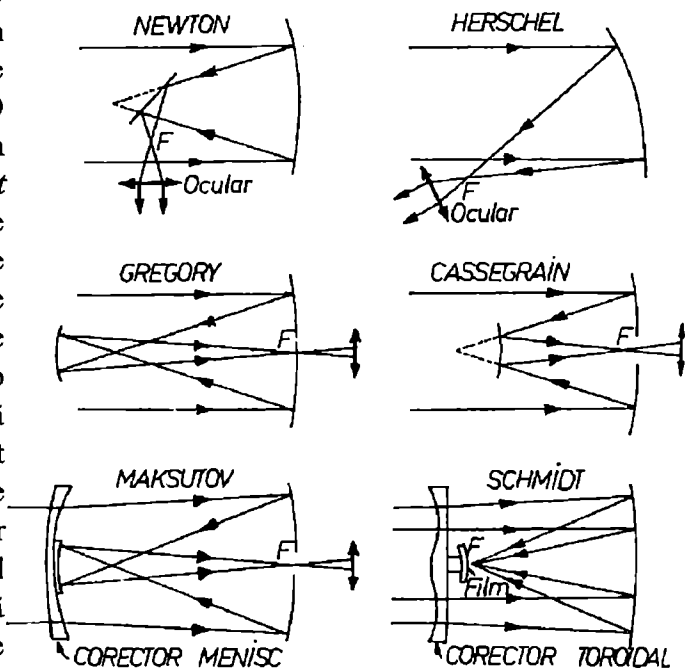


Fig.1.61. Principalele tipuri de telescoape de reflexie.

unde D este diametrul lentilei sau oglinzii obiectivului. *Puterea de rezoluție unghiulară a telescopului*, definită ca $1/(\gamma_1)_{\min}$, este astfel proporțională cu D/λ .

Pentru ilustrare, să considerăm mai întâi ochiul care, atunci când observă obiecte îndepărtate, se comportă ca un obiectiv de telescop de refracție. Considerând $D \approx 2$ mm, corespunzător diametrului pupilei ochiului relaxat la lumina zilei, și $\lambda \approx 500$ nm, din ecuația (1.249) rezultă $(\gamma_1)_{\min} \approx 1'$. Este remarcabil faptul că această valoare coincide cu limita fiziologică dată de structura granulară a retinei, ecuația (1.189). Aceasta înseamnă că ochiul uman realizează maximul din ceea ce permite limita fundamentală, ecuația (1.249), impusă de natura ondulatorie a luminii. Pentru comparație cu ochiul, în tabelul următor sunt date diametrele câtorva telescoape și deschiderea unghiulară minimă pentru $\lambda \approx 500$ nm. Cele mai mari diametre sunt la Yerkes pentru refractor și în Caucaz pentru reflector.

Obiectiv	D (cm)	$(\gamma_1)_{\min}$	Observatorul
ochiul	0,2	1'	
lentilă	12	1"	
oglină parabolică	50	0,24"	București
lentilă	75	0,16"	Pulkovo, Rusia
lentilă	102	0,12"	Yerkes, SUA
oglină parabolică	258	0,047"	Mount Wilson, SUA
oglină parabolică	508	0,024"	Mount Palomar, SUA
oglină parabolică	600	0,020"	Caucaz

În practică, telescoapele de refracție sunt folosite pentru măsurători de unghiuri și observarea suprafețelor planetelor iar telescoapele de reflexie (mai ales) pentru analiza spectrală a luminii provenite de la corpurile cerești. Puterea de rezoluție utilizabilă la altitudine mică nu depășește valoarea corespunzătoare la $(\gamma_1)_{\min} \approx 0,5''$ datorită fluctuațiilor indicelui de refracție de-a lungul traiectoriei razelor de lumină prin atmosfera terestră. De aceea, locul în care sunt instalate marile observatoare astronomice este ales în funcție de calitățile optice ale atmosferei sale. Influența detrimentală a agitației atmosferice se poate elimina complet numai prin instalarea telescoapelor la bordul navelor spațiale sau pe suprafața Lunii.

În principiu, mărirea unghiulară $m_u = -f_1/f_2$, ecuația (1.247), poate fi oricât de mare dacă distanța focală f_1 a obiectivului este foarte mare iar distanța focală f_2 a ocularului este foarte mică. În practică, lungimea telescopului este determinată de distanța focală f_1 a obiectivului. *Mărirea unghiulară utilă* a telescopului este limitată însă de puterea de rezoluție a obiectivului și a ochiului observatorului. Astfel, ținând cont că $\gamma_2 = m_u \gamma_1 \geq (\gamma_1)_{\min}^{\text{ochi}}$ din ecuațiile (1.189) și (1.249) rezultă mărirea unghiulară utilă maximă

$$|m_u| = (\gamma_1)_{\min}^{\text{ochi}} D/1,22\lambda.$$

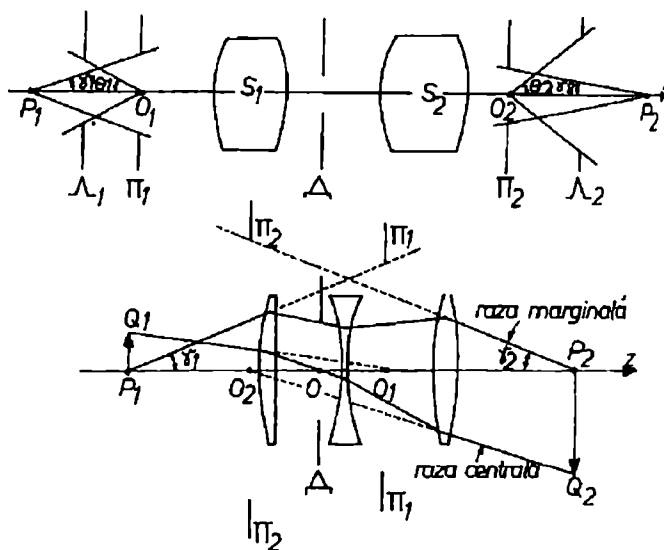
Luând $(\gamma_1)_{\min}^{\text{ochi}} \approx 1' \approx (1/3400)\text{rad}$ și $\lambda \approx 5000 \text{ \AA} = 5 \cdot 10^{-5} \text{ cm}$, avem $|m_u| \approx 5D$ (cm). Practic însă, recunoașterea detaliilor la limita de rezoluție unghiulară a ochiului implică un efort de atenție considerabil, astfel că se recomandă folosirea unei mărimi

unghiulare de circa 4 ori mai mare, de unde rezultă *regula utilă* $|m_u| \approx 20 D$ (cm). Creșterea mai departe a măririi unghiulare peste această valoare nu mai îmbunătățește vizibilitatea obiectului ci numai pe aceea a discurilor difuze Airy de difracție (vezi Cap. II).

1. 2. 6. Diafragme

În studiul sistemelor optice centrate ne-am interesat, până acum, numai de formarea imaginilor, reale sau virtuale, în poziții convenabile pentru înregistrare sau observare vizuată. Alte proprietăți importante ale imaginii, cum sunt strălucirea și câmpul de vedere, depind de limitarea fascicului de lumină prin *diafragme*, adică prin aperturi în ecrane opace sau prin însăși bordura lentilelor și oglinzilor care constituie sistemul optic. Pentru conveniență, în continuare vom analiza problema diaframelor cu apertură circulară în aproximația paraxială.

Așadar, să considerăm o pereche de plane conjugate care intersectează axul optic în punctul obiect P_1 , respectiv în punctul imagine P_2 . Prin definiție, *diafragma de apertură* Δ a sistemului este acea diafragmă sau bordură de element optic (lentilă, oglindă) care limitează cel mai mult fascicului de raze care provine de la punctul obiect axial P_1 (vezi fig.1.62 pentru cazul general și fig.1.63 pentru cazul particular al unui triplet de lentile subțiri). Pentru a determina care dintre diafragmele sistemului reprezintă diafragma de apertură corespunzătoare punctului P_1 , să considerăm mai întâi matricea de transfer $M_{P_1\Delta}$ dintre planul de referință care trece prin P_1 și planul unei diafragme, deocamdată oarecare, cu apertura de rază R .



- Δ - diafragma de apertură
- Π_1 - pupila de intrare
- Π_2 - pupila de iesire
- Λ_1 - lucarna de intrare
- Λ_2 - lucarna de iesire
- δ_1 - apertura unghiulară (obiect)
- δ_2 - apertura unghiulară imagine
- θ_1 - cimpul unghiular (obiect)
- θ_2 - cimpul unghiular imagine

Fig.1.62. Diafragma de apertură, pupilele și lucarnele unui sistem general.

Fig.1.63. Diafragma de apertură, pupilele și lucarnele unui triplet de lentile subțiri.

Ecuția (1.161) de transfer $y_2 = M_{11}y_1 + M_{12}\Gamma_1$, pentru o rază care trece prin P_1 ($y_1 = 0$, $n_1 = 1$, $\Gamma_1 = \gamma_1$) și pe la marginea aperturii ($y_2 = R$), se scrie sub forma $R = M_{12}\gamma_1$, adică

$$\gamma_1 = R/M_{12}.$$

Conform definiției, rezultă astfel că diafragma de apertură este acea diafragmă sau bordură de lentilă pentru care γ_1 , adică raportul R/M_{12} , este cel mai mic. Această diafragmă, notată cu Δ în fig.1.62 și 1.63, respectiv unghiul γ_1 corespunzător, denumiți *apertura unghiulară* (de partea obiectului), prezintă o deosebită importanță deoarece ea

determină atât fluxul de lumină colectat de sistem, deci strălucirea imaginii, cât și puterea de rezoluție a sistemului (vezi apertura numerică $n_1 \sin \gamma_1$ a obiectivului de microscop, ecuația (1.123)). Imaginea diafragmei de apertură formată de partea anterioară a sistemului (de sistemul S_1 în fig.1.62, respectiv de prima lentilă în fig.1.63) poartă numele de *pupilă de intrare* (Π_1) iar cea formată de partea posterioară a sistemului (de subsistemul S_2 în fig.1.62, respectiv de ultimele două lentile în fig.1.63) se numește *pupilă de ieșire* (Π_2). Evident, pupila de ieșire este imaginea pupilei de intrare formată de întregul sistem. Observăm că apertura unghiulară γ_1 a conului de lumină care intră în sistem este determinată de pupila de intrare iar apertura unghiulară (de partea imaginii) sau unghiul de proiecție γ_2 , este determinată de pupila de ieșire.

O altă metodă de determinare a pupilei de intrare, echivalentă cu cea descrisă deja, constă în a forma imaginea tuturor diafragmelor și bordurilor de către lentilele anterioare corespunzătoare; imaginea cu unghiul $\gamma_1(P_1)$ cel mai mic este pupila de intrare, iar elementul fizic respectiv este diafragma de apertură a sistemului pentru punctul P_1 considerat. Alternativ, putem forma imaginea tuturor diafragmelor și bordurilor de către lentilele posterioare și determina pupila de ieșire ca imaginea cu unghiul $\gamma_2(P_2)$ cel mai mic. În general, dacă schimbăm poziția punctului obiect P_1 , respectiv și a punctului său conjugat imagine P_2 , poate deveni operantă o altă diafragmă de apertură, respectiv o altă pereche conjugată de pupile. Dacă lentila frontală sau o diafragmă anterioară lentilei frontale, au o apertură suficient de mică, atunci chiar aceasta constituie diafragma de apertură și, totodată pupila de intrare a sistemului. La telescoape acest rol îl asumă, de regulă, bordura lentilei obiectivului astfel că imaginea acesteia formată de ocular reprezintă pupila de ieșire a sistemului. Cum am arătat, ecuația (1.249), diametrul D al obiectivului determină puterea de rezoluție unghiulară a telescopului.

Localizarea și mărimea pupilelor sistemelor optice prezintă o importanță practică deosebită. Astfel, la sistemele vizuale, ochiul observatorului este plasat în centrul pupilei de ieșire a instrumentului iar aceasta trebuie să corespundă pupilei de intrare a ochiului, adică imaginii aperturii irisului formată de cornea transparentă și de umoarea apoasă. Pentru alinierea comodă a ochiului cu instrumentul, pupila de ieșire a acestuia trebuie să fie ceva mai mare decât pupila de intrare a ochiului. De exemplu, dacă este destinat observațiilor de zi, telescopul trebuie să aibă o pupilă de ieșire de 3-4 mm și de cel puțin 8 mm - pentru observațiile de noapte. De altfel, termenul de "pupilă" provine de la cerința ca pupila de ieșire a instrumentelor vizuale să fie aproximativ egală cu pupila de intrare a ochiului.

Mai departe, să considerăm obiectivul fotografic, teleobiectivul și obiectivul de telescop, destinate să formeze imaginea obiectelor îndepărtate. În acest caz, aria imaginii este proporțională cu pătratul distanței focale a obiectivului, f^2 (conform cu $y_2 = -(y_1/p_1)f$, ecuația (1.230)). Pe de altă parte, fluxul de lumină colectat este proporțional cu aria aperturii obiectivului (cu aria pupilei de intrare), adică cu D^2 . Prin urmare, densitatea fluxului de lumină în planul imaginii variază ca $(D/f)^2$. Raportul D/f poartă numele de *apertură relativă* iar inversul acestuia de *numărul f* , adică

$$\text{"numărul } f\text{"} \stackrel{\text{def}}{=} f/D.$$

Deoarece timpul de expunere fotografică este proporțional cu $(f/D)^2$, "numărul f" mai poartă și numele de *viteza lentilei*. Astfel, de exemplu, o lentilă cu distanța focală de 5 cm și apertura de 2,5 cm are "numărul f" egal cu 2 și se notează cu simbolul f/2. Diafragma obiectivelor aparatelor de fotografiat este marcată în "numere f" și anume 1; 1,4; 2; 2,8; 4; 5,6; 8; 11; 16; 22, numerele consecutive crescând cu factorul multiplicativ $\approx \sqrt{2}$ ceea ce înseamnă o scădere a aperturii relative cu factorul $\approx 1/\sqrt{2}$, respectiv o scădere a densității fluxului de lumină în planul imaginii cu factorul $\approx 1/2$. În acest fel, de exemplu, aceeași cantitate de energie luminoasă trece prin diafragma f/1,4 în (1/500) s, prin diafragma f/2 în (1/250) s sau prin diafragma f/2,8 în (1/125) s.

Diafragma de apertură și pupilele asociate joacă un rol important în formarea imaginilor obiectelor spațiale. Pentru ilustrare, să considerăm un sistem obiectiv la care apertura diafragmei, de diametru D, reprezintă pupila de intrare Π_1 (fig.1.64). Să observăm printr-o placă de sticlă mată, ca ecran de focalizare, imaginea P_2 a unui punct obiect axial P_1 . La rigoare, va trebui să plasăm acest ecran chiar în planul imaginii P_2 . Deplasând ecranul înainte și înapoi, cu distanța $\pm d\zeta_2$ pentru a pune la punct imaginea cu ochiul liber, acesta însă nu este foarte critic și va tolera pentru punctul P_2 un *cerc de minimă difuzie* al cărui diametru poate să ajungă până la valoarea $\delta \approx (\gamma_1)_{\min}^{\text{ochi}}$ 250 mm = (1/3400)250 mm $\approx 0,07$ mm fără a sesiza o pierdere apreciabilă a clarității imaginii.

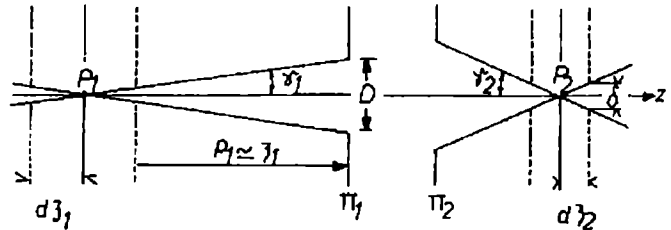


Fig.1.64. Definirea cercului de minimă difuzie și adâncimea câmpului (de focalizare).

Evident, dacă pentru punerea la punct a imaginii folosim o lupă, diametrul δ al cercului de minimă difuzie va fi de câteva (G) ori mai mic decât la observarea cu ochiul liber. În acest caz, rezultă un interval de toleranță, denumit *profundimea câmpului* sau *adâncimea de focalizare* în spațiul imaginii

$$|d\zeta_2| = \frac{\delta}{2\gamma_2} = \frac{f\delta}{D}, \quad (1.250)$$

unde, pentru a obține ultima expresie am folosit teorema Langrange-Helmholtz $y_1\gamma_1 = y_2\gamma_2$, ecuația (1.97), expresia măririi $y_2/y_1 = -f/\zeta_1$, ecuația (1.183), și am presupus că obiectul observat este suficient de îndepărtat astfel că $\zeta_1 = p_1 - f \approx p_1 (>> f)$ și $2\gamma_1 p_1 = D$. Rezultă astfel că profundimea câmpului în spațiul imaginii este invers proporțională cu apertura unghiulară, respectiv cu diametrul pupilei de intrare. Profundimii câmpului $|d\zeta_2|$ în spațiul imaginii îi corespunde o profundime a câmpului $|d\zeta_1|$ în spațiul obiectului. Astfel, folosind formula lui Newton $\zeta_1 \zeta_2 = f^2$, ecuația (1.18), respectiv relația $\zeta_2 \cdot d\zeta_1 + \zeta_1 \cdot d\zeta_2 = 0$, precum și expresia de mai sus a lui $|d\zeta_2|$, obținem

$$|d\zeta_1| = \frac{|\zeta_1|}{|\zeta_2|} |d\zeta_2| = \frac{\delta}{f} \cdot \frac{p_1^2}{D}. \quad (1.251)$$

Găsim astfel că profunzimea câmpului în spațiul obiectului este proporțională cu pătratul distanței până la obiect și invers proporțională cu diametrul pupilei de intrare (fapt cunoscut, calitativ, de orice fotograf amator). În concluzie, efectul de profunzime a câmpului este determinat de valoarea finită a diametrului δ al cercului de minimă difuzie, respectiv a rezoluției unghiulare a ochiului $(\gamma_1)_{\min}^{\text{ochi}} \approx 1'$, ecuația (1.189). Această valoare indică totodată și limita până la care are sens să fie corectate aberațiile instrumentelor optice.

O importanță deosebită pentru proiectarea sistemelor optice o au razele marginale și razele centrale. Astfel, razele care provin de la un punct obiect axial și trec efectiv pe la marginea diafragmei de apertură se numesc *raze marginale* (fig.1.63). Orice rază marginală intră în sistem de-a lungul unei drepte care trece pe la marginea pupilei de intrare și iese din sistem de-a lungul unei drepte conjugate care trece pe la marginea pupilei de ieșire. Raza care provine de la un punct obiect extra-axial și trece efectiv prin centrul O al diafragmei de apertură se numește *raza centrală* a aceluia punct (fig.1.63). Această rază intră în sistemul optic de-a lungul unei drepte care trece prin centrul O_1 al pupilei de intrare și iese din sistem de-a lungul unei drepte conjugate care trece prin centrul O_2 al pupilei de ieșire. Spre deosebire de diafragma de apertură, care definește razele marginale și controlează fluxul de lumină care trece prin sistem, *diafragma de câmp* este acea diafragmă sau bordură de lentilă care limitează cel mai mult fasciculul de raze centrale care provine de la punctele obiectivului, controlând astfel, ca printr-o fereastră, câmpul de vedere al sistemului. Imaginea diafragmei de câmp formată de partea anterioară a sistemului poartă numele de *fereastră (lucarnă) de intrare* (Λ_1) iar cea formată de partea posterioară se numește *fereastră (lucarnă) de ieșire* (Λ_2), fig.1.62. Evident, ca și pupilele, aceste două ferestre se află în poziții conjugate față de întregul sistem optic.

O metodă sistematică de determinare a diafragmei de câmp constă în a forma imaginea tuturor diafragmelor și bordurilor de către lentilele anterioare; imaginea văzută din centrul pupilei de intrare sub unghiul cel mai mic (*unghiul de acceptare* sau *câmpul unghiular obiect*, θ_1) reprezintă fereastra de intrare iar elementul fizic corespunzător este diafragma de câmp. Alternativ, putem forma imaginea tuturor diafragmelor și bordurilor de către lentilele posterioare și determina fereastra de ieșire ca imaginea văzută din centrul pupilei de ieșire sub unghiul cel mai mic (*câmpul unghiular imagine* θ_2); elementul fizic corespunzător este diafragma de câmp.

Câmpul de vedere dintr-un plan obiect oarecare, cu punctul axial P_1 , este definit ca mulțimea punctelor din acest plan care trimit raze de lumină în sistemul optic (fig. 1.65,a).

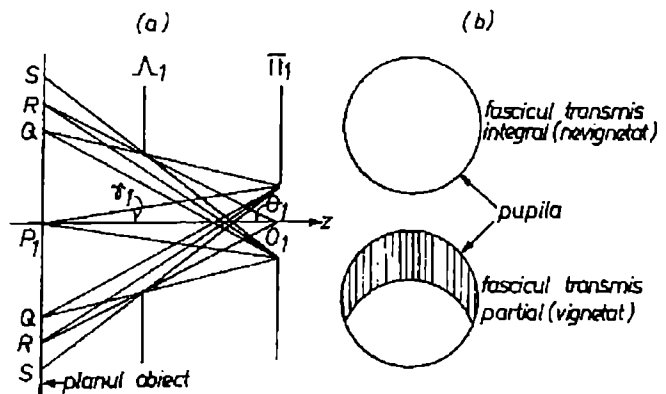


Fig.1.65. Definirea câmpului de vedere și evidențierea efectului de vignetație.

Aceste puncte sunt situate deci în interiorul cercului cu centrul în P_1 , de rază P_1S , și se împart în două categorii: punctele analoge cu punctul axial P_1 , cum este punctul extra-axial Q , care trimit în sistem fascicule conice de lumină care umplu integral pupila de intrare și puncte analoge cu punctul extra-axial R , ale căror fascicule sunt

obturate parțial de fereastra de intrare Λ_1 prin *efectul de fereastră* sau *vigneta* (fig.1.65,b). Punctele situate în cercul de rază P_1Q constituie *câmpul de apertură plină*, conjugatul său din planul imaginii fiind cel mai iluminat, iar punctele situate în inelul circular cuprins între razele P_1Q și P_1S constituie *câmpul de contur*, în conjugatul căruia, din planul imaginii, iluminarea se atenuează rapid de la valoarea mare de pe cercul interior la valoarea zero pe cercul exterior. În câmpul de contur există un cerc intermediar, de rază P_1R , (corespunzătoare câmpului unghiular θ_1), pe conjugatul căruia iluminarea este aproximativ jumătate din valoarea din centrul câmpului (total) de vedere. În concluzie, datorită efectului de fereastră, câmpul de vedere obiect și imagine nu prezintă o margine netă. Pentru a elimina acest inconvenient din instrumentele optice, diafragma de câmp este plasată chiar în planul unei imagini intermediare, astfel că fereastra de intrare se află în planul obiectului iar fereastra de ieșire în planul imaginii. În acest fel, tot câmpul de vedere devine câmp de apertură plină, cu o iluminare aproape uniformă, iar câmpul de contur se reduce la o margine circulară netă.

Să considerăm mai în detaliu distribuția iluminării unei imagini reale, formată de un sistem optic centrat, în domeniul câmpului de apertură plină. Pentru aceasta vom presupune că obiectul reprezintă o mică suprafață plană, de arie dS_1 , perpendiculară pe axul optic,

care radiază conform legii lui Lambert, adică radianța (strălucirea, luminanța) sa L_1 nu depinde de unghiul γ , vezi secțiunea 1.1.3 (fig.1.66). Fluxul de energie emis de punctul obiect axial P_1 în unghiul solid $d\Omega_{P_1} = 2\pi \sin\gamma d\gamma$ este

$$d^2F_1 = L_1 d\Omega_{P_1} dS_1 \cos\gamma = 2\pi L_1 dS_1 \cos\gamma \sin\gamma d\gamma. \quad (1.252)$$

Prin integrare între $\gamma = 0$ și apertura unghiulară γ_1 , rezultă fluxul de energie care trece prin pupila de intrare, adică

$$dF_1 = \pi L_1 dS_1 \sin^2\gamma_1. \quad (1.253)$$

În mod similar, obținem fluxul de energie conjugat care trece prin pupila de ieșire și se îndreaptă spre punctul imagine axial P_2 , adică

$$dF_2 = \pi L_2 dS_2 \sin^2\gamma_2. \quad (1.254)$$

Presupunând că sistemul optic satisface condiția de sinus a lui Abbe, respectiv că elementul de suprafață dS_2 este imaginea aplanetică a elementului dS_1 , mai avem relația (ecuația (1.106))

$$dS_1 n_1^2 \sin^2\gamma_1 = dS_2 n_2^2 \sin^2\gamma_2. \quad (1.255)$$

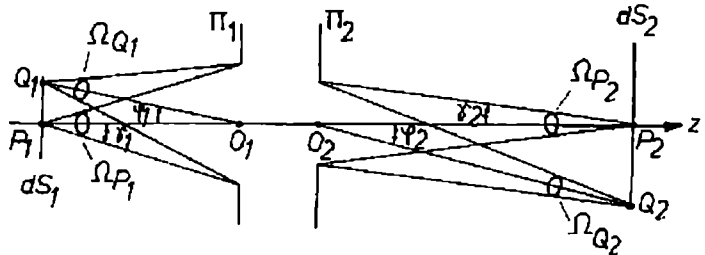


Fig.1.66. Pentru determinarea iluminării imaginii aplanetice a unei surse lambertiene.

Cum am arătat deja în §. 1. 3, condiția de bilanț energetic $dF_2 = TdF_1$, unde $T \leq 1$ reprezintă factorul de transmisie (transparență) al sistemului*, împreună cu ecuațiile (1.253) - (1.255), conduc la *teorema lui Clausius*

$$L_2 = (n_2/n_1)^2 TL_1 \leq (n_2/n_1)^2 L_1 . \quad (1.256)$$

De aici rezultă că, dacă $n_1 = n_2$, radianța imaginii nu poate depăși radianța obiectului.

Din ecuațiile (1.254), (1.256) rezultă *iluminarea* (densitatea fluxului de energie) în planul imaginii

$$E_2 \stackrel{\text{def}}{=} dF_2/dS_2 = \pi(n_2/n_1)^2 TL_1 \sin^2 \gamma_2 . \quad (1.257)$$

Pentru aperturi unghiulare suficient de mici ($\gamma_2 \ll 1$), unghiul solid sub care este văzută pupila de ieșire din punctul axial imagine P_2 este $\Omega_{P_2} \cong \pi |O_2 P_2|^2 \sin^2 \gamma_2 / |O_2 P_2|^2 = \pi \sin^2 \gamma_2$, astfel că ecuația (1.257) devine

$$E_2 = (n_2/n_1)^2 TL_1 \Omega_{P_2} . \quad (1.258)$$

Această expresie este valabilă pentru iluminarea într-un punct imagine axial P_2 . Reluând raționamentul pentru un punct imagine extra-axial Q_2 , obținem

$$E_2 = (n_2/n_1)^2 TL_1 \Omega_{Q_2} \cos \varphi_2 , \quad (1.259)$$

unde Ω_{Q_2} este unghiul solid sub care este văzută pupila de ieșire din punctul Q_2 iar φ_2 este unghiul dintre raza centrală $O_2 Q_2$ și axul optic. Notând cu Σ aria pupilei de ieșire, avem

$$\Omega_{P_2} = \frac{\Sigma}{|O_2 P_2|^2} , \quad \Omega_{Q_2} = \frac{\Sigma \cos \varphi_2}{|O_2 Q_2|^2} ,$$

de unde, ținând cont că $|O_2 P_2| = |O_2 Q_2| \cos \varphi_2$, rezultă

$$\Omega_{Q_2} = \Omega_{P_2} \cos^3 \varphi_2 .$$

Cu ajutorul acestei relații, expresia generală (1.259) a iluminării imaginii aplanetice a unei surse lambertiene se scrie

* Considerăm T independent de λ . Cum vom arăta în partea dedicată opticii electromagnetice (volumul II), factorul de transmisie la incidență normală sau aproape normală pe suprafața de separare aer-sticlă sau sticlă-aer este $T = 0,96$. Pentru o lentilă subțire de sticlă în aer avem deci $T = 0,92$. Dacă ținem cont și de absorbția luminii în sticla optică ($T = 0,98$ pe un cm de parcurs) rezultă că pentru o lentilă de sticlă, grosă de 1 cm, în aer, avem $T = 0,90$.

$$E_2 = (n_2/n_1)^2 T_{L1} \Omega_{P2} \cos^4 \varphi_2. \quad (1.260)$$

Această "lege de cosinus la puterea a patra" conduce la o scădere destul de rapidă a iluminării imaginii cu creșterea unghiului de câmp φ_2 . Contracurarea acestui efect și uniformizarea iluminării imaginii se realizează în practică prin violarea condiției de aplanetism și introducerea deliberată a aberațiilor de coma. Crescând mai departe unghiul de câmp până la valoarea $\varphi_2 \cong \theta_2$, caracteristică câmpului de contur, iluminarea scade drastic datorită efectului de vignetație.

1. 2. 7. Aberații cromatice

Până acum am considerat că lumina este monocromatică astfel că, în formulele opticii geometrice, indicele de refracție n apare ca o constantă unică de material. În general însă, datorită fenomenului de *dispersie a luminii*, indicele de refracție depinde de lungimea de undă (vezi vol. II). Astfel, pentru majoritatea materialelor optice transparente, cum sunt sticlele anorganice, cuarțul topit, sticla organică (plexiglasul), cristalele izotrope (fluorina sau fluorura de calciu, fluorura de litiu, clorura de sodiu, bromura de potasiu ș.a.) sau lichidele incolore, indicele de refracție este dat teoretic de *formula lui Sellmeier*

$$n^2(\omega) = 1 + \sum_i \frac{A_i}{\Omega_i^2 - \omega^2}, \quad (1.261)$$

unde $\omega = k_0 c = 2\pi c/\lambda_0$ iar A_i, Ω_i sunt constatate de material. În practică se preferă formule de dispersie empirice care depind liniar de constantele de material (A, B, C, D), cum este, de exemplu, *formula lui Cauchy*

$$n(\lambda_0) = A + \frac{B}{\lambda_0^2} + \frac{C}{\lambda_0^4}. \quad (1.262)$$

sau, pentru interpolări mai exacte, *formula lui Conrady*

$$n(\lambda_0) = A + \frac{B}{\lambda_0} + \frac{C}{\lambda_0^{3,5}}. \quad (1.263)$$

O relație empirică excelentă pentru domeniul spectral larg, cuprins între 3650 Å și 10000 Å, având în spectrul vizibil o precizie de ± 1 la a cincea zecimală, este *formula lui Herzberger*

$$n(\lambda_0) = A + B\lambda_0^2 + \frac{C}{\lambda_0^2 - 2,8 \cdot 10^6} + \frac{D}{(\lambda_0^2 - 2,8 \cdot 10^6)^2}. \quad (1.264)$$

În general, indicele de refracție al mediilor optice în domeniul vizibil scade lent de la albastru spre roșu (*dispersie normală*), cum este ilustrat în tabelul de mai jos pentru două sorturi de sticlă din cele aproximativ 250 de tipuri de sticlă produse de firma Schott. De

regulă, sticlele optice sunt caracterizate prin două date și anume *indicele de refracție mediu*, n_g , corespunzător unei lungimi de undă din mijlocul spectrului vizibil, și *dispersia medie* $\delta n = n_a - n_r$, corespunzătoare variației indicelui de refracție pe un interval spectral convenabil. Pentru conveniență în calculul aberațiilor cromatice (cum vom arăta mai departe), dispersia materialelor optice este determinată prin *numărul lui Abbe*

$$V = \frac{\text{def } n_g - 1}{n_a - n_r} \approx \frac{n - 1}{\delta n} > 0, \quad (1.265)$$

unde n_a, n_g, n_r sunt indicii de refracție din albastru, galben și roșu corespunzând unor linii spectrale intense și cunoscute cu mare precizie și anume:

$$\begin{aligned} \text{linia F(H}\beta\text{)}, \lambda_a &= 4861,327 \text{ \AA} \text{ a hidrogenului,} \\ \text{linia d(D}_3\text{)}, \lambda_g &= 5875,618 \text{ \AA} \text{ a heliului,} \\ \text{linia C(H}\alpha\text{)}, \lambda_r &= 6562,816 \text{ \AA} \text{ a hidrogenului.} \end{aligned} \quad (1.266)$$

Domeniul spectral	Sursa de lumină	Denumirea Fraunhofer a liniei	λ_0 (Å)	Sticla crown BK 7	Sticla flint SF 11
1 UV	laser Ar		3511	1,53894	
2 UV	laser Ar		3638	1,53648	
3 violet	arc Hg	h	4047	1,53024	1,84211
4 albastru	arc Hg	g	4358	1,52669	1,82518
5 albastru	laser HeCd		4416	1,52611	1,82259
6 albastru	laser Ar		4579	1,52462	1,81596
7 albastru	laser Ar		4658	1,52395	1,81307
8 albastru	laser Ar		4727	1,52339	1,81070
9 albastru	laser Ar		4765	1,52310	1,80945
10 albastru	arc Cd	F'	4800	1,52283	1,80834
11 albastru	arc H	F (H β)	4861 = λ_a	$n_a = 1,52238$	1,80645
12 albastru	laser Ar		4880	1,52224	1,80590
13 verde	laser Ar		4965	1,52165	1,80347
14 verde	laser Ar		5017	1,52130	1,80205
15 verde	laser Ar		5145	1,52049	1,79880
16 verde	laser Nd		5320	1,51947	1,79480
17 verde	arc Hg	e	5461	1,51872	1,79190
18 galben	arc He	d (D $_3$)	5876 = λ_g	$n_g = 1,5168$	1,78472
19 galben	arc Na	D	5893	1,51673	1,78446
20 roșu	laser HeNe		6328	1,51509	1,77862
21 roșu	arc Cd	C'	6438	1,51472	1,77734

22 roșu	arc H	C (H_{α})	6563 = λ_r	$n_r = 1,51432$	1,77599
23 roșu	laser rubin		6943	1,51322	1,77231
24 IR	laser rubin		7860	1,51106	1,76559
25 IR	laser rubin		8210	1,51037	1,76360
26 IR	laser GaAlAs		8300	1,51021	1,76312
27 IR	arc Cs	s	8521	1,50981	1,76202
28 IR	laser GaAs		9040	1,50894	1,75971
29 IR	arc Hg	t	10140	1,50731	1,75579
30 IR	laser Nd		10600	1,50669	1,75444
31 IR	laser InGaAsP		13000	1,50371	1,74888

(date din Melles Griot, Optics Guide 3, 1985)

Din tabel și definiția (1.265) rezultă astfel $V = 64,12$ pentru sticla BK 7 și $V = 25,76$ pentru sticla SF 11. Cu cât este mai mic numărul V , cu atât este mai mare dispersia δn a indicelui de refracție. Remarcăm că putem înlocui indicele mediu n_g din ecuația (1.265) cu orice valoare n din spectrul vizibil, variația maximă a numărului V nedeșăind circa 2%.

Tradițional, sticlele optice se împart în două mari categorii și anume *sticle flint* (F), cu număr V în intervalul 20-50, și *sticle crown* (K), cu număr V în intervalul 50 - 70. Orice sticlă optică comercială are un indicator (*catalog code*), cu două numere, rotunjite la a treia zecimală și anume $(n_g - 1)/10V$. (dar, prin convenție, majorat de o mie de ori!). Astfel, de exemplu, indicatorul sticlelor din tabelul de mai sus este 785/258 pentru sticla flint super-dens SF 11 și 517/641 pentru sticla crown de borosilicat BK 7.

Prin intermediul indicelui de refracție, elementele matricei S , respectiv elementele cardinale ale sistemelor optice, depind de lungimea de undă. Evident, în lumină monocromatică, cum este lumina filtrată de un monocromator sau lumina laser de o singură frecvență, orice obiect are o singură imagine. Dacă însă lumina este policromatică, sistemul optic nu mai formează o singură imagine, ci o multitudine de imagini monocromatice, cu poziții și dimensiuni diferite (fig.1.67), astfel că imaginea rezultată prin suprapunere are bordura irizată și nu mai este netă.

Acest efect supărător, cauzat de dispersia luminii, poartă numele de *aberație cromatică* sau *chromatism*. Putem defini *aberația cromatică axială* sau *de poziție* și *aberația cromatică transversală* sau *de mărime*.

Aceste aberații pot fi eliminate, mai mult sau mai puțin complet, prin combinarea de lentile care contribuie în sensuri opuse la ele. Să examinăm mai departe această problemă în aproximația paraxială. Astfel, în general, *acromatizarea perfectă* a unui sistem optic *pentru două lungimi de undă* λ_a și λ_r , implică anularea tuturor variațiilor corespunzătoare ale elementelor matricei S , adică:

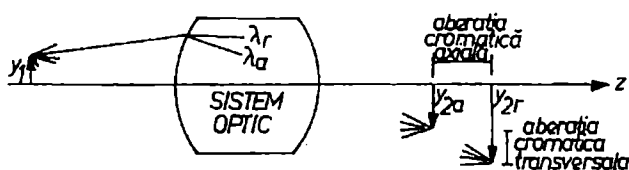


Fig.1.67. Aberații cromatice (axială și transversală).

$$\frac{\delta S_{11}}{\delta n} = \frac{\delta S_{22}}{\delta n} = \frac{\delta S_{21}}{\delta n} = 0, \quad (1.267)$$

unde $\delta n = n_a - n_r$. De regulă, acest sistem de ecuații nu este compatibil, astfel că aberațiile cromatice (axială și transversală) nu pot fi eliminate simultan. De aceea, în majoritatea cazurilor practice, trebuie să ne mulțumim cu o *acromatizare parțială*, în funcție de destinația instrumentului, preferând precizia fie în poziția, fie în mărirea imaginii.

Să considerăm mai întâi cazul simplu al unei lentile subțiri. Conform ecuațiilor (1.199), (1.200), numai elementul $S_{21} = -n_1/f$, respectiv convergența

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \equiv K(n-1), \quad (1.268)$$

depind de indicele de refracție. Pentru abreviere, în ecuația (1.268) am notat cu K suma algebrică a curburilor dioptrilor componenți. Evident, o singură lentilă subțire nu poate fi acromatizată deoarece $\delta S_{21}/\delta n = -Kn_1 \neq 0$. Alternativ, prin diferențierea ecuației (1.268) avem

$$-\frac{\delta f}{f} = \frac{\delta n}{n-1} = \frac{1}{V} > 0, \quad (1.269)$$

sau

$$\frac{f_r - f_a}{f_g} = \frac{n_a - n_r}{n_g - 1} = \frac{1}{V} > 0 \quad (1.270)$$

Deci, dispersia axială $f_r - f_a = f_g/V$ a focarelor nu poate fi nulă deoarece întotdeauna $V > 0$. Aceasta este pozitivă pentru lentile convergente ($f_g > 0$), cum este arătat în fig.1.68, și negativă pentru lentile divergente ($f_g < 0$). Semnul aberației se explică prin forma prismatică a lentilelor convergente sau divergente, acestea devenind mai subțiri, respectiv mai groase, pe măsură ce distanța față de axul optic crește. Extensia spectrului axial al focarelor este prezentată exagerat în fig.1.68 deoarece, de exemplu, pentru o sticlă crown cu $V = 60$ avem $f_r - f_a = f_g/60$. Totodată, remarcăm că putem înlocui distanța focală medie f_g din ecuația (1.270) cu orice valoare f din spectrul vizibil.

Aberația cromatică se remarcă ușor în lumină policromatică prin haloul care înconjoară imaginea reală formată pe un ecran de observare. Astfel, de exemplu, considerând o sursă punctuală de lumină "albă", situată la infinit pe axul optic, în focarul F_a apare un punct albastru înconjurat de un halou degradat spre roșu, iar în focarul F_r apare un punct roșu înconjurat de un halou degradat spre albastru. Cea mai bună imagine "albă" apare într-un plan intermediar (Σ) sub forma unui disc circular de minimă difuzie (fig.1.68).

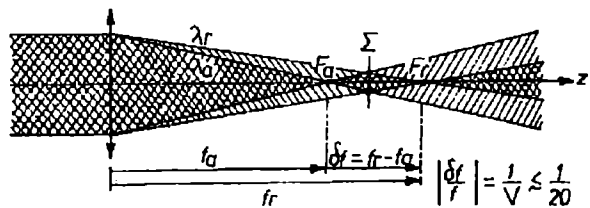


Fig.1.68. Dispersia axială $f_r - f_a$ și cea mai bună imagine "albă" (în planul Σ).

Spre deosebire de lentila subțire, distanța focală a lentilei groase poate fi acromatizată pentru două lungimi de undă. Pentru aceasta, din ecuația $\delta(1/f)/\delta n = 0$, echivalentă cu $\delta S_{21}/\delta n = 0$, și expresia convergenței lentilei groase, ecuația (1.193), rezultă condiția

$$g = \frac{n^2}{n^2 - 1}(r_1 - r_2). \quad (1.271)$$

Cum grosimea g este esențialmente pozitivă, această condiție poate fi îndeplinită numai dacă $r_1 > r_2$. Din nefericire, celelalte două condiții din sistemul (1.267) și, în consecință, acromatizarea punctelor cardinale, ecuația (1.195), nu mai pot fi simultan realizate.

Să analizăm mai în detaliu condițiile de acromatizare ale dubletului de lentile subțiri. Vom începe cu condiția de acromatizare a elementului S_{21} , respectiv a convergenței date de formula lui Gullstrand

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}. \quad (1.210)$$

Din ecuația $\delta(1/f)/\delta n = 0$ rezultă imediat condiția

$$d = \frac{f_1 V_1 + f_2 V_2}{V_1 + V_2}, \quad (1.272)$$

unde numerele V_1, V_2 corespund, în general, la sticle diferite, adică

$$V_1 = \frac{ng_1 - 1}{na_1 - nr_1}, \quad V_2 = \frac{ng_2 - 1}{na_2 - nr_2}. \quad (1.273)$$

În cazul particular în care lentilele dubletului sunt confecționate din aceeași sticlă, adică $V_1 = V_2$, ecuația (1.272) devine

$$d = \frac{f_1 + f_2}{2}, \quad (1.274)$$

condiție de care se ține seama în construcția ocularelor (vezi secțiunea 1.2.5). Ca și în cazul lentilei groase, această acromatizare este doar parțială întrucât nu poate fi simultan compensată și dispersia în pozițiile punctelor cardinale. Cu toate acestea, acromatizarea distanței focale f a sistemului implică și pe aceea a grosimentului $G = 1/4f$ (ecuația (1.206)). Această acromatizare aparentă este cauzată de faptul că imaginile de diverse culori, deși distincte între ele (ca poziție și mărime), apar pentru ochi sub același unghi vizual θ_2 , astfel că, din perspectivă, apar finalmente suprapuse pe retină.

O metodă importantă de acromatizare a dubletului constă în alipirea lentilelor subțiri, confecționate din sticle diferite, obținându-se ceea ce se numește *dubletul acromat de contact*. În acest caz $d = 0$ și $V_1 \neq V_2$, astfel că ecuațiile (1.210), (1.272) devin

$$\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{f}, \quad (1.275)$$

$$f_1 V_1 + f_2 V_2 = 0. \quad (1.276)$$

Remarcăm că pentru dubletul de contact $S_{11} = S_{22} = 1$, conform ecuației (1.201) sau ecuației (1.209) pentru $d = 0$, astfel că planele principale nu prezintă dispersie și coincid cu planul tangent la vertexul comun al dioptrilor componente, iar planele focale sunt fixate de distanța focală acromatizată prin condiția (1.276). În concluzie, acromatizarea distanței focale reprezintă *acromatizarea perfectă*, de poziție și de mărime, a dubletului de contact. Din ecuațiile (1.275), (1.276) observăm că, pentru ca dubletul acromat să nu reprezinte cazul trivial al convergenței nule, $1/f = 0$, ceea ce implică $f_1 = -f_2$, este necesar ca $V_1 \neq V_2$, adică cele două lentile componente trebuie să fie confecționate din sticle diferite. De asemenea, deoarece $V_1, V_2 > 0$, rezultă că cele două distanțe focale f_1, f_2 trebuie să aibă semne diferite, adică o lentilă trebuie să fie convergentă iar cealaltă divergentă. Este interesant de menționat că, din măsurătorile imprecise de indici de refracție din timpul său, practic inevitabile înainte de descoperirea liniilor spectrale, Newton a tras concluzia *eronată* că numărul V este același pentru toate sticlele, deci că aberația cromatică nu poate fi în principiu eliminată (cu excepția cazului trivial $f_1 = -f_2$). Din acest motiv el s-a concentrat, cu succes, spre construcția telescopului de reflexie, deoarece sistemele pur reflectante nu prezintă aberații cromatice (legea de reflexie nu conține indicii de refracție). Primul dublet acromat a fost patentat de opticianul londonez John Dollond (1758) și a avut un impact decisiv în perfecționarea instrumentelor optice de refracție.

Rezolvând ecuațiile (1.275), (1.276) pentru convergențele lentilelor componente, obținem relațiile necesare pentru calculul dubletului acromat de contact, și anume

$$\frac{1}{f_1} \equiv (ng_1 - 1) \left(\frac{1}{r_{11}} - \frac{1}{r_{12}} \right) = \frac{1}{f} \cdot \frac{V_1}{V_1 - V_2}, \quad (1.277)$$

$$\frac{1}{f_2} \equiv (ng_2 - 1) \left(\frac{1}{r_{21}} - \frac{1}{r_{22}} \right) = \frac{1}{f} \cdot \frac{V_2}{V_2 - V_1}. \quad (1.278)$$

Astfel, impunând o anumită convergență $1/f$ a dubletului și alegând sticlele optice, adică ng_1, ng_2, V_1, V_2 , din ultimele două expresii putem calcula convergențele $1/f_1, 1/f_2$ ale lentilelor componente. Pentru a evita valori prea mici pentru f_1, f_2 , respectiv pentru razele de curbură ale lentilelor, este necesar ca diferența $|V_1 - V_2|$ să fie suficient de mare. Să ilustrăm această procedură prin calculul unui dublet acromat de contact cu $f = 0,5$ m, ale cărui lentile sunt confecționate din sticla crown BK 1, cu indicatorul 510/635, respectiv din sticla flint F2, cu indicatorul 620/364. Introducând valorile $1/f = 2 \text{ m}^{-1}$ și $V_1 = 63,5, V_2 = 36,4$, din ultimele două expresii rezultă $1/f_1 = 4,686 \text{ m}^{-1}$ și $1/f_2 = -2,686 \text{ m}^{-1}$. Evident, suma convergențelor lentilelor componente trebuie să fie egală cu convergența dubletului, ecuația (1.275).

În general, suprafețele adiacente ale dubletului de contact pot să nu aibă aceeași rază de curbură, contactul realizându-se fie numai la centru, fie numai la margine. Pentru f_1, f_2, ng_1, ng_2 date, primele expresii (1.277), (1.278) reprezintă două relații între patru raze de curbură, astfel că două raze de curbură pot fi alese în mod arbitrar. În practică, această mare libertate este folosită pentru a minimiza aberațiile geometrice de sfericitate și de coma, profitând de faptul că efectele acestora pentru lentile convergente și divergente sunt de semne opuse.

Un dublet acromat simplu este *acromatul Fraunhofer* (fig.1.69) format dintr-o lentilă echi-convexă ($r_{12} = -r_{11}$) de crown, în contact complet ($r_{12} = r_{21}$) cu o lentilă practic plano-concavă, de flint. De regulă, acest dublet se cimentează cu un adeziv transparent (de exemplu cu poliester). Folosind datele numerice din exemplul de mai sus ($1/f_1 = 4,686 \text{ m}^{-1}$, $1/f_2 = -2,686 \text{ m}^{-1}$, $n_{g1} = 1,510$, $n_{g2} = 1,620$) și relațiile impuse dintre razele de curbură, din primele expresii (1.277), (1.278) rezultă $r_{11} = -r_{12} = -r_{21} = 21,8 \text{ cm}$ și $r_{22} = -381,9 \text{ cm}$. În general, se recomandă ca lentila frontală să fie cea din sticlă crown datorită rezistenței sale mai bune la uzură.

Până acum am considerat numai condițiile de acromatizare pentru două lungimi de

undă λ_a, λ_r . În cazul dubletului de contact aceasta implică egalitatea distanțelor focale corespunzătoare $f_a = f_r$, și coincidența focarelor F_a, F_r (fig.1.69). Însă, pentru alte lungimi de undă λ_x , distanța focală corespunzătoare f_x se abate de la valoarea $f_a = f_r$ impusă prin acromatizare, reprezentând așa numitul

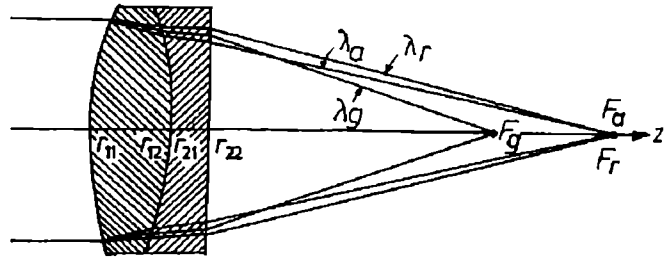


Fig.1.69. Acromatul lui Fraunhofer.

spectru secundar sau *aberația cromatică reziduală*. Pentru a determina distribuția focarelor

F_x în acest spectru, să diferențiem ecuația (1.275) și să folosim ecuația (1.269) pentru lentilele componente, adică

$$-\frac{\delta f}{f^2} = -\frac{\delta f_1}{f_1^2} - \frac{\delta f_2}{f_2^2} = \frac{1}{f_1} \cdot \frac{\delta n_1}{n_1 - 1} + \frac{1}{f_2} \cdot \frac{\delta n_2}{n_2 - 1}, \quad (1.279)$$

unde, de data aceasta, vom considera $\delta f = f_a - f_x$ și $\delta n = n_a - n_x$. Deci

$$\frac{f_x - f_a}{f^2} = \frac{1}{f_1} \cdot \frac{n_{a1} - n_{x1}}{n_{a1} - 1} + \frac{1}{f_2} \cdot \frac{n_{a2} - n_{x2}}{n_{a2} - 1} = \frac{1}{f_1 V_{x1}} + \frac{1}{f_2 V_{x2}} = \frac{P_{x1}}{f_1 V_1} + \frac{P_{x2}}{f_2 V_2}, \quad (1.280)$$

unde, pentru conveniență, am introdus *numărul lui Abbe modificat*

$$V_x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{n_a - 1}{n_a - n_x}, \quad (1.281)$$

respectiv *dispersia parțială relativă*

$$P_x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{V}{V_x} = \frac{n_a - n_x}{n_a - n_r}. \quad (1.282)$$

Cu ajutorul ecuațiilor (1.277), (1.278), ultima expresie din ecuația (1.280) se mai scrie

$$\frac{f_x - f_a}{f} = \frac{P_{x_1} - P_{x_2}}{V_1 - V_2} \quad (1.283)$$

și reprezintă *ecuația spectrului secundar*. Această ecuație permite calculul diferenței relative a distanței focale f_x față de distanța focală de acromatizare $f_a = f_r$, cu ajutorul dispersiilor parțiale P_{x_1}, P_{x_2} , în funcție de lungimea de undă λ_x . Figura 1.70 ilustrează acest calcul pentru dubletul acromat de contact confecționat din sticlele crown BK 7 (lentila 1) și flint SF 11 (lentila 2) folosind indicii de refracție listați în tabelul de la începutul secțiunii. Spectrul secundar apare repliat asupra lui însuși, având o distanță focală minimă f_{\min} corespunzătoare radiației de lungime de undă λ_m , din vecinătatea liniei galbene $D_3 (\lambda_g)$. Cu excepția lui f_{\min} , focarele corespunzătoare diverselor radiații monocromatice coincid două câte două. Remarcabil este faptul că abaterea focarelor în domeniul vizibil de la valoarea de acromatizare $f_a = f_r$ poate fi neglijată în multe aplicații. Într-adevăr, din fig.1.70 rezultă, de exemplu, că $|f_{\min} - f_a|/f = 0,64 \cdot 10^{-3} \approx 1/1600$ sau $|f_g - f_a|/f \approx 1/1800$ (abaterea minimă în domeniul vizibil a dubletelor acromatice comerciale este de circa $1/2000$).

Având în vedere acest rezultat, este evident că extensia spectrului secundar sugerată de fig.1.69 este mult exagerată. Pentru comparație cu această performanță a dubletului acromat, reamintim că extensia relativă a spectrului focarelor unei singure lentile este $(f_r - f_a)/f_g = 1/V$, ecuația (1.270), adică o valoare de câteva zeci de ori mai mare.

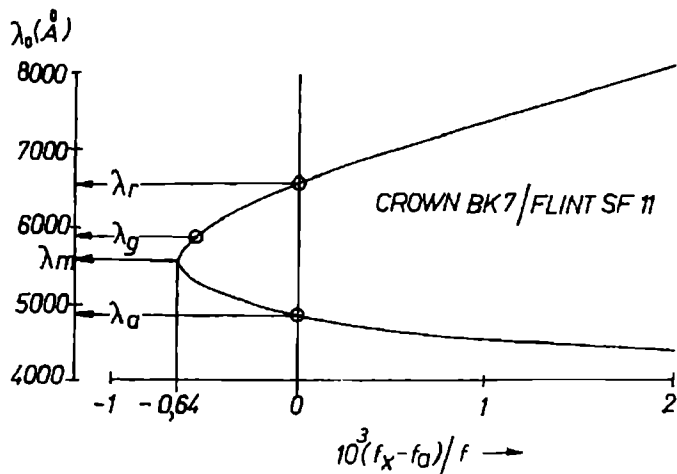


Fig.1.70. O reprezentare analitică a ecuației spectrului secundar pentru dubletul crown BK7/ flint SF 11.

Conform ecuației (1.283), reducerea spectrului secundar se poate realiza, în principiu, prin alegerea unei perechi de sticle cu diferența $P_{x_1} - P_{x_2}$ a dispersiilor parțiale cât mai mică și/sau cu diferența $V_1 - V_2$ a numerelor Abbe cât mai mare. Din nefericire, prima metodă se dovedește impracticabilă, deoarece sticlele optice existente par să aibă diferența valorilor P aproximativ proporțională cu diferența valorilor V , astfel că alegerea sticlelor nu influențează în mod semnificativ extensia spectrului secundar. Mai utilă este a doua metodă, constând în asocierea unei sticle cu număr V mic cu cristalul de fluorină, care are un număr V foarte mare ($V = 95,4$). Această ultimă cale, cum am arătat (vezi ecuațiile (1.277) și (1.278)), mai prezintă și avantajul suplimentar că distanțele focale f_1, f_2 , deci și razele de curbură ale lentilelor, sunt relativ mari, astfel că unghiurile de refracție și aberațiile geometrice sunt relativ mici. Prin folosirea ambelor metode indicate mai sus, dubletul de sticlă și fluorină poate fi acromatizat *pentru trei lungimi de undă*, $\lambda_a, \lambda_r, \lambda_x$, ($f_a = f_r = f_x$).

Mult mai ușor se acromatizează, *pentru trei lungimi de undă*, $\lambda_a, \lambda_r, \lambda_x$, sau *pentru patru lungimi de undă* $\lambda_a, \lambda_r, \lambda_x, \lambda_y$, *tripletul de lentile subțiri alipite*, realizat din sticle diferite. În ultimul caz sistemul poartă numele de *superacromat* și permite,

practic, anihilarea completă a spectrului secundar în tot domeniul vizibil, infraroșul apropiat și ultravioletul apropiat. În încheiere, să determinăm condițiile de acromatizare pentru *tripletul superacromat*. Pornim de la expresia convergenței

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_3}, \quad (1.284)$$

și impunem egalitățile $f_a = f_r = f_x = f_y$. Prin diferențierea ecuației (1.284) avem

$$\frac{\delta f_1}{f_1^2} + \frac{\delta f_2}{f_2^2} + \frac{\delta f_3}{f_3^2} = 0 \quad (1.285)$$

sau, folosind ecuația (1.269) pentru lentilele componente,

$$\frac{1}{f_1} \cdot \frac{\delta n_1}{n_1 - 1} + \frac{1}{f_2} \cdot \frac{\delta n_2}{n_2 - 1} + \frac{1}{f_3} \cdot \frac{\delta n_3}{n_3 - 1} = 0. \quad (1.286)$$

Pentru $\delta n = n_a - n_r$ obținem

$$\frac{1}{f_1 V_1} + \frac{1}{f_2 V_2} + \frac{1}{f_3 V_3} = 0, \quad (1.287)$$

ecuație care generalizează, pentru triplet, condiția (1.276). În mod similar, pentru $\delta n = n_a - n_x$, avem

$$\begin{cases} \frac{1}{f_1 V_{x1}} + \frac{1}{f_2 V_{x2}} + \frac{1}{f_3 V_{x3}} = 0, \\ \frac{P_{x1}}{f_1 V_1} + \frac{P_{x2}}{f_2 V_2} + \frac{P_{x3}}{f_3 V_3} = 0, \end{cases} \quad (1.288)$$

iar pentru $\delta n = n_a - n_y$,

$$\begin{cases} \frac{1}{f_1 V_{y1}} + \frac{1}{f_2 V_{y2}} + \frac{1}{f_3 V_{y3}} = 0, \\ \frac{P_{y1}}{f_1 V_1} + \frac{P_{y2}}{f_2 V_2} + \frac{P_{y3}}{f_3 V_3} = 0. \end{cases} \quad (1.289)$$

Condițiile (1.287), (1.288), (1.289) pot fi simultan satisfăcute de orice triplet de sticle care, în graficul (P_x, P_y) se găsesc pe o linie dreaptă, adică dacă

$$P_{y1} = aP_{x1} + b, \quad P_{y2} = aP_{x2} + b, \quad P_{y3} = aP_{x3} + b, \quad (1.290)$$

unde a, b sunt constante. Multe triplete din sticlele actuale satisfac această condiție.

1. 2. 8. Aberații geometrice

Până acum am considerat sistemele optice centrate în aproximația paraxială, astfel că fiecărui punct obiect Q_1 îi corespunde câte un punct conjugat imagine Q_2 . Cu alte cuvinte, în domeniul paraxial, sistemul optic transformă un fascicul conic de raze cu vârful în Q_1 într-un fascicul conic de raze cu vârful în Q_2 , respectiv o undă sferică cu centrul în Q_1 , într-o undă sferică cu centrul în Q_2 . Dacă, însă, fasciculul de raze provenit din punctul obiect Q_1 nu mai este paraxial, razele emergente corespunzătoare nu mai converg către imaginea punctuală paraxială (gaussiană) Q_2 ci înțepă planul imaginii gaussiene în diverse puncte Q_2^* , respectiv unda emergentă se abate de la forma sferică ideală (fig.1.71). Aceste abateri de la imaginea punctuală ideală, cauzate de razele extra-paraxiale, poartă numele de *aberații geometrice* sau *aberații monocromatice*, deoarece apar chiar dacă lumina este perfect monocromatică.

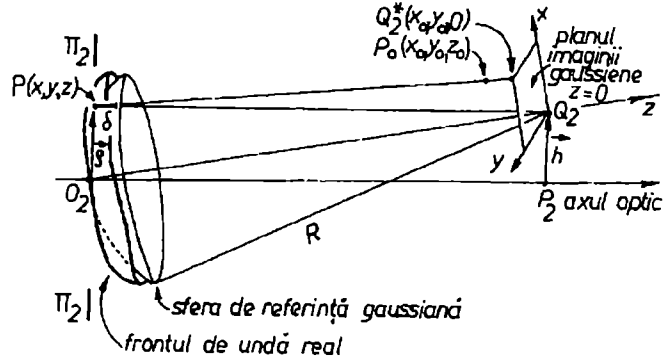


Fig.1.71. Sfera de referință gaussiană și frontul de undă real.

Datorită aberațiilor geometrice, oricărui punct obiect Q_1 îi corespunde în planul imaginii gaussiene Q_2 o pată difuză de lumină, limitată de o *curbă de aberație* determinată de razele marginale. În general, abaterile geometrice de la imaginea paraxială Q_2 pot fi caracterizate cantitativ prin vectorii $\overrightarrow{Q_2Q_2^*}$ de *aberație a razei*, respectiv de diferența de drum δ , denumită *aberația undei*, dintre o *suprafață de undă reală (deformată)* și o *sferă de referință gaussiană*, cu centrul în punctul imagine paraxială Q_2 . Pentru a fixa ideile, să considerăm suprafața de undă reală și sfera de referință gaussiană care trec prin centrul O_2 al pupilei de ieșire Π_2 (fig.1.71). În continuare este avantajos să considerăm un sistem de coordonate cartezian Q_2xyz , cu originea în Q_2 și cu axa Q_2z orientată pe direcția O_2Q_2 , astfel că ecuația sferei de referință se scrie simplu

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad (1.291)$$

unde $R = |O_2Q_2|$. În continuare, vom considera că suprafața de undă reală se abate de la această sferă, astfel că are ecuația

$$x^2 + y^2 + z^2 = (R + \delta)^2 \approx R^2 + 2R\delta, \quad (\delta \ll R), \quad (1.292)$$

unde $\delta = \delta(P, Q_2) = \delta(\vec{\rho}, \vec{h})$ reprezintă aberația undei în punctul $P(x, y, z) = P(\vec{\rho}, z \approx R)$ față de sfera de referință cu centrul în punctul imagine gaussiană $Q_2(0, 0, 0) = Q_2(\vec{h})$. Remarcăm că variabila $\vec{\rho}$ determină punctul de intersecție al razelor emergente cu planul pupilei de ieșire iar variabila \vec{h} este o măsură a înclinării razei paraxiale centrale față de axul optic.

Întrucât această înclinare trebuie să fie mică, planul xQ_2y reprezintă practic planul imaginii gaussiene. În plus, vom considera Q_2x practic paralel cu h (fig.1.71).

În cele ce urmează vom ține cont de faptul că sistemul optic considerat are simetrie axială, astfel că aberația unei $\delta(\vec{h}, \vec{\rho})$ poate să depindă, în general, numai de variabilele produse scalare h^2, ρ^2 și $\vec{h} \cdot \vec{\rho}$, care sunt invariante față de rotația în jurul axului optic, adică $\delta = \delta(h^2, \rho^2, h\rho \cos\theta)$, unde θ este unghiul dintre vectorii $\vec{\rho}$ și \vec{h} . În general, pentru a evidenția *aberațiile geometrice primare (aberațiile Seidel)*, este suficient să dezvoltăm în serie aberația unei δ față de invarianții de rotație până la termeni de ordinul al doilea, adică

$$\begin{aligned} \delta(h^2, \rho^2, h\rho \cos\theta) = & a_0 + b_1 h^2 + b_2 \rho^2 + b_3 h\rho \cos\theta + \frac{1}{2} [c_{11} h^4 + \\ & + c_{12} h^2 \rho^2 + c_{13} h^2 \cdot h\rho \cos\theta + c_{21} \rho^2 \cdot h^2 + c_{22} \rho^4 + \\ & + c_{23} \rho^2 \cdot h\rho \cos\theta + c_{31} h\rho \cos\theta \cdot h^2 + c_{32} h\rho \cos\theta \cdot \rho^2 + \\ & + c_{33} (h\rho \cos\theta)^2] + \dots, \end{aligned} \quad (1.293)$$

și să grupăm apoi coeficienții termenilor identici. Acești coeficienți sunt constante a căror valoare depinde de structura sistemului optic considerat și de poziția planului obiect.

Orice rază de lumină emergentă PP_0 satisface ecuația normalei la suprafața de undă reală, adică

$$\frac{x-x_0}{\partial F/\partial x} = \frac{y-y_0}{\partial F/\partial y} = \frac{z-z_0}{\partial F/\partial z}, \quad (1.294)$$

unde, conform ecuației (1.292),

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 - 2R\delta = 0. \quad (1.295)$$

Ținând cont că pentru $Q_2(\vec{h})$ dat, $\delta = \delta(\vec{\rho}) = \delta(x, y)$, din ecuația (1.294) rezultă

$$\frac{x-x_0}{x-R\frac{\partial\delta}{\partial x}} = \frac{y-y_0}{y-R\frac{\partial\delta}{\partial y}} = \frac{z-z_0}{z}, \quad (1.296)$$

sau

$$\begin{cases} x-x_0 = \left(1 - \frac{z_0}{z}\right) \left(x - R\frac{\partial\delta}{\partial x}\right), \\ y-y_0 = \left(1 - \frac{z_0}{z}\right) \left(y - R\frac{\partial\delta}{\partial y}\right). \end{cases} \quad (1.297)$$

În continuare, vom considera deplasarea (defocalizarea) z_0 față de planul $z=0$ al imaginii gaussiene ca foarte mică, astfel că vom neglija produsul $z_0 \cdot \delta$. De asemenea, vom aproxima peste tot $z \approx R$ întrucât distanțele de-a lungul axei optice până la suprafața de undă din dreptul pupilei de ieșire sunt practic egale cu raza sferei de referință.

deranjează ochiul dacă diametrul $2B\rho^3$ corespunde unui unghi de vedere mai mic decât rezoluția unghiulară $(\gamma_1)_{\min}^{\text{ochi}} \approx 1'$.

O rază oarecare care iese la distanța ρ de centrul pupilei de ieșire, va intersecta axa O_2z , în general, în alt punct decât punctul Q_2 de convergență a razelor paraxiale. Punând condiția de intersecție $x_0 = y_0 = 0$ într-un plan $z_0 \neq 0$, din ecuațiile (1.303) avem

$$\begin{cases} x_0 = \frac{z_0}{R}\rho \cos \theta + B\rho^3 \cos \theta = 0, \\ y_0 = \frac{z_0}{R}\rho \sin \theta + B\rho^3 \sin \theta = 0, \end{cases}$$

de unde rezultă **aberația sferică axială** (vezi fig.1.72)

$$z_0 = -BR\rho^2. \quad (1.305)$$

Semnul acestei aberații poate fi pozitiv sau negativ. Astfel, de exemplu, pentru o lentilă convergentă $z_0 < 0$ iar pentru o lentilă divergentă $z_0 > 0$, de unde rezultă posibilitatea reducerii aberației sferice prin combinarea acestora. În general, conform ecuațiilor (1.304), (1.305), aberația sferică depinde numai de variabila ρ , care este o măsură a aperturii unghiulare γ , de unde și denumirea de **aberație de apertură**.

Toate celelalte aberații geometrice prezise de ecuațiile (1.303) sunt datorate fasciculelor de raze înclinate față de axul optic ($h \neq 0$). Ele afectează deci numai imaginile punctelor extraaxiale și sunt de ordinul întâi, al doilea și al treilea în variabila h , care este o măsură a câmpului unghiular de vedere, θ . Aceste aberații ale fasciculelor înclinate pot fi cuprinse în denumirea de **aberații de câmp**. Dintre acestea vom considera mai întâi **coma** ($F \neq 0$). În acest caz, în planul ideal $z_0 = 0$, avem

$$x_0 = -Fh\rho^2(2 + \cos 2\theta), \quad y_0 = -Fh\rho^2 \sin 2\theta,$$

de unde, prin eliminarea unghiului 2θ , rezultă ecuația curbei de aberație

$$(x_0 + 2Fh\rho^2)^2 + y_0^2 = (Fh\rho^2)^2, \quad (1.306)$$

adică ecuația unui cerc cu centrul $(-2Fh\rho^2, 0)$ și raza $Fh\rho^2$. În consecință, datorită aberației comatice, razele de lumină care ies printr-un inel de rază ρ al pupilei de ieșire formează un cerc situat în planul imaginii gaussiene, deasupra sau dedesubtul punctului Q_2 , conform semnului coeficientului F (fig.1.73). Suprapunerea acestor cercuri, corespunzătoare întregii suprafețe a pupilei de ieșire, formează imaginea unui punct

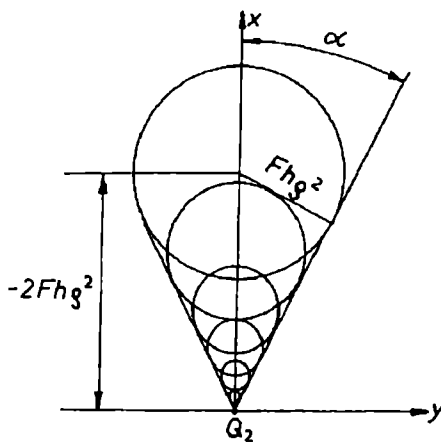


Fig.1.73. Coma.

obiect în acest plan. Imaginea astfel obținută are o formă alungită, asemenea cozii unei comete, de unde și numele de coma.

Remarcăm că, datorită dependenței coordonatelor x_0 și y_0 de unghiul 2θ , o rotație pe cercul $\rho = \text{const.}$ din planul pupilei de ieșire conduce la o rotație dublă pe cercul din planul imaginii gaussiene. De asemenea, cum rezultă din fig.1.73, înfășurătoarele cercurilor din planul imaginii gaussiene reprezintă două segmente de dreaptă care se intersectează în punctul imagine paraxială Q_2 sub unghiul 2α unde

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{Fh\rho^2/2Fh\rho^2}{2Fh\rho^2}\right) = \arcsin(1/2) = 30^\circ.$$

Spre deosebire de coma, care împrăștie imaginea unui punct într-un plan perpendicular pe axul optic (fig.1.73), astigmatismul o împrăștie în lungul axului optic (fig.1.74).

În continuare vom trata împreună *astigmatismul* ($C \neq 0$) și *curbura câmpului* ($D \neq 0$) întrucât apar combinate.

Considerând aceste aberații într-un plan de interceptie a razelor $z_0 = \text{const.}$, din ecuațiile (1.303) avem

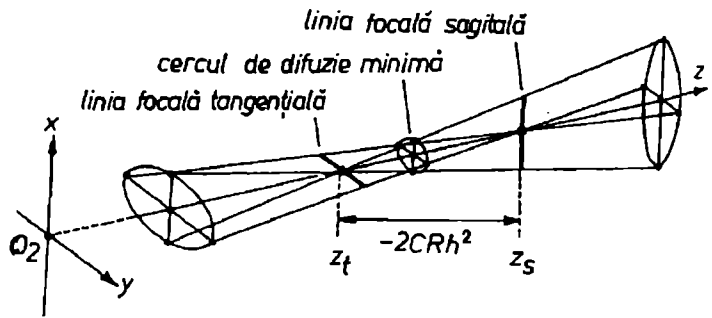


Fig.1.74. Astigmatismul și cercul de minimă difuzie.

$$\begin{cases} x_0 = \frac{z_0}{R}\rho \cos \theta + (2C + D)h^2 \rho \cos \theta, \\ y_0 = \frac{z_0}{R}\rho \sin \theta + Dh^2 \rho \sin \theta, \end{cases}$$

de unde, eliminând unghiul θ , obținem ecuația curbei de aberație

$$\frac{x_0^2}{\left[\frac{z_0}{R}\rho + (2C + Dh^2\rho)\right]^2} + \frac{y_0^2}{\left[\frac{z_0}{R}\rho + Dh^2\rho\right]^2} = 1. \quad (1.307)$$

Imaginea unui punct obiect extra-axial Q_1 apare deci ca o pată de lumină limitată de elipsa dată de ecuația (1.307), centrată pe axul O_2z și cu axele paralele cu axele de coordonate O_2x și O_2y (fig.1.74). Deplasând planul $z_0 = \text{const.}$, imaginea rămâne eliptică dar forma și dimensiunile ei se modifică. Pentru două poziții ale planului, elipsa degenerază în segmente rectilinii (linii focale), dintre care una este paralelă cu O_2x iar cealaltă este paralelă cu O_2y . Astfel, anulând pe rând semiaxele elipsei din ecuația (1.307), obținem poziția $z_0 = z_s$ a planului cu *linia focală sagitală*, formată de razele ecuatoriale, și poziția $z_0 = z_t$ a planului cu *linia focală tangențială*, formată de razele meridionale*, și anume

* Planul meridional este definit de punctul obiect Q_1 și axul optic.

$$z_s = -(2C + D)Rh^2, \quad z_t = -DRh^2. \quad (1.308)$$

Diferența $z_s - z_t = -2CRh^2$ reprezintă o măsură a astigmatismului (C) pentru punctul obiect Q_1 considerat (cu R, h date). Pentru $z_0 = (z_s + z_t)/2$ se obține cea mai mare constrângere a razelor de lumină într-un disc circular, denumit *cerc de minimă difuzie* (confuzie) sau pseudo-focar (fig.1.74).

Să considerăm mai departe o linie dreaptă normală pe axul optic în punctul obiect P_1 . Fiecărui punct de pe această dreaptă îi corespunde ca imagine o pereche de linii focale. Prin rotație în jurul axului optic obținem un obiect plan transversal și imaginea sa, reprezentată de o suprafață curbă, înfășurătoare a liniilor focale, denumită *caustică*. Conform ecuațiilor (1.308), această suprafață are două pânze și anume *câmpul sagital* (locul geometric al pozițiilor z_s) și *câmpul tangențial* (locul geometric al pozițiilor z_t), care au forma unor paraboloizi de revoluție cu vertexul comun în punctul imagine paraxială P_2 (fig.1.75). Această abatere de la planul imaginii gaussiene poartă numele de *curbura câmpului* sau *curbura Petzval*.

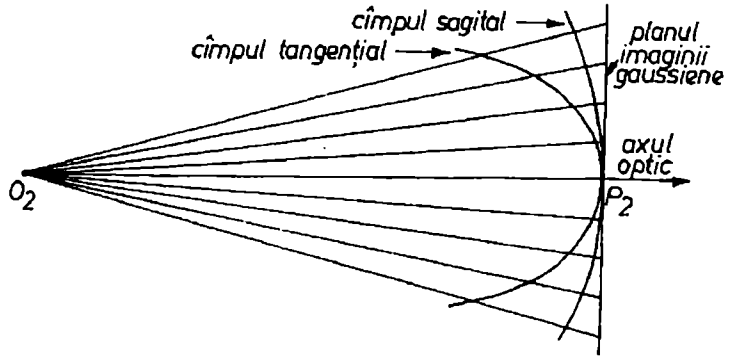


Fig.1.75. Curbura câmpului (Petzval).

Ultima aberație de ordinul al treilea este *distorsiunea* ($E \neq 0$). Conform ecuațiilor (1.303), în planul imaginii gaussiene $z_0 = 0$ avem

$$x_0 = -Eh^3, \quad y_0 = 0.$$

Fiind independentă de ρ și θ , distorsiunea nu mai determină împrăștierea luminii în jurul poziției imaginii ideale Q_2 , ci doar deplasarea transversală a acesteia în alt punct cu o cantitate proporțională cu h^3 . Imaginea unui obiect extins spațial rămâne clară, dar deformată. Excepție fac numai dreptele din planul obiect care intersectează axul optic. Toate celelalte drepte care nu intersectează axul optic au ca imagine curbe și anume cu convexitatea, dacă $E < 0$, respectiv cu concavitatea, dacă $E > 0$, spre axul optic. Aceste distorsiuni în formă de "pernă", respectiv de "butoi", se evidențiază ușor cu ajutorul unei figuri simple, de extindere finită, cum este rețeaua rectangulară (fig.1.76). Distorsiunea deranjează dacă este nevoie de măsurători precise extra-axiale.

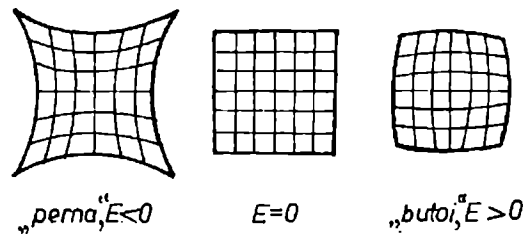


Fig.1.76. Distorsiunea.

Aberațiile geometrice primare descrise mai sus apar atunci când razele de lumină ies din domeniul paraxial și sunt cauzate de valoarea finită a aperturii (variabila ρ) și/sau a câmpului de vedere (variabila h). Ponderea acestor aberații este dată de coeficienții lui Seidel care, pentru o poziție dată a obiectului, depind de forma, grosimile, distanțele de separare și indicii de refracție ai componentelor sistemului optic și de poziția diaframelor. Determinarea analitică explicită a coeficienților lui Seidel în funcție de multitudinea parametrilor de care depind reprezintă o sarcină extrem de dificilă chiar și pentru sisteme optice simple.

Pentru ilustrare, să considerăm o lentilă subțire diaframată (fig.1.77,b), astfel că ea este traversată de razele de lumină numai în vecinătatea axului optic Oz , unde lentila se comportă aproape ca o lamă cu fețe plane și paralele, deci unghiurile de incidență și emergență sunt practic egale (θ_1). Ne propunem să calculăm astigmatismul acestei lentile aplicând de două ori formulele lui Young pentru dioptrul sferic (vezi secțiunea 1.2.1, ecuațiile (1.115) și (1.116)), de astă dată fasciculul de raze provenind de la un punct obiect extra-axial Q_1 (fig.1.77, a). Astfel, considerând mediile de imersie extreme identice ($n_1 = n_3$) și notând cu $n = n_2/n_1$ indicele relativ de refracție al lentilei, pentru un evantai de raze meridionale (din planul Q_1Oz) ecuația (1.115) conduce la

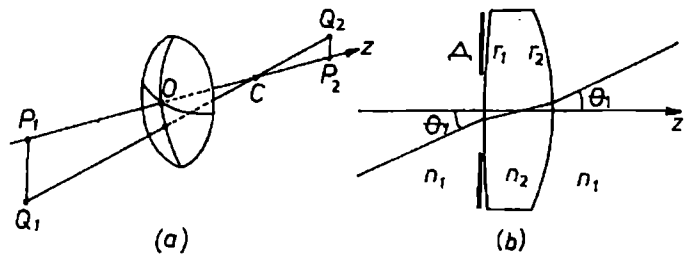


Fig.1.77. Pentru calculul astigmatismului unei lentile subțiri.

de unde, prin adunare, rezultă poziția t a câmpului tangențial

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\cos^2\theta_1}{\ell} + \frac{n \cos^2\theta_2}{s_2} = \frac{n \cos\theta_2 - \cos\theta_1}{r_1}, \\ -\frac{n \cos^2\theta_2}{s_2} + \frac{\cos^2\theta_1}{t} = -\frac{n \cos\theta_2 - \cos\theta_1}{r_2}, \end{array} \right. \quad (1.309)$$

de unde, prin adunare, rezultă poziția t a câmpului tangențial

$$\frac{1}{\ell} + \frac{1}{t} = \frac{n \cos\theta_2 - \cos\theta_1}{\cos^2\theta_1} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (1.310)$$

În mod similar, pentru un evantai de raze ecuatoriale (sagitale), ecuația (1.117) conduce la

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\ell} + \frac{n}{s_2''} = \frac{n \cos\theta_2 - \cos\theta_1}{r_1}, \\ -\frac{n}{s_2''} + \frac{1}{s} = -\frac{n \cos\theta_2 - \cos\theta_1}{r_2}, \end{array} \right. \quad (1.311)$$

de unde, prin adunare, rezultă, poziția s a câmpului sagital

$$\frac{1}{\ell} + \frac{1}{s} = (n \cos \theta_2 - \cos \theta_1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (1.312)$$

În particular, pentru $\theta_1 = \theta_2 = 0$, abscisele oblice ℓ, s, t se transformă în abscise obișnuite (în lungul axului optic), respectiv ℓ_0, s_0, t_0 , astfel că ecuațiile (1.310) și (1.312) conduc la formula lentilei subțiri

$$\frac{1}{\ell_0} + \frac{1}{t_0} = \frac{1}{\ell_0} + \frac{1}{s_0} = (n-1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{1}{f}. \quad (1.313)$$

În continuare, vom considera o suprafață sferică obiect AOB de rază $OC = \rho$, așezată simetric față de axul optic Oz (fig.1.78). Notând segmentele $AP = \ell$, $OP = \ell_0$ și $\widehat{APO} = \theta_1$, avem

$$\rho^2 = \ell^2 + (\ell_0 - \rho)^2 - 2\ell(\ell_0 - \rho)\cos \theta_1,$$

sau, aproximând $\cos \theta_1 \approx 1 - (\theta_1^2/2)$,

$$\rho^2 = (\ell - \ell_0 + \rho)^2 + \ell(\ell_0 - \rho)\theta_1^2.$$

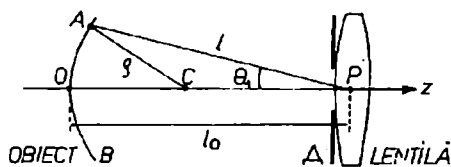


Fig.1.78. Pentru calculul curburilor $1/\rho_s$ și $1/\rho_t$ și deducerea condiției lui Petzval.

Dezvoltând în serie radicalul membrului al doilea și limitându-ne la primii doi termeni, obținem

$$\rho = \ell - \ell_0 + \rho + \frac{1}{2} \frac{\ell(\ell_0 - \rho)}{\ell - \ell_0 + \rho} \theta_1^2.$$

Neglijând $\ell - \ell_0$ față de ρ și rearanjând termenii rezultă finalmente relația

$$\frac{1}{\ell} = \frac{1}{\ell_0} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\ell_0} \right) \theta_1^2, \quad (1.314)$$

valabilă în vecinătatea axului optic. Vom folosi această formulă atât pentru curbura $1/\rho$ a suprafeței obiect, cât și pentru curburile $1/\rho_t, 1/\rho_s$ corespunzătoare câmpului tangențial, respectiv sagital, adică

$$\begin{cases} \frac{1}{t} = \frac{1}{t_0} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho_t} - \frac{1}{t_0} \right) \theta_1^2, \\ \frac{1}{s} = \frac{1}{s_0} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho_s} - \frac{1}{s_0} \right) \theta_1^2, \end{cases} \quad (1.315)$$

unde apare același unghi θ_1 deoarece unghiul de emergență din lentilă este sensibil egal cu unghiul de incidență (fig.1.77,b). Introducând mai departe expresiile (1.314), (1.315) în ecuațiile (1.310) și (1.312) și ținând cont de relațiile (1.313) și de aproximațiile $\theta_1 = n\theta_2$, $\cos \theta \approx 1 - (\theta^2/2)$, $1/\cos^2 \theta \approx 1 + \theta^2$, obținem rezultatul simplu

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_t} = \frac{3n+1}{nf}, \\ \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_s} = \frac{n+1}{nf}. \end{cases} \quad (1.316)$$

În particular, pentru o suprafață obiect plană ($\rho \rightarrow \infty$), avem

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho_t} = \frac{3n+1}{nf}, \\ \frac{1}{\rho_s} = \frac{n+1}{nf}. \end{cases} \quad (1.317)$$

Observăm că, pentru o lentilă dată, curbura câmpului au același sens, curbura $1/\rho_t$ a câmpului tangențial fiind mai mare decât curbura $1/\rho_s$ a câmpului sagital (vezi și fig. 1.75). Curburile câmpului pentru lentila convergentă ($1/f > 0$) și lentila divergentă ($1/f < 0$) sunt de sensuri opuse. Apare astfel posibilitatea compensării astigmatismului și curburi câmpului pentru un sistem centrat de lentile subțiri alipite și diafragmate. În acest caz, curbura câmpului se însumează algebric, adică

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho_t} = \sum_i \frac{3n_i+1}{n_i f_i} = \frac{3}{f} + \sum_i \frac{1}{n_i f_i}, \\ \frac{1}{\rho_s} = \sum_i \frac{n_i+1}{n_i f_i} = \frac{1}{f} + \sum_i \frac{1}{n_i f_i}, \end{cases} \quad (1.318)$$

unde am notat cu $1/f = \sum_i 1/f_i$ convergența sistemului.

Cerința $\rho_t = \rho_s$ de suprimare a astigmatismului, implică deci condiția $1/f = 0$, adică sistemul să fie afocal (echivalent cu o lamă plan-paralelă), caz în care ecuațiile (1.318) devin

$$\frac{1}{\rho_t} = \frac{1}{\rho_s} = \sum_i \frac{1}{n_i f_i}. \quad (1.319)$$

Impunând și anihilarea curburii câmpului, adică $1/\rho_t = 1/\rho_s = 0$, rezultă **condiția lui Petzval**

$$\sum_i \frac{1}{n_i f_i} = 0. \quad (1.320)$$

Remarcăm că și sistemele cu distanță focală finită ($1/f \neq 0$) pot fi ameliorate dacă satisfac condiția lui Petzval (1.320). În acest caz, cum rezultă din ecuațiile (1.318), $\rho_s = 3\rho_t = f$.

În general, o oarecare curbura a câmpului poate fi tolerată la instrumentele vizuale deoarece ochiul se poate acomoda pentru ea. În schimb, pentru obiectivele aparatelor fotografice sau de proiecție, cerința de aplatizare a câmpului este mult mai strictă. Dacă condiția lui Petzval nu este suficientă sau nu poate fi aplicată, câmpul poate fi substanțial rectificat în domeniul axial cu ajutorul unei *lentile aplatizoare de câmp (field flattener)*, plasată în imediata vecinătate a planului imagine. De regulă, curbura unei astfel de lentile este mică pentru a nu introduce aberații.

Dăm aici, fără demonstrație, și alte rezultate privind aberațiile lentilelor subțiri. Astfel, pentru obiecte îndepărtate, razele de curbură care minimizează aberația sferică sunt *

$$\begin{cases} r_1 = \frac{2(n+2)(n-1)}{n(2n-1)}f, \\ r_2 = -\frac{2(n+2)(n-1)}{4+n-2n^2}f, \end{cases} \quad (1.321)$$

iar cele care elimină complet coma sunt

$$\begin{cases} r_1 = \frac{n^2-1}{n^2}f, \\ r_2 = \frac{n^2-1}{n^2-n-1}f. \end{cases} \quad (1.322)$$

Proiectantul de lentile este confruntat cu un compromis optimal între criteriile (1.321) și (1.322).

În general, pentru a minimiza aberațiile cromatice și geometrice și a găsi o configurație optimă pentru scopul propus, proiectantul de sisteme optice trebuie să manipuleze un spațiu multidimensional de variabile (indici de refracție, forme, grosimi, distanțe, diafragme). Un exemplu simplu a fost prezentat în secțiunea 1.2.7 în care s-a arătat cum se compensează aberația cromatică prin combinarea de lentile confecționate din sticle diferite. Aceste lentile prezintă aberații sferice de semne opuse ce depind de forma lentilelor. Ele prezintă de asemenea și aberații de coma de semne opuse care depind (în alt mod) de forma lor. De aceea, gradele de libertate, disponibile la acromatizarea sistemului, sunt adeseori folosite pentru a compensa totodată, pe cât este posibil, și aberațiile sferice și coma.

Foarte extinse sunt și metodele prin care aberațiile de ordinul al treilea, prezentate mai înainte, sunt contrabalansate în parte prin aberațiile corespunzătoare de ordin superior. Pentru astfel de rafinamente ca și, în general, pentru optimizarea automată a parametrilor sistemelor optice, există astăzi programe elaborate de calcul pentru *trasarea exactă a razelor de lumină* prin sisteme și pentru *determinarea diagramei punctelor (spot diagram)* de intersecție cu diverse plane perpendiculare pe axul optic. Astfel, pornind cu o rețea regulată de puncte (de obicei pătratică) din planul pupilei de intrare, distribuția densității punctelor de interceptie pe orice plan ulterior, de exemplu pe planul imaginii gaussiene sau pe planele vecine, reprezintă o măsură directă a distribuției fluxului de lumină în acel plan.

Pe de altă parte, începând cu teoria clasică a aberațiilor, fundamentată de Hamilton (metoda funcțiilor caracteristice) și de Bruns (metoda funcției eiconal) și până în prezent, metodele analitice de studiu a proprietăților geometrice ale suprafețelor de undă au fost și sunt investigate intens.

Spre deosebire de undele plane, sferice sau cilindrice, ce intervin uneori, în general suprafețele de undă uzuale reprezintă entități incredibil de complicate. Chiar dacă, departe de zona de focalizare, apare destul de netedă și de tratabilă, pe măsură ce se apropie de aceasta, suprafața de undă devine din ce în ce mai greu de vizualizat și practic imposibil de analizat. Un instrument foarte puternic pentru controlul optic, în special al suprafețelor de

* Vezi V.V. Bianu, *Optica geometrică*, Ed. Tehnică, București, 1962.

undă furnizate de componentele optice, este *interferometrul Twyman-Green* (fig.1.79).

Acesta reprezintă o variantă a interferometrului lui Michelson, cu o sursă punctuală S , de lumină monocromatică, în focarul lentilei L_1 și cu o oglindă O_2 perfect sferică, cu centrul C în focarul gaussian al lentilei sau sistemului optic de testat L . Dacă acesta nu are aberații, atunci unda care se reflectă de O_2 și se întoarce la divizorul de fascicul D este perfect plană și câmpul de interferență cu unda plană reflectată de

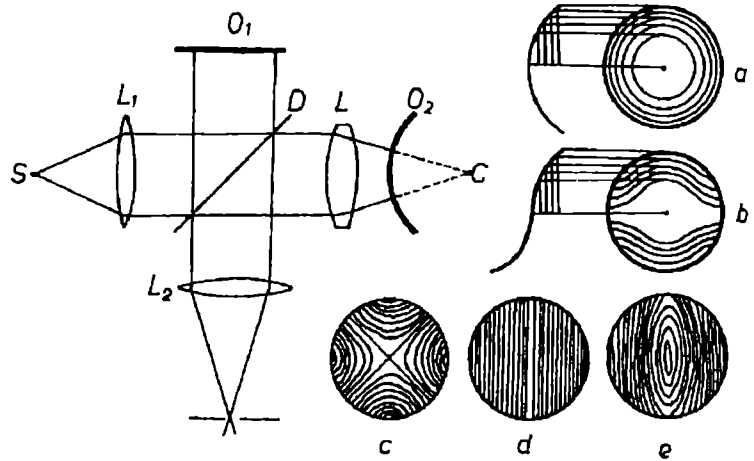


Fig.1.79. Interferometrul Twyman - Green și câteva interferograme.

oglinzina O_1 apare uniform. Dacă însă aberațiile deformează suprafața unei care trece (dus și întors) prin sistemul studiat L , atunci această deformare se manifestă clar prin conturul franjelor de interferență (linii de egală diferență de fază față de unda plană de referință). Figurile de interferență pot fi observate cu ochiul sau fotografiate. Fig.1.79 ilustrează interferogramele Twyman-Green caracteristice pentru aberația sferică (a) și coma (b), ambele corespunzând planului focal paraxial, și pentru astigmatism, corespunzător planului cercului de minimă difuzie (c), planului unei linii focale (d) sau altui plan (e). Orice variație locală a drumului optic, până la fracțiuni de lungimi de undă, cauzată de imperfecțiuni ale suprafețelor sistemului sau de neomogenități ale indicelui de refracție, produce deformarea suprafeței de undă și generează franje în zona respectivă a câmpului de interferență, care poate fi astfel depistată și marcată. Această metodă are marele avantaj că furnizează imediat forma completă a suprafeței de undă, cum este ilustrat prin construcția din stânga interferogramelor (a) și (b) pentru planul meridional. Ca de obicei, performanțele interferometrului cresc substanțial dacă sursa de lumină monocromatică convențională este înlocuită cu o sursă de lumină laser.

Anterior, am considerat în mod constant numai lentile și sisteme optice cu suprafețe sferice și, odată cu aceasta, și aberațiile geometrice inerente lor. Datorită relativei ușurințe și preciziei mari cu care pot fi realizate suprafețele sferice, acestea au căpătat cea mai largă utilizare, în contrast cu suprafețele carteziene, (vezi secțiunea 1.1.3.). Menționăm însă că suprafețele și elementele asferice stigmatice sunt frecvent încorporate în sistemele optice de format imagini de mare performanță.

Dacă prin metoda interferometrică, descrisă mai sus, se pot stabili cu precizie deformările suprafețelor de undă de către un sistem optic real, se pune problema corectării lor corespunzătoare. De aceea, în încheiere, vom analiza, pe scurt, problema practică, importantă, a *suprafețelor corectoare*. Astfel, vom arăta că orice defect de stigmatism (al unei perechi date de puncte conjugate), care se produce la trecerea unui fascicul inițial homocentric printr-un sistem optic, poate fi eliminat prin corectarea corespunzătoare a suprafeței de separare a ultimului dioptru refringent al sistemului. Pentru aceasta, ne vom referi la construcția lui Huygens, fig.1.10 din secțiunea 1.1.2, și vom reformula problema în

felul următor: fiind dată suprafața de undă (deformată) ϕ_1 din penultimul mediu (n_1) al unui sistem optic, să determinăm forma ultimei suprafețe de separare Σ astfel ca suprafața de undă ϕ_2 din ultimul mediu (n_2) să fie sferică. Poziția suprafeței Σ se determină astfel din intersecția acelor normale la ϕ_1 și ϕ_2 , ale căror segmente s_1 , s_2 până la Σ satisfac condiția de stigmatism $n_1 s_1 + n_2 s_2 = \text{constant}$. Evident, în funcție de valoarea aleasă pentru constanta din această condiție, există o infinitate de suprafețe Σ posibile.

În practică este, deseori, suficient să se procedeze la *retușuri optice locale*. Pentru aceasta, să considerăm cazul obișnuit al ultimei suprafețe refringente Σ , care separă un mediu de indice n de aer ($n = 1$), și al unei suprafețe de undă oarecare ϕ în ultimul mediu, ușor deplasată față de poziția teoretică ϕ_0 , corespunzătoare stigmatismului riguros (fig.1.80). Pentru

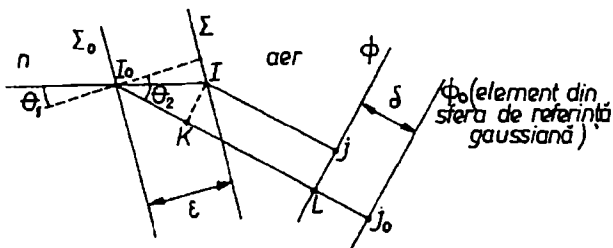


Fig.1.80. Pentru înțelegerea principiului retușurilor optice.

compensarea aberației locale δ a undei, este suficient deci să șlefuiim puțin suprafața inițială Σ astfel ca să fie adusă în poziția corectă Σ_0 . Este ușor de stabilit relația dintre adâncimea ϵ de șlefuire locală și aberația de undă δ care trebuie eliminată. Astfel, condiția de retuș optic local se scrie

$$n I_0 I + IJ = I_0 J_0, \quad (1.323)$$

sau, ținând cont că $IJ = KL$,

$$n I_0 I = I_0 K + \delta. \quad (1.324)$$

Din geometria fig.1.80 avem însă

$$I_0 I = \epsilon / \cos \theta_1, \quad I_0 K = I_0 I \cdot \cos(\theta_2 - \theta_1), \quad (1.325)$$

astfel că din ecuațiile (1.324), (1.325) obținem relația căutată dintre ϵ și δ , adică

$$\epsilon = \frac{\cos \theta_1}{n - \cos(\theta_2 - \theta_1)} \cdot \delta \approx \frac{\delta}{n - 1}. \quad (1.326)$$

Considerații similare, pentru o suprafață reflectantă, ne conduc la relația

$$\epsilon = \frac{\delta}{2 \cos \theta_1} \approx \frac{\delta}{2}. \quad (1.327)$$

Deoarece drumul pe diversele raze dintre punctele conjugate riguros stigmatice trebuie să conțină același număr de λ , rezultă că toleranța asupra aberației δ , deci a lui ϵ , trebuie să coboare la mici fracțiuni de λ .

§. 1. 3. Medii neomogene

Curbarea continuă a razei de lumină în medii neomogene explică multe fenomene naturale cum sunt, de exemplu, fenomenele de *refracție atmosferică*. Astfel, datorită scăderii densității, respectiv a indicelui de refracție al aerului, cu altitudinea, razele de lumină care vin de la o stea se curbează cu concavitatea spre Pământ (vezi secțiunea 1.1.1, ecuația (1.16)). Din acest motiv, înălțimea aparentă a steii față de linia orizontului este mai mare decât înălțimea reală (*refracția astronomică regulată*). *Refracția neregulată*, datorată turbulenței atmosferice, cauzează *scintilația stelelor*. Efecte similare au loc la suprafața Pământului sau a altor suprafețe când temperatura acestora este mai mare sau mai mică decât a aerului înconjurător, inducând astfel un gradient de temperatură, respectiv de densitate și de indice de refracție (*miraj*).

În general, calculul traiectoriei razelor de lumină în medii neomogene continue prezintă interes pentru multe aplicații. Ca prim exemplu, să considerăm *lentila de gaz* care constă, în principiu, dintr-un tub cilindric metalic încălzit prin care trece un curent laminar de gaz. Concentrația gazului, deci și indicele de refracție, este mai mare pe axul tubului, unde gazul este mai rece. Din acest motiv, razele de lumină trimise prin tub sunt deviate spre axul acestuia ca sub efectul unei lentile. În comparație cu o lentilă de sticlă, lentila de gaz elimină complet pierderile de lumină cauzate de reflexie la interfețele aer-sticlă și de împrăștiere pe praful și imperfecțiunile de pe suprafața lentilei. O importanță practică deosebită o au structurile gradate planare sau cu simetrie cilindrică pentru realizarea *ghidurilor optice* (plăci și fibre optice).

O metodă foarte sensibilă pentru vizualizarea neomogenităților indicelui de refracție, bazată pe devierea razelor de lumină de către acestea, a fost propusă de A. Töpler (1864) și este cunoscută sub numele de *metoda Schlieren* sau *metoda striurilor* (de la cuvântul german die Schliere care înseamnă striu). Principiul metodei este ilustrat în fig. 1.81,a, unde imaginea sursei de lumină S (punctuală sau fantă) este formată pe un mic disc opac (sau "lamă de cuțit") D cu ajutorul lentilelor L_1, L_2 , între care este montată camera Schlieren C care conține mediul optic transparent de investigat. Lentila L_3 este folosită pentru a forma imaginea diverselor plane din acest mediu pe ecranul E.

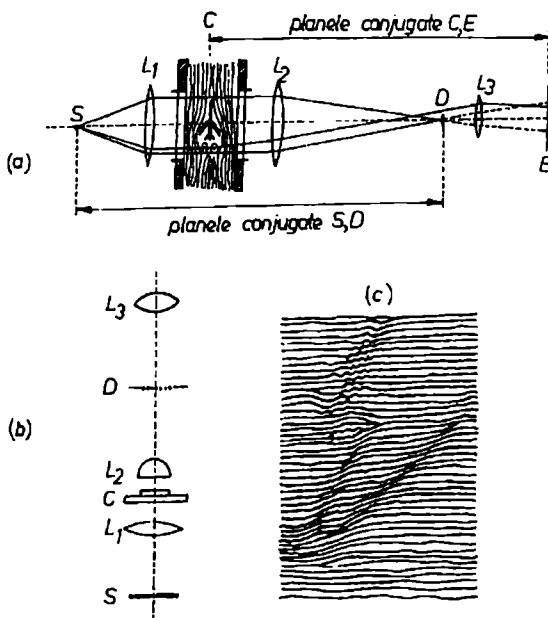


Fig.1.81. Principiul metodei Schlieren.

Evident, dacă mediul este omogen, ecranul E apare întunecat datorită ecranării realizate mai înainte de discul D. Dacă însă mediul prezintă neomogenități, razele de lumină deflectate de către acestea ocolesc obstacolul D și formează pe ecranul E *imaginea Schlieren*, adică o hartă a gradientilor locali ai indicelui de refracție din planul pus la punct cu ajutorul lentilei L_3 . O metodă complementară cu tehnica Schlieren este *metoda shadow*

sau *metoda umbrelor* în care stopul D este înlocuit cu o mică apertură într-un ecran opac. În acest caz, vor ajunge pe ecranul E numai razele de lumină nedeviate, cele deviate lovind ecranul opac și fiind excluse din fasciculul de lumină inițial. În felul acesta, pe ecranul E apare *imaginea shadow*, reprezentând pe un fond luminos contururile întunecate ale zonelor cu indice de refracție neuniform.

Și în acest domeniu este loc pentru multă imaginație. Astfel, de exemplu, fig.1.81,b, ilustrează adaptarea unui microscop la observații prin metoda Schlieren (J.R. Meyer- Arendt, 1961). Adaptarea constă în montarea între obiectiv (L_2) și ocular (L_3) a unei rețele unidimensionale (D), de 5-10 linii/mm, paralele cu fanta de iluminare S. Dacă obiectul investigat, depus pe lama de sticlă (C), este omogen, imaginea sa apare brăzdată de liniile echidistante corespunzătoare rețelei (D). Orice variație a indicelui de refracție cauzează distorsiuni caracteristice, cum este arătat în fig.1.81,c, când un strat subțire de substanță transparentă acoperă parțial lama de sticlă (C).

Un alt mediu "optic" continuu neomogen se realizează în dispozitivele de *optică electronică și ionică*, în particular în microscopul electronic și ionic. Mișcarea nerelativistă a particulelor este descrisă de legile mecanicii clasice și, cum am arătat în secțiunea 1.1.2, pentru un câmp de forțe conservative, satisface principiul Maupertuis-Euler, analog principiului lui Fermat, viteza particulei jucând rolul indicelui de refracție n . Astfel, de exemplu, considerând mișcarea particulelor încărcate într-un câmp electrostatic și alegând convenabil zeroul potențialului electric U , avem analogia $n = \sqrt{U}$ unde U trebuie să satisfacă *ecuația lui Laplace* $\Delta U = 0$. Cu această condiție, toate ecuațiile opticii geometrice pentru razele de lumină rămân valabile și pentru optica geometrică a traiectoriilor electronilor și ionilor. Astfel, traiectoriile particulelor sunt normale la familia de suprafețe care satisfac *ecuația eiconalului* $|\nabla\phi| = \sqrt{U}$, *extinderea* $U d\Omega dS \cos\gamma$ a fasciculului de particule rămâne invariabilă în timpul propagării, radianțele obiectului și imaginii satisfac *teorema lui Clausius* $L_1/U_1 = L_2/U_2$, ș.a.m.d.

O metodă generală de calcul pentru câmpul optic în aproximația opticii geometrice constă în determinarea suprafețelor de undă $\phi(\vec{r}) = \text{constant}$, prin integrarea ecuației eiconalului $(\nabla\phi)^2 = n^2$ și construcția razelor de lumină cu ajutorul ecuației $\nabla\phi = n\vec{\tau}$. Alternativ, se poate trece direct la integrarea ecuației razei de lumină, respectiv a ecuațiilor Hamilton (canonice) sau Euler-Lagrange.

În continuare, vom ilustra ultima procedură pentru situațiile cele mai simple, în care distribuția indicelui de refracție prezintă anumite simetrii și anume simetrie de translație (structuri planare), simetrie cilindrică și simetrie sferică.

1. 3. 1. Structuri planare

Să considerăm problema unidimensională a indicelui de refracție de forma generală $n = n(x)$ într-un sistem cartezian de coordonate. Elementul de drum pe traiectorie este astfel dat de ecuația

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2. \quad (1.328)$$

Datorită dependenței indicelui de refracție numai de variabila x este convenabil să considerăm ecuația razei de lumină pentru celelalte două componente și anume

$$\frac{d}{ds}(n\tau_y) = 0, \quad \frac{d}{ds}(n\tau_z) = 0, \quad (1.329)$$

de unde rezultă că mărimile $n\tau_y$ și $n\tau_z$ se conservă de-a lungul traiectoriei, adică

$$ndy/ds = A, \quad ndz/ds = B, \quad (1.330)$$

unde A, B sunt constante care se determină din condițiile inițiale. Din ecuațiile (1.328) și (1.330) mai rezultă

$$ndx/ds = \sqrt{n^2 - (A^2 + B^2)}. \quad (1.331)$$

Parametrul s se elimină prin împărțirea ecuațiilor (1.330) și (1.331) de unde obținem sistemul

$$\begin{cases} dy/dz = A/B, \\ dy/dx = A/\sqrt{n^2(x) - (A^2 + B^2)}, \\ dz/dx = B/\sqrt{n^2(x) - (A^2 + B^2)}, \end{cases} \quad (1.332)$$

prin integrarea căruia rezultă proiecțiile traiectoriei razei pe cele trei plane de coordonate. Observăm că, indiferent de forma distribuției $n(x)$, urma traiectoriei în planul yOz este dreapta

$$y = (A/B)z + C, \quad (1.333)$$

adică traiectoria este o curbă plană în planul definit de ecuația (1.333). De aceea, fără a pierde din generalitate, vom considera traiectoria în planul $y = 0$, adică alegem constantele $A = C = 0$, cum este ilustrat în fig.1.82. Sensul fizic al constantei B , ecuația (1.330), este în acest caz

$$B = n\tau_z = ndz/ds = n \cos \gamma = n_0 \cos \gamma_0, \quad (1.334)$$

unde n_0 și γ_0 sunt valorile corespunzătoare "punctului de lansare" $x = 0, z = z_0$. Evident, ecuația (1.334) reprezintă *legea Snell-Descartes* $n \sin \alpha = n_0 \sin \alpha_0$ pentru mediile cu structură planară. Cu $A = 0, B = n_0 \cos \gamma_0$, a treia ecuație integrată reprezintă traiectoria razei

$$z(x) - z_0 = \int_0^x \frac{n_0 \cos \gamma_0}{\sqrt{n^2(x) - n_0^2 \cos^2 \gamma_0}} dx. \quad (1.335)$$

Domeniul valorilor x care permit propagarea razelor de lumină rezultă din condiția ca integrandul să fie real, adică

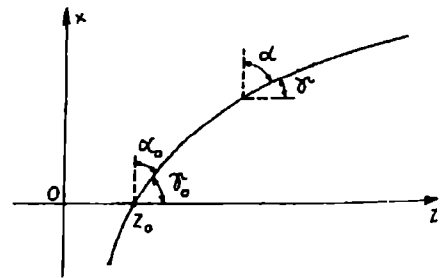


Fig.1.82. O traiectorie luminoasă și parametrii săi locali.

$$n(x) \geq n_0 \cos \gamma_0. \quad (1.336)$$

În cazul în care $n(x) < n_0$ și $dn/dx < 0$ (fig.1.83), ecuația (1.336) impune o valoare limită $x = x_{\max}$ dată de ecuația

$$n(x_{\max}) = n_0 \cos \gamma_0. \quad (1.337)$$

Această valoare limită, pentru care $dx/ds = 0$ (vezi ecuația (1.331)) corespunde *punctului de întoarcere* sau de *reflexie totală*. Cu cât este mai mare unghiul de lansare γ_0 , cu atât este mai mare și valoarea distanței de pătrundere x_{\max} (fig.1.83). Evident, reflexia totală nu are loc dacă $n(x) > n_0$ și $dn/dx > 0$.

Să considerăm în continuare distribuția cu simetrie plană, adică un mediu în care indicele de refracție scade simetric, de o parte și de alta, față de valoarea n_0 din planul $x = 0$. În acest caz, în funcție de unghiul γ_0 , traiectoriile sunt confinate între o limită superioară x_{\max} și o limită inferioară x_{\min} . Astfel de distribuții prezintă o deosebită importanță practică pentru ghidarea luminii în circuite optice, cum este, de exemplu, *distribuția parabolică* denumită comercial *Selfoc*, al cărei indice are expresia

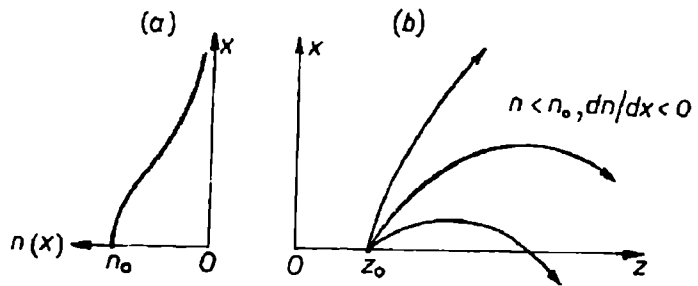


Fig.1.83. O familie de traiectorii luminoase (b) pentru distribuția (a).

$$n^2 = n_0^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right), \quad (1.338)$$

unde n_0 și a sunt constante (fig.1.84). Efectuând integrala din ecuația traiectoriei, ecuația (1.335), cu distribuția (1.338) și luând punctul de lansare în originea $O(x=0, z=0)$ a coordonatelor, obținem

$$z(x) = a \cos \gamma_0 \cdot \arcsin \left(\frac{x}{a \sin \gamma_0} \right), \quad (1.339)$$

sau, inversând dependența,

$$x(z) = a \sin \gamma_0 \cdot \sin \left(\frac{z}{a \cos \gamma_0} \right). \quad (1.340)$$

Ecuația (1.340) reprezintă o traiectorie sinusoidală (fig.1.84) de amplitudine $x_{\max} = a \sin \gamma_0$ (cum rezultă și direct din condiția de reflexie totală (1.337) și distribuția (1.338)) și de semi-perioadă spațială $\Delta z = \pi a \cos \gamma_0$. Cu creșterea unghiului de lansare γ_0 , amplitudinea

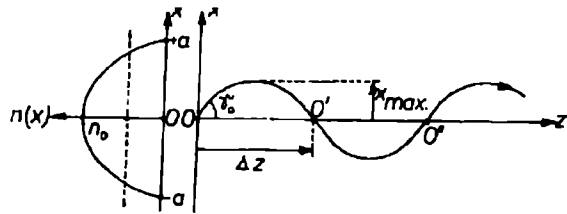


Fig.1.84. O traiectorie sinusoidală în structura planară Selfoc.

crește și perioada scade. Cum era de așteptat, din considerațiile generale făcute mai înainte lumina este confinată să se propage între limitele $\pm x_{\max}$. Dar, proprietatea remarcabilă a sistemului Selfoc constă în focalizarea tuturor razelor paraxiale ($\cos \gamma_0 \approx 1$) în același punct după fiecare semi-perioadă $\Delta z \approx \pi a$. Punctele de focalizare $O', O'' \dots$, reprezintă veritabile imagini succesive ale punctului de lansare O , întrucât drumul optic între două focalizări succesive consecutive este practic același pentru razele paraxiale. Într-adevăr, ținând cont de ecuațiile (1.334), (1.338), (1.340) avem

$$[OO'] = \int_0^{O'} n ds = \int_0^{\Delta z} n \frac{ds}{dz} dz = (n_0 \cos \gamma_0)^{-1} \int_0^{\Delta z} n^2[x(z)] dz = \pi a n_0 + O(\gamma_0^2), \quad (1.341)$$

unde $O(\gamma_0^2)$ reprezintă termeni în γ_0 începând cu gradul al doilea. Această proprietate se explică prin aceea că, cu creșterea unghiului de lansare γ_0 , raza parcurge între două focalizări un drum geometric mai lung decât raza axială ($\gamma_0 = 0$) dar, în cea mai mare parte, printr-o regiune de indice de refracție mai mic, astfel că drumul optic rămâne același.

1. 3. 2. Structuri cilindrice

Să considerăm un mediu al cărui indice de refracție depinde numai de distanța r față de o axă fixă Oz . În acest caz, vom scrie mai întâi traiectoria în reprezentarea $r(z), \theta(z), z$ (vezi fig.1.13 din secțiunea 1.1.2) pentru a ilustra aplicarea formalismului lagrangeian în coordonate cilindrice r, θ, z . Elementul de drum pe traiectorie este, deci, (vezi fig.1.85)

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{(dr)^2 + (r d\theta)^2 + (dz)^2} = \\ &= (1 + r'^2 + r^2 \theta'^2)^{1/2} dz, \quad (1.342) \end{aligned}$$

unde am notat $r' = dr/dz, \theta' = d\theta/dz$, astfel că *lagrangeianul optic* are forma (vezi ecuația (1.50) din secțiunea 1.1.2)

$$L(r, \theta, r', \theta', z) = n \frac{ds}{dz} = n(r) \cdot (1 + r'^2 + r^2 \theta'^2)^{1/2}. \quad (1.343)$$

Evident, expresia (1.343) a lagrangeianului în coordonate cilindrice rezultă din expresia sa în coordonate carteziene

$$L(x, y, x', y', z) = n \frac{ds}{dz} = n(x, y, z) \cdot (1 + x'^2 + y'^2)^{1/2}, \quad (1.344)$$

în care efectuăm transformarea $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = z$.

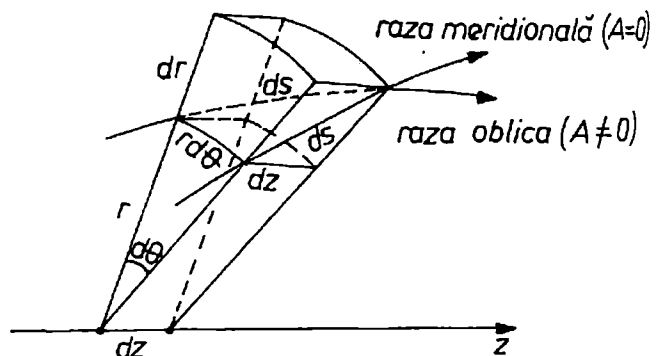


Fig.1.85. Element de structură cu simetrie cilindrică.

Acum avem la dispoziție următorul sistem de ecuații diferențiale pentru traiectoria razei de lumină

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{\partial L}{\partial r'} \right) = \frac{\partial L}{\partial r}, \quad \frac{d}{dz} \left(\frac{\partial L}{\partial \theta'} \right) = \frac{\partial L}{\partial \theta}, \quad \frac{d}{ds} (nr_z) = \frac{\partial n}{\partial z}, \quad (1.345)$$

în care primele două ecuații sunt *ecuațiile Euler-Lagrange* iar a treia este componenta z a ecuației razei. Cum am arătat în secțiunea 1.1.2, numai două din ecuațiile (1.345) sunt independente, astfel că le vom alege pe acelea care sunt mai ușor de integrat. Pentru distribuția cilindrică $n = n(r)$, considerată aici, avem $\partial L / \partial \theta = 0$, $\partial n / \partial z = 0$, astfel că din ultimele două ecuații (1.345) rezultă conservarea momentelor (impulsurilor) corespunzătoare, adică

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \theta'} = \frac{nr^2\theta'}{\left(1 + r'^2 + r^2\theta'^2\right)^{1/2}} = nr^2 d\theta/ds = A, \quad (1.346)$$

$$p_z = nr_z = ndz/ds = B, \quad (1.347)$$

unde

$$A = (p_\theta)_0 = n_0 r_0^2 (d\theta/ds)_0, \quad B = (p_z)_0 = n_0 \cos \gamma_0, \quad (1.348)$$

sunt constante de integrare fixate de condițiile inițiale ale traiectoriei. Din ecuația (1.346) observăm că, dacă $A = 0$, deci $d\theta/ds = 0$, atunci traiectoria rămâne mereu într-un plan dat care conține axul de simetrie Oz și reprezintă o *rază meridională*, iar dacă $A \neq 0$, deci $d\theta/ds \neq 0$, atunci traiectoria se rotește în jurul axului Oz și reprezintă o *rază oblică* (fig. 1.85). Mai observăm că orice rază lansată de pe axul Oz ($r_0 = 0$) este meridională, iar dacă $r_0 \neq 0$, raza este meridională sau oblică, după cum $(d\theta/ds)_0$ este zero sau diferit de zero.

Din expresia elementului de drum, ecuația (1.342), mai avem

$$\frac{dr}{ds} = \sqrt{1 - \left(r \frac{d\theta}{ds}\right)^2 - \left(\frac{dz}{ds}\right)^2}. \quad (1.349)$$

Vom transcrie ecuațiile (1.346), (1.347), (1.349) în forma sistemului

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{ds} = \frac{A}{r^2 n(r)}, \\ \frac{dz}{ds} = \frac{B}{n(r)}, \\ \frac{dr}{ds} = \sqrt{1 - \frac{A^2}{r^2 n^2(r)} - \frac{B^2}{n^2(r)}}, \end{cases} \quad (1.350)$$

sau, prin împărțirea primelor două ecuații la a treia și integrare,

$$\theta = \int \frac{A dr}{r^2 \sqrt{n^2(r) - \left(\frac{A^2}{r^2} + B^2\right)}}, \quad (1.351)$$

$$z = \int \frac{B dr}{\sqrt{n^2(r) - \left(\frac{A^2}{r^2} + B^2\right)}}. \quad (1.352)$$

Prin ecuațiile (1.351), (1.352) am obținut astfel expresia generală a traiectoriei razei de lumină în medii cu simetrie cilindrică.

Domeniul valorilor r care permit propagarea razelor de lumină rezultă din condiția ca integrandul să fie real, adică

$$n^2(r) \geq \frac{A^2}{r^2} + B^2, \quad (1.353)$$

unde membrul drept, care prin constantele A , B depinde de condițiile inițiale, ecuațiile (1.348), este o funcție monoton descrescătoare de r . Pentru ilustrare, să considerăm funcția $n^2(r)$ în formă de clopot (fig.1.86). Rezultă că raza de lumină se poate propaga numai prin domeniul hașurat $r_{\max} \geq r \geq r_{\min}$, unde valorile limită r_{\min} , r_{\max} sunt soluțiile ecuației din condiția (1.353). Aceste limite, care rezultă și din a treia ecuație (1.350) pentru $dr/ds = 0$, reprezintă **punctele de întoarcere sau de reflexie totală**.

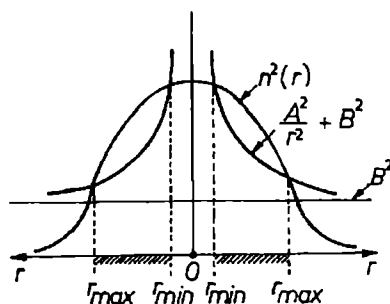


Fig.1.86. Distribuție $n^2(r)$ în formă de clopot și domeniile reale de propagare.

În încheiere să discutăm calitativ proprietățile de ghidare a luminii pentru o **fibră optică** cu distribuție a indicelui de refracție de tip **Selfoc***, adică

$$n^2 = n_0^2 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right). \quad (1.354)$$

Astfel, efectuând integralele (1.351), (1.352) cu distribuția (1.354), rezultă, în general, o traiectorie oblică de forma unei elice eliptice în jurul axului de simetrie Oz (fig.1.87). Proiecția acestei elice pe un plan transversal xOy este o elipsă cu semi-axele egale cu r_{\min} și r_{\max} . Prin creșterea constantei

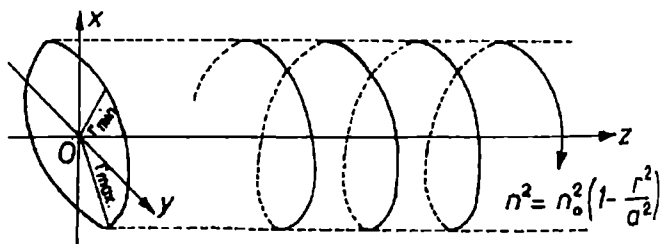


Fig.1.87. O traiectorie luminoasă într-o fibră optică Selfoc.

A , curba $(A/r)^2 + B^2$ din fig.1.86 se ridică, respectiv domeniul permis $r_{\min} \leq r \leq r_{\max}$

* Astfel de fibre sau bare optice sunt produse de firma japoneză Nippon Sheet Glass Co.

îngustează, până când elicea eliptică degenerază într-o elice circulară ($r_{\min} = r_{\max}$). Dacă $A = 0$ și $B \neq 0$, integrandul din ecuația (1.351) se anulează iar integrala (1.352) se reduce la cea discutată în secțiunea 1.3.1 pentru distribuția unidimensională, ecuația (1.335). În cazul distribuției Selfoc, traiectoria oblică elicoidală devine plană meridională, de forma ecuației (1.340), reprezentată în fig.1.84. Alternativ, dacă $A \neq 0$ și $B = 0$, integrandul din ecuația (1.352) se anulează iar integrala (1.351) devine identică cu aceea care va fi obținută în secțiunea următoare, secțiunea 1.3.3, pentru simetria sferică, ecuația (1.361). În acest caz, traiectoria este plană într-un plan perpendicular pe axul de simetrie Oz.

Observăm că, pentru ca aproximația opticii geometrice să fie suficient de bună, este necesar ca diametrul fibrelor optice să fie cel puțin de câteva zeci de ori mai mare decât lungimea de undă. Cu această condiție, fibrele optice Selfoc permit propagarea luminii la mare distanță cu pierderi foarte mici și au importante aplicații în comunicațiile optice. De asemenea, datorită proprietății lor de focalizare periodică a luminii, bare cilindrice de sticlă cu distribuție parabolică a indicelui de refracție sunt utilizate ca *micro-lentile Selfoc*. Astfel de bare cu diametrul de câțiva milimetri (deci mult mai mare decât al fibrelor optice Selfoc), permit transferul imaginii de la un capăt la altul.

1. 3. 3. Structuri sferice

Să scriem mai întâi ecuația razei de lumină, ecuația (1.13)

$$\frac{d}{ds}(n\vec{\tau}) = \nabla n, \quad (1.355)$$

înmulțită vectorial cu vectorul de poziție \vec{r} . Rezultă

$$\frac{d}{ds}[\vec{r} \times (n\vec{\tau})] = \vec{r} \times \nabla n, \quad (1.356)$$

unde, pentru completarea derivatei totale din membrul stâng, am adăugat termenul identic nul $\vec{\tau} \times (n\vec{\tau})$.

În continuare, vom considera un mediu al cărui indice de refracție depinde numai de distanța r față de un punct fix O , adică $n = n(r)$. Pentru conveniență, vom lua centrul de simetrie O și ca origine a vectorului de poziție \vec{r} a traiectoriei razei de lumină astfel că $\nabla n = (\vec{r}/r)dn/dr$. Cu această alegere a originii coordonatelor cu care vom repera traiectoria, avem $\vec{r} \times \nabla n = 0$. În consecință, din ecuația razei în forma ecuației (1.356) rezultă că vectorul $\vec{r} \times (n\vec{\tau})$ se conservă de-a lungul traiectoriei, adică

$$\vec{r} \times (n\vec{\tau}) = \vec{A}, \quad (1.357)$$

unde \vec{A} este un vector constant pentru fiecare traiectorie. Evident, această teoremă este analoagă teoremei de conservare a momentului cinetic din mecanică privind mișcarea particulelor într-un câmp de forțe centrale. Din ecuația (1.357) rezultă că, indiferent de vectorii inițiali $\vec{r}_0, \vec{\tau}_0$, de lansare, traiectoria razei de lumină este o curbă plană în planul

definit de $(\vec{r}_0, \vec{\tau}_0)$, normal pe \vec{A} , și care trece prin centrul de simetrie O . Scrisă în modul, ecuația (1.357) poartă numele de *teorema lui Bouguer*

$$rn(r)\sin\varphi = r_0 n(r_0)\sin\varphi_0 = r_m n(r_m) = A, \quad (1.358)$$

unde φ este unghiul dintre vectorii $\vec{r}, \vec{\tau}$, respectiv φ_0 este unghiul dintre vectorii inițiali $\vec{r}_0, \vec{\tau}_0$, iar r_m reprezintă distanța minimă r_{\min} (sau distanța maximă r_{\max}) a traiectoriei față de centrul de simetrie astfel că $\varphi_m = \pi/2$ (fig.1.88). Observăm că punctelor aflate la aceeași distanță r de origine le corespunde aceeași valoare $\sin\varphi$ adică unghiul φ , respectiv $\pi - \varphi$.

În continuare, este convenabil să considerăm coordonatele polare r, θ în planul traiectoriei și cu originea în centrul de simetrie O . Din geometrie (fig.1.88) rezultă relația $rd\theta/ds = \sin\varphi$ astfel că ecuația (1.358) se mai scrie

$$nr^2 \frac{d\theta}{ds} = A, \quad (1.359)$$

ecuație analoagă cu ecuația (1.346) din problema simetriei cilindrice. Pe de altă parte, folosind expresia elementului de drum pe traiectorie $(ds)^2 = (dr)^2 + (rd\theta)^2$, avem

$$\frac{dr}{ds} = \sqrt{1 - r^2 \left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{A^2}{r^2 n^2}}. \quad (1.360)$$

Prin împărțirea ultimelor două ecuații și integrare, rezultă expresia generală a traiectoriei razei de lumină în medii cu simetrie sferică

$$\theta = \int \frac{A dr}{r \sqrt{r^2 n^2(r) - A^2}}. \quad (1.361)$$

Aceasta este o integrală de forma discutată mai înainte, ecuația (1.351), în care $B = 0$. Astfel, domeniul valorilor r care permit propagarea razelor de lumină rezultă din condiția ca integrandul să fie real, adică

$$n^2(r) \geq \frac{A^2}{r^2}, \quad (1.362)$$

unde, membrul drept depinde de condițiile inițiale prin constanta A , ecuația (1.358), și scade monoton cu r . *Punctele de întoarcere* sau de *reflexie totală*, r_m , sunt soluțiile ecuației din condiția (1.362). Evident, pentru aceste limite avem $dr/ds = 0$, cum rezultă din ecuația (1.360).

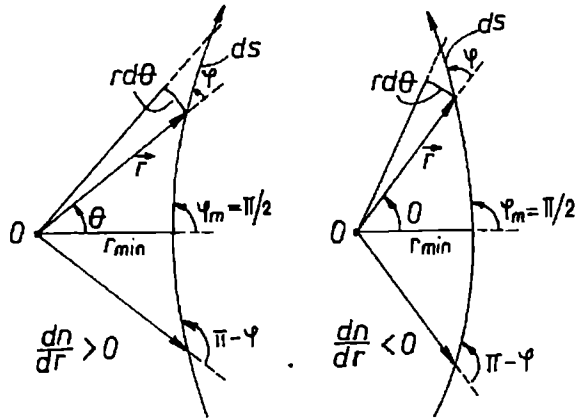


Fig.1.88. Traiectorii luminoase în structuri cu simetrie sferică.

Pentru ilustrare, să considerăm mai întâi o distribuție a indicelui de refracție de forma

$$n^2 = a/r, \quad (1.363)$$

unde $a (>0)$ este o constantă. În acest caz, integrala generală, ecuația (1.361), este de tipul

$$\theta = \int \frac{A dr}{r \sqrt{ar - A^2}}, \quad (1.364)$$

și ecuația traiectoriei se scrie

$$\theta(r) - \alpha = \arccos\left(\frac{2A^2}{ar} - 1\right), \quad (1.365)$$

sau

$$\frac{2A^2}{ar} = 1 + \cos(\theta - \alpha), \quad (1.366)$$

unde α este constanta de integrare care se determină din condițiile inițiale r_0, θ_0 . Ecuația (1.366) este ecuația polară a unei parabole de parametru $p = 2r_m = 2A^2/a$ (fig.1.89). Deci **punctul de întoarcere** sau **de reflexie totală** are coordonatele $r_m = A^2/a$, $\theta_m = \alpha$. Evident, distanța periheliului r_m satisface (sau poate fi determinată direct din) condiția generală (1.362).

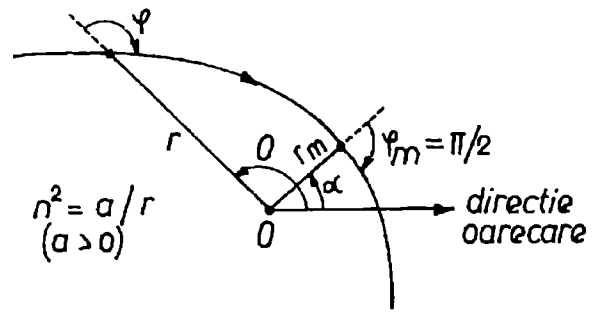


Fig.1.89. Punct de întoarcere (r_m) în structura $n^2 = a/r$.

Un exemplu remarcabil de simetrie sferică, considerat pentru prima dată de către Maxwell (1854), este distribuția denumită **ochi de pește (fish-eye)**, care are forma

$$n = \frac{n_0}{1 + (r/a)^2}, \quad (1.367)$$

unde n_0 și a sunt constante. În acest caz, integrala generală, ecuația (1.361), devine

$$\theta = \int \frac{Cd(\rho - \frac{1}{\rho})}{\sqrt{1 - 4C^2 - C^2(\rho - \frac{1}{\rho})^2}}, \quad (1.368)$$

unde am notat

$$\rho = \frac{r}{a}, \quad C = \frac{A}{an_0}. \quad (1.369)$$

Ecuația traiectoriei are deci expresia

$$\theta - \alpha = \arcsin \left[\frac{C}{\sqrt{1 - 4C^2}} \left(\rho - \frac{1}{\rho} \right) \right], \quad (1.370)$$

unde α este constanta de integrare care se determină din condițiile inițiale r_0, θ_0 . Inversând această relație și revenind la variabila r , rezultă ecuația polară a traiectoriei în forma

$$\frac{r^2 - a^2}{r \sin(\theta - \alpha)} = 2b, \quad (1.371)$$

unde constanta b are expresia

$$b = \frac{a\sqrt{1 - 4C^2}}{2C} = \frac{a}{2A} \sqrt{a^2 n_0^2 - 4A^2}. \quad (1.372)$$

Scriind mai departe ecuația (1.371) în coordonate carteziene $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, rezultă

$$(x + b \sin \alpha)^2 + (y - b \cos \alpha)^2 = a^2 + b^2, \quad (1.373)$$

adică traiectoriile sunt cercuri cu raza $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ și cu centrul în punctul de coordonate $x_c = -b \sin \alpha, y_c = b \cos \alpha$ (fig.1.90). În cazul în care $a^2 n_0^2 = 4A^2$ avem $b = 0$; ecuația (1.372), și traiectoria reprezintă cercul de rază minimă $r = a$ în jurul centrului de simetrie O . În general, cum rezultă din ecuația polară, ecuația (1.371), orice traiectorie intersectează cercul fix $r = a$ în puncte diametral opuse $r = a, \theta = \alpha$ și $r = a, \theta = \alpha + \pi$ (fig.1.90).

O proprietate remarcabilă a distribuției "ochi de pește" constă în aceea că toate razele de lumină care pornesc dintr-o sursă punctuală oarecare $P_1(r_1, \theta_1)$ se întâlnesc din nou într-un punct $P_2(r_2, \theta_2)$, unde coordonatele celor două puncte sunt legate prin relațiile simetrice

$$r_1 r_2 = a^2, \quad \theta_2 = \theta_1 + \pi. \quad (1.374)$$

Pentru a demonstra aceasta, să scriem familia (1.371), de parametru α , a traiectoriilor care trec prin punctul $P_1(r_1, \theta_1)$, adică

$$\frac{r^2 - a^2}{r \sin(\theta - \alpha)} = \frac{r_1^2 - a^2}{r_1 \sin(\theta_1 - \alpha)}. \quad (1.375)$$

Se verifică imediat că, indiferent de valoarea parametrului α , toate traiectoriile acestei familii trec și prin punctul $P_2(r_2, \theta_2)$ de coordonate polare date de ecuația (1.374). Cu alte cuvinte, punctele P_1, P_2 , conjugate prin relațiile (1.374) se găsesc pe dreapta care trece prin centrul de simetrie O , și anume de o parte și de alta a acestuia, și la distanțele date de relația $r_1 r_2 = a^2$ (fig.1.90). Evident, această proprietate geometrică nu depinde de sensul de

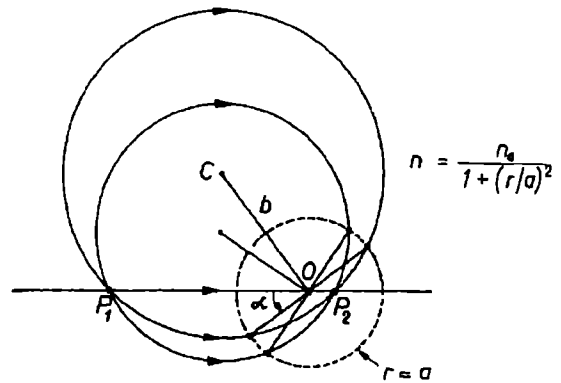


Fig.1.90. Ochiul de pește al lui Maxwell (două traiectorii circulare).

propagare a razelor de lumină astfel că, la fel de bine putem considera P_2 ca sursă punctuală de lumină și P_1 ca punct de focalizare. Distribuția "ochi de pește" reprezintă un exemplu clasic de *instrument optic perfect* în sensul că un fascicul conic (homocentric) de raze de lumină care iese dintr-un punct obiect oarecare din spațiu este transformat într-un fascicul conic care converge în punctul imagine corespunzător.

Un alt exemplu interesant de distribuție sferică este *lentila lui Luneburg*, care constă dintr-o sferă neomogenă de rază unitate (rază relativă) și indice de refracție

$n = \sqrt{2 - r^2}$ (pentru $r \leq 1$), aflată în aer ($n = 1$ pentru $r > 1$) - fig.1.91. Deoarece la $r = 1$ avem $n = 1$ (atât în exterior cât și în interior), nici-o rază incidentă nu va suferi refracție propriu-zisă la suprafața lentilei; refracția are loc, în mod continuu, numai în interiorul lentilei (pentru $r < 1$).

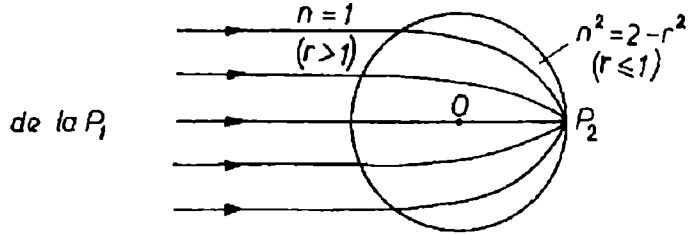


Fig.1.91. Lentila lui Luneburg.

În cazul acestui tip de lentilă relația (1.361) ne dă

$$d\theta = \frac{A dr}{r \sqrt{r^2(2-r^2) - A^2}} \quad (1.376)$$

Dacă notăm cu i unghiul de incidență pe lentilă (la $r = 1, n = 1$) al unei raze de lumină ce vine de la P_1 (situat la infinit) și ținem cont de relația (1.358), găsim că $A = \sin i$ și astfel

$$d\theta = \frac{\sin i dr}{r \sqrt{\cos^2 i - (r^2 - 1)^2}} \quad (1.377)$$

Prin integrare, cu condiția inițială $\theta = i, r = 1$, obținem traiectoria

$$\theta - i = \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{r^2 - \sin^2 i}{r^2 \cos i}\right) - \frac{1}{2} \arcsin(\cos i), \quad (1.378)$$

sau

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{\sin^2 i} [1 - \cos i \cdot \sin(2\theta + \arcsin(\cos i))] \quad (1.379)$$

De aici rezultă că, *pentru orice* i , la $\theta = \pi$ avem $r = 1$, ceea ce înseamnă o *focalizare perfectă* în punctul P_2 de pe suprafața sferei, așa cum se arată în fig.1.91. În consecință, imaginea unui obiect întins, situat la distanță mare față de lentilă, se va forma pe o calotă sferică de rază unitate. Astfel de lentile din masă plastică poroasă și-au găsit aplicații în domeniul microundelor. Ele diferă de lentilele obișnuite din domeniul optic la care refracția are loc numai la suprafață.

O distribuție continuă mai generală a indicelui de refracție și care permite realizarea stigmatismului are forma

$$n^2 r^2 = n^{1/p} (2 - n^{1/p}), \quad (r \leq 1), \quad (1.380)$$

unde $p > 0$. În particular, pentru $p = 1/2$, rezultă distribuția din lentila lui Luneburg. Astfel de distribuții prezintă interes în domeniul undelor electromagnetice scurte (decimetrice și centimetrice) pentru construcția sistemelor proiectoare, care transformă un fascicul homocentric provenind de la o sursă punctuală într-un fascicul paralel (unde plane), dar și în domeniul optic unde, în variantele lor bidimensionale, sunt utilizate ca lentile în circuitele optice integrate. Pentru ilustrare, în fig.1.92 este arătată o *lentilă Luneburg bidimensională* (văzută de sus),

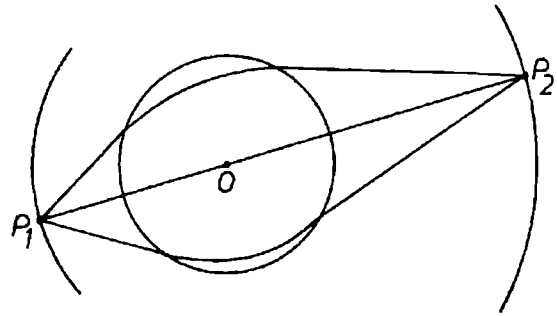


Fig.1.92. Lentila bidimensională a lui Luneburg și cercurile conjugate.

care transformă una în alta, fără nici o aberație, obiecte și imagini circulare concentrice.

În exemplele de mai sus am considerat problema determinării traiectoriei $\theta(r)$ a razelor de lumină, ecuația (1.361), presupunând distribuția $n(r)$ dată. Desigur, problema se poate formula și invers și anume, impunând traiectoriile $\theta(r)$ ale razelor de lumină, să determinăm distribuția $n(r)$ din ecuația integrală, relația (1.361), a traiectoriei. De exemplu, să determinăm forma dependenței $n(r)$ a indicelui de refracție într-un mediu cu simetrie sferică, în așa fel ca traiectoria $r(\theta)$ a razei de lumină să fie o parabolă (conică cu excentricitatea $\epsilon = 1$) cu ecuația

$$r = \frac{p}{1 + \cos \theta} = \frac{p}{2 \cos^2(\theta/2)}, \quad p = \text{cunoscut.} \quad (1.381)$$

Din ecuația (1.361) găsim imediat

$$n(r) = \frac{A}{r} \left[1 + \left(\frac{1}{r} \frac{dr}{d\theta} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (1.382)$$

în care va trebui să înlocuim

$$\frac{1}{r} \frac{dr}{d\theta} = \sqrt{\frac{2r}{p} - 1}. \quad (1.383)$$

Astfel obținem

$$n(r) = \frac{A\sqrt{2}}{\sqrt{pr}}, \quad (1.384)$$

unde, în conformitate cu relația (1.358), $A = r_{\min} n(r_{\min})$ cu $r_{\min} = p/2$. Cu ajutorul notației $a \equiv 2A^2/p$, rezultatul obținut coincide cu dependența (1.363) analizată anterior.

Cititorului interesat de problematica abordată în acest paragraf îi recomandăm, suplimentar, consultarea lucrărilor [10], [34], [35], [42] și [75].

MOMENTE DIN ISTORIA OPTICII GEOMETRICE

**circa
2000
î.e.n.**

Cum rezultă din cercetările arheologice, încă de acum 4000 de ani *egiptenii* stăpâneau *tehnica șlefuirii oglinzilor metalice* din cupru, bronz, iar mai târziu din speculum, un aliaj din cupru bogat în cositor. O astfel de oglindă, în stare perfectă, datată la circa 1900 î.e.n., a fost găsită în apropierea piramidei lui Sesostriș II în valea Nilului. Tot descoperirile arheologice dovedesc că *lentilele rudimentare* erau cunoscute deja acum 3000 - 3500 de ani. Prima mențiune scrisă despre o *lentilă convergentă*, folosită pentru focalizarea razelor solare, se găsește în comedia *Norii* a lui *Aristofan*, 424 î.e.n. (în care era vorba de un debitor care putea să distrugă astfel, de la distanță, dovada datoriei înregistrată pe o tăbliță de ceară).

**circa
1000
î.e.n.
424
î.e.n.**

**500
î.e.n.**

Marii filozofi greci au speculat mult și au avansat ipoteze simple, care azi apar în parte stranii, în parte esențial corecte, cu privire la natura luminii și mecanismul vederii. Astfel, geometrul *Pitagora* (582 - 500 î.e.n.) credea că ochii emit raze de lumină ca niște faruri, cu ajutorul cărora "palpează" corpurile înconjurătoare conform unui principiu care prevestește radarul și sonarul din timpurile noastre (!); *Empedocle* (490-430 î.e.n.), autorul doctrinei materiei formate din particulele celor patru elemente (pământul, apa, aerul și focul; azi am spune solide, lichide, gaze și plasmă), a avansat ipoteza că lumina se propagă prin spațiu cu viteză finită; *Democrit* (460-370 î.e.n.), părintele doctrinei atomiste, a presupus că senzația vizuală este cauzată de particule materiale infime (eudoli) emise de obiecte. *Platon* (427-347 î.e.n.), autor al celebrelor dialoguri și adept al "razelor oculare", face prima mențiune importantă cu privire la refracția luminii (în *Republica*, versul 602, cartea X), iar *Aristotel* (384-322 î.e.n.), cea mai mare personalitate științifică a Antichității, obiectează împotriva razelor de lumină emise de ochi și avansează o ipoteză a eterului similară cu aceea din secolul al 19-lea.

**400
î.e.n.**

**300
î.e.n.**

Marele geometru grec, *Euclid* din Alexandria, circa 300 î.e.n., autorul operei matematice a Antichității - *Elemente de geometrie*, 13 cărți (vezi *Elements of Geometry*, trei volume, Dover Publications Inc., New York, 1956), a scris și prima carte mare de optică, *Optica lui Euclid*, în care sunt expuse bazele teoriei perspectivei. Tot lui Euclid i se mai atribuie, uneori, și *Catoptrica* în care sunt studiate legile reflexiei, se enunță o serie de teoreme privind oglinzile plane și se descrie acțiunea focală a oglinzilor concave. Se deduce că, foarte probabil, Euclid cunoștea legile care stau și astăzi la baza Catoptricii și anume că: (1) în medii omogene lumina se propagă în linie dreaptă, (2) unghiurile de incidență și de reflexie sunt egale și (3) razele incidentă și reflectată se află într-un plan perpendicular pe suprafața oglinzii. Menționăm totuși că, spre deosebire de opera geometrică a lui Euclid, de o logică ireproșabilă, opera sa de optică geometrică prezintă și multe inexactități, pe care este îndoielnic să le fi făcut celebrul geometru.

**212
i.e.n.**

Arhimede din Siracusa (287-212 î.e.n.), matematician și fizician grec, considerat adeseori cel mai mare geniu matematic al Antichității, fondatorul staticii și hidrostaticii, este învăluit de istoriografia romană în legenda după care acesta a folosit reflexia radiației solare, cu oglinzi înșirate de-a lungul țărmului, pentru a distruge flota romană care asedia Siracusa (212 î.e.n.).

**50
e.n.**

Cleomede (circa 50 î.e.n.), astronom grec, descrie refracția luminii arătând că o rază care intră oblic într-un mediu mai dens se apropie de normală, respectiv într-un mediu mai puțin dens se îndepărtează. El afirmă că Soarele se poate vedea chiar sub linia orizontului grație refracției atmosferice. Menționează experiența cu "moneda din cupă", efectuată de Ctesibius la Universitatea din Alexandria pe la 50 î.e.n. Experiența constă în a pune o monedă pe fundul unei cupe goale și în a face moneda vizibilă pentru observatorii din jur prin umplerea cupei cu apă.

Seneca, Lucius Annaeus (circa 4 î.e.n. - 65 e.n.) filozof și politician roman, a remarcat că un glob de sticlă umplut cu apă poate fi folosit pentru mărirea imaginilor. Este foarte posibil ca încă de atunci unii meșteșugari romani să fi folosit lentile măritoare pentru lucrări foarte fine. De asemenea, *Caius Plinius Secundus* sau *Pliniu cel Bătrîn* (23-79) știa că o sferă din sticlă expusă la Soare poate aprinde unele substanțe puse în focarul acesteia și semnalează aplicația pe care el a făcut-o cu astfel de sfere pentru a cauteriza rănilor. Cunoscutul naturalist roman (o enciclopedie de istorie naturală de 37 de cărți) a murit observând de aproape o erupție a vulcanului Vezuviu (79 e.n.).

**50
e.n.**

Hero (Heron) din Alexandria (probabil sec.I), matematician și inventator grec, un mare experimentator, este cunoscut mai ales pentru mașinile și dispozitivele sale funcționând pe bază de jet de apă, vapori sau aer comprimat. *Catoptrica lui Heron* este una dintre cele mai interesante cărți de optică ale Antichității. În această carte Heron sesizează o rațiune mai profundă pentru legile catoptricii (vezi mai sus, la Euclid), postulând că *razele de lumină se propagă de la un punct la altul pe drumul cel mai scurt*. Această aserțiune reprezintă prima formulare a unor legi naturale cu ajutorul unui principiu variațional. Ideea a fost reluată mai târziu de Fermat (1657), care a generalizat-o sub forma "principiului timpului minim" pentru a explica și legea refracției. În aceeași carte, ca un experimentator cu fantezie remarcabilă, Heron descrie și o mulțime de efecte amuzante sau de interes practic, obținute cu ajutorul oglinzilor plane și cilindrice.

150

Ptolemeu, Claudius, din Alexandria (100-160), astronom, matematician și geograf grec, a rămas celebru prin opera sa *Marea Sintaxă (Almagestum)* și prin sistemul geometric ptolemeic - reprezentare geometrică, elaborată de Ptolemeu, în care mișcările aparente ale Soarelui, Lunii și planetelor, văzute de un observator terestru, sunt prezise cu grad mare de precizie (abateri de cel mult două grade de la poziția observată). Conform acestei reprezentări, mișcarea corpurilor cerești rezultă din compunerea unor mișcări circulare uniforme și anume o mișcare circulară pe un cerc mic (epiciclu), al cărui centru se deplasează pe un cerc excentric mare (deferent) în jurul Pământului (vezi S. Olariu, *Geneza și evoluția*

reprezentărilor mecanicii clasice, Ed. Științifică și Enciclopedică, București, 1987). Totodată, Ptolemeu a fost omul care avea cele mai întinse și aprofundate cunoștințe de optică din Antichitate și a scris unul din cele mai remarcabile tratate de optică, *Optica lui Ptolemeu*. Mult timp considerată pierdută, și cunoscută numai prin citările autorilor din Evul Mediu, a fost în cele din urmă recuperată din manuscrisele latine, *Ptolemaei opti corum sermones quinque*, traduse din arabă. Această lucrare cuprinde toate ramurile opticii cunoscute atunci, și anume vederea, reflexia pe oglinzi plane și concave, precum și refracția. Și, caz unic la antici, Ptolemeu face un studiu experimental serios al refracției luminii (din aer în apă și sticlă, și din sticlă în apă), descrie instrumentul de măsură (un disc circular cu marchere pentru măsurat cele două unghiuri) și lasă tabele cu datele experimentale ale unghiului de refracție în funcție de unghiul de incidență (din 10 în 10 grade de arc). În particular, datele pentru unghiurile de incidență de 50° și 60° sunt surprinzător de precise. Este clar că Ptolemeu putea să descopere legea exactă a refracției. Din nefericire, aceasta a rămas ascunsă până la Snell (1621) și Descartes (1637). Ptolemeu nu pomenește nici de separarea culorilor prin refracție (dispersia luminii), astfel că discutarea acestui fenomen avea să-l aștepte pe Newton (1672). În schimb, interesul său de astronom l-a împins să cunoască mai mult despre refracția astronomică. Astfel, Ptolemeu știa că numai pentru o stea la zenit pozițiile aparentă și reală coincid dar că, în restul cerului, refracția atmosferică face ca înălțimea aparentă să fie mai mare decât înălțimea reală, și aceasta cu atât mai mult cu cât corpurile cerești se află mai aproape de orizont. Cu alte cuvinte, el știa că razele de lumină care intră oblic în atmosferă se curbează înspre Pământ.

150

Acestea erau cunoștințele anticilor în optică. Deși nu sunt impresionante, ele depășeau cu mult pe cele din alte ramuri ale fizicii acelor vremuri.

1025

Abu Ali Al-Hasen ibn Al-Hasan ibn Al-Haytam sau, pe scurt, *Alhazen*, (circa 965-1039), matematician și fizician arab, cel mai mare optician al Evului Mediu timpuriu, autor al tratatului de optică *Kitab Al Manazir*, a adus contribuții de valoare în optica geometrică și fiziologică. Astfel, Alhazen a extins cercetările de reflexie a luminii la suprafețe conice, concave și convexe, a formulat problema poziției punctului de incidență a unei raze de lumină pentru pozițiile ochiului și a punctului luminos date (problema lui Alhazen) și a precizat legea de reflexie, stabilind că razele incidente, reflectată și normala la suprafața oglinzii în punctul de incidență se află în același plan. A extins această precizare și pentru legea de refracție (experiențele sale sunt folosite și astăzi pentru ilustrare), a remarcat că afirmația lui Ptolemeu, și anume că unghiurile de incidență și de refracție sunt proporționale, nu este valabilă decât pentru unghiuri suficient de mici, dar a ratat și el ocazia de a descoperi forma matematică exactă a acestei legi, deși matematicienii arabi elaboraseră deja conceptul de sinus al unghiurilor. Alhazen compromite definitiv ipoteza "razelor oculare", moștenită de la Pitagora și Platon și încă prezentă în *Optica* lui Ptolemeu, prin argumente bazate de fapte, și anume că vederea este influențată drastic de condițiile externe cum sunt iluminarea, respectiv strălucirea, culoarea și

1025

dimensiunile aparente ale obiectelor. Singura explicație simplă constă, deci, în a admite că vederea este cauzată de ceva care se propagă de la obiect la ochi. Din constatarea că efectul unei străluciri intense este simțit chiar după închiderea ochilor, Alhazen a tras concluzia că lumina provoacă anumite reacții în interiorul ochiului. Pentru a înțelege mecanismul vederii, el a făcut un studiu anatomic detaliat al ochiului uman, descriind corect cornea, coroida, irisul, cristalinul, umorile și retina cu structura ei nervoasă. Această descriere a rămas clasică. Chiar și termenul de lentilă provine de la traducerea în latină prin *lens* a ceea ce Alhazen a denumit în arabă *adasa*, adică *bob*, atunci când a descris cristalinul. Mai apoi, Alhazen a construit un model fizic simplu al ochiului, celebra cameră obscură, denumită astăzi cameră pinhole, cu ajutorul căreia a efectuat numeroase experiențe. Inversarea imaginii în camera obscură l-a făcut să creadă însă, prin comparație cu ochiul, că nu retina, ci prima suprafață a cristalinului simte imaginea. Va mai trece mult timp până când Kepler (1600) își va da seama că totuși, retina reprezintă stratul fotosensibil și că îndreptarea imaginii răsturnate reprezintă un efect fiziologic. Alhazen a mai folosit camera obscură, ca pe un veritabil precursor al camerei fotografice, pentru a studia eclipsele solare. Opera marelui savant arab a fost tradusă în limba latină în *Opticae Thesaurus Alhazeni* și a avut o influență profundă asupra lui Robert Grosseteste, Roger Bacon, Witelo, Leonardo da Vinci, Johannes Kepler și Isaac Newton.

1025

1200

Grosseteste, Robert (1168-1253), filozof britanic, primul rector al Universității din Oxford, este unul dintre pionierii europeni ai metodelor experimentale și deductive. A scris despre mișcare, căldură, sunet și lumină, a făcut experiențe cu oglinzi și lentile și a considerat optica fundamentul științelor.

1270

Bacon, Roger (1214-1294), filozof englez, a adunat toate lucrările sale de optică în *Opus Majus* (1267). Dintre acestea, merită a fi amintite: stabilirea exactă a focarului oglinzii sferice concave, descrierea aberației de sfericitate și recomandarea de a construi oglinzi parabolice. Roger Bacon era un om de mare erudiție, supranumit de contemporanii săi *Doctor mirabilis*, dotat cu spirit original și cu geniul invenției, care l-ar fi dus poate la descoperiri importante, dacă ar fi trăit într-o epocă mai luminată și în condiții mai favorabile. Fapt este că operele sale sunt pline de proiecte pe care nu le-a realizat niciodată (transport rutier și pe mare, zborul aerian, explorări submarine, remedii cu substanțe chimice în medicină, chiar și praful de pușcă inventat mult mai înainte!). În particular, în optică a intuit posibilitatea construcției lupei și lunetei, a măsurat unghiul curcubeului, dar scrierile sale sunt atât de vagi și de schematice încât este imposibil să i se atribuie paternitate sigură pentru vreo invenție. Cu toate acestea, Roger Bacon este considerat un precursor al științelor moderne datorită interesului său foarte larg pentru științe și convingerile sale deschise și ferme că o cunoaștere utilă nu se câștigă prin speculații nefondate ci numai prin elucidarea faptelor pe bazele solide ale observației, experimentului și raționamentului matematic.

1274

Witelo, lat. Vitellius (1220-?), fizician și filozof polonez, a studiat în Italia (1269). Prin cartea sa de optică (circa 1274), foarte voluminoasă, dar cu puține noutăți, face, de fapt, o legătură cu optica greco-arabă, prin aceea că readuce în atenție tot ce au lăsat anticii și Alhazen în optică. Din nefericire, Witelo a devenit până la urmă, mai celebru prin erorile sale privind determinările experimentale ale unghiurilor de refracție a luminii în trecerile dintre aer, sticlă și apă și care conțin date imposibile (fiind în contradicție cu fenomenul, încă necunoscut atunci, al reflexiei totale). Este posibil ca tocmai aceste date "noi" să-l fi derutat mai târziu pe Kepler (1611), împiedicându-l pe acesta să descopere, în fine, legea exactă a refracției. Am fi nedrepti dacă nu am recunoaște meritele lui Witelo, începând cu însăși cartea de optică pe care a dat-o europenilor. El cunoștea empiric dispersia, care însoțește întotdeauna refracția luminii, a făcut remarcă naturală că, în refracție, cele două unghiuri rămân aceleași pentru ambele sensuri de propagare, a observat că la reflexie-refracție o parte din lumină se pierde, a contribuit la psihologia vederii și a ajuns foarte aproape de înțelegerea fenomenului curcubeului.

1285

Degli Armati, Salvino (?-1317), nobil florentin, conform unui epitaf din Florența, pare să fi fost inventatorul *ochelarilor*. De fapt inventatorii ochelarilor sunt cufundați în mister și, probabil, nu au avut nici o legătură cu problemele teoretice ci, mai degrabă, cu practica și hazardul. Datarea invenției în ultima treime din secolul 13 este confirmată de dicționarul Academiei della Crusca, în care este indicat anul invenției ca 1285, și de un manuscris vechi din 1299. Primul portret al unui om care poartă ochelari a fost pictat de *Tomasso di Medina* (1352). Inițial erau folosite numai lentile convergente, pentru corelarea presbitismului. Referiri cu privire la folosirea lentilelor divergente, pentru corectarea miopiei, nu există decât începând din a doua jumătate a secolului 15.

1485

Leonardo da Vinci (1452-1519), artist și om de știință italian, considerat cel mai mare observator al naturii din toate timpurile, a cărui pasiune pentru artă, pictură, sculptură, arhitectură sau muzică, l-a condus la vaste cercetări științifice și tehnice. A observat rezistența, compresibilitatea și greutatea aerului precum și zborul păsărilor și a proiectat planorul și parașuta. A studiat figurile formate de nisip pe plăci vibrante, undele staționare în lichide, frecarea, greutatea efectivă a corpurilor pe planul înclinat și paralelogramul forțelor, a proiectat canale, sisteme de irigații și construcții de artă, a inventat liftul și a cercetat distribuția tensiunilor în arcade, coloane și ziduri. A studiat capilaritatea și formarea picăturilor, și a comparat densitatea lichidelor prin echilibrarea lor într-un tub în formă de U. Cercetările și observațiile sale de anatomie umană au fost de o calitate inegalabilă. A studiat anatomia ochiului și a elaborat un model al acestuia (a presupus că razele de lumină îl parcurg de două ori pentru ca imaginea să fie dreaptă !), a remarcat fenomenul de difracție a luminii, a schițat un fotometru și o mașină de șlefuit oglinzi concave. Din păcate, cu excepția lucrării *Trattato della pittura*, majoritatea notelor și schițelor acestui om de geniu au fost lăsate în manuscrise neorganizate care, în parte au fost

pierdute, în parte au rămas practic necunoscute până târziu (Venturi, *Essai sur les ouvrages de L. da Vinci, 1797*).

1575

Maurolico, Francesco (1494-1575), geometru și optician italian, de origine arabă, cunoscut prin cartea sa bine scrisă de optică și intitulată *Photismi (theoremata) de lumine et umbre* (Veneția, 1575). El își depășește predecesorii, Alhazen și Witelo, prin aceea că nu mai plasează percepția imaginii pe sau în cristalin ci în spatele lui, asimilând funcționarea cristalinului cu aceea a unei lentile biconvexe și explicând, în acest fel, miopia și hipermetropia ochiului. Pentru a arăta cât de greu s-a ajuns la înțelegerea funcționării ochiului, menționăm că Maurolicus încă nu a realizat faptul că pe retina din fundul ochiului se formează o imagine reală. El a mai observat, pentru prima dată, că razele de lumină care provin de la o sursă punctuală, au o suprafață înfășurătoare, denumită astăzi *caustică*, pe care concentrarea luminii este maximă și a măsurat diametrele unghiulare ale arcelor curcubeului.

1589

Porta, Giambattista della (1534-1615), naturalist italian, a scris una dintre cele mai "colorate" cărți ale timpului, *Magiae naturalis libri XX*, 1589, tradusă apoi în cinci limbi (italiană, franceză, spaniolă, germană și arabă), un veritabil vade-mecum al epocii, amestec straniu de rețete utile și de mituri și legende preluate necritic, din scrisorile cele mai diverse și pe care autorul se abține să le citeze: de la cosmetică, parfumuri și distilare, grădinărit, gospodărie și îmbogățire, pirotehnie, metalurgie și pietre prețioase artificiale, până la astrologie, simpatie-antipatie și chiromantie. Abia în cartea a 17-a se ocupă de optică, unde sunt prezentate o mulțime de trucuri cu oglinzi, așa cum a făcut și Heron cu 1500 de ani înainte, dar și prima teorie exactă a oglinzilor multiple, prima descriere completă a camerei obscure, cu pinhole sau cu lentilă, comparația ochiului și a pupilei cu camera obscură și diafragmă, diverse combinații de lentile convergente și divergente, de unde și pretenția ulterioară a lui Porta de a fi inventat luneta.

Venise deci, în fine, momentul 1590-1610 al invențiilor telescopului și microscopului, realizate în mod empiric de opticienii olandezi *Hans Lippershey, Jacob Adriaanszoon* sau *Hans* și *Zacharias Jansen* și din interes științific de *Galileo Galilei* și *Johannes Kepler*. Să vedem însă, mai înainte, stadiul observațiilor astronomice în pragul descoperirii telescopului de refracție (lunetei).

Brahe, Tycho (1546-1601), astronom danez, a perfecționat până la limită arta observațiilor astronomice cu ochiul liber, folosind pentru aceasta dispozitive mecanice mari și precise. Astfel, de exemplu, cuadrantul lui Tycho Brahe avea o rază de aproape 2 metri și o precizie mai bună decât 5 secunde de arc. Pentru a avea o idee de această performanță, observăm că un om în București este văzut - în linie dreaptă din - Drobeta-Turnu Severin sub un unghi de o secundă de arc. Datele lui Tycho Brahe, de o precizie care uimește și astăzi, cu privire la pozițiile și mișcările stelelor, Soarelui, planetelor și Lunii, au fost publicate în *Astronomiae instauratae mechanica* (1598). Acestea au permis lui Kepler (*Astronomia nova*, 1609) să descopere că orbitele planetare sunt elipse cu Soarele într-unul din focare

1598

și au stimulat studiile lui Römer, care au condus la determinarea vitezei luminii (1676).

1608

În Olanda, ca și în Italia (lângă Veneția), era produsă sticlă de calitate pentru lentilele de ochelari. Dacă Olanda este indiscutabil țara în care a fost inventată *luneta*, nu este deloc clar cine anume a fost inventatorul. Conform arhivelor din Haga, prima cerere de brevet pentru acest instrument este datată la 20 octombrie 1608 și a fost înaintată de constructorul de lentile și ochelari *Hans Lippershey* (1587-1619), care însă a fost imediat contestat de colegii săi de breaslă *Jacob Adriaanszoon* și *Hans* și *Zacharias Jansen* (fiul său). În această confuzie, dreptul de brevet solicitat de Lippershey a fost refuzat. Fapt este că în 1609 lunetele olandeze se comercializau la Paris, Frankfurt, Londra, Milano și Padova. Nu este de mirare că, practic în același timp, a fost inventat și *microscopul compus*, atribuit lui *Zacharias Jansen* (1588-1632) și tatălui său deși, și în acest caz, au mai solicitat prioritatea și alții (George Huefnagel din Frankfurt și astronomul Francesco Fontana din Napoli). Astfel, în jurul anului 1610 a fost materializată observația că imaginea obținută cu două lentile poate fi mult mai mare decât cea obținută cu una singură. Noul instrument optic de văzut la mare distanță - telescopul de refracție, s-a răspândit rapid în Europa, interesul deosebit al autorităților fiind lesne de ghicit iar impactul lui în știință fiind imediat, cum aveau să demonstreze de îndată Galilei și Kepler.

1610

Galilei, Galileo (1564-1642), astronom, matematician și fizician italian, profesor la universitățile din Pisa și Padova, prin descoperirile sale fundamentale în mecanică și astronomie, este considerat ca fondatorul științelor exacte și al metodei științifice moderne. Descrierea experiențelor sale și a raționamentelor matematice făcute pe această bază sunt comparabile cu cele făcute astăzi, cum ne putem convinge citind, cu mult folos, cartea sa *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* (Leida, 1638), tradusă în limba română de Victor Marian sub titlul *Dialoguri asupra științelor noi*, Editura Academiei, 1961. Remarcăm, mai întâi, că modul în care Galilei a studiat mișcarea uniform accelerată a constituit un veritabil început al reprezentărilor diferențiale introduse mai târziu în fizică de Newton (1669). Dintre realizările sale în mecanică cităm descoperirea izocronismului oscilațiilor pendulului (1583), invenția balanței hidrostactice (1586), experiențele clasice și teoria cu privire la căderea greutăților și mișcarea proiectilelor (vezi cartea *Dialoguri* citată mai sus). Însă, renumele lui Galilei printre contemporanii săi este legat în primul rând de realizarea primelor *lunete de interes practic* (1609) și de descoperirile astronomice uimitoare făcute cu acestea (începând cu nopțile de 7-15 ianuarie, 1610), prin care omenirea a deschis, în fine, ochii spre ceruri. Fapt este că Galilei a auzit pentru prima dată despre lunetele olandeze abia în mai 1609, pe când era profesor de matematică la Padova și nu se ocupase încă cu cercetări de optică. Aceste lunete, constând dintr-un obiectiv convergent și un ocular divergent, erau foarte rudimentare și nu depășeau o mărire de 3X. Galileo s-a ocupat de îndată să-și construiască singur propriile lunete, executând două lentile, una convexă și alta concavă, pe care le-a montat

1610

într-un tub de orgă, instrument prin perfecționarea căruia a ajuns repede la o mărire de 14X, de 20X și, în final, de 30X (de-a lungul vieții sale a realizat peste o sută). În august 1609, Galilei prezenta deja Senatului din Veneția o astfel de lunetă, mult mai puternică decât aceea pe care acesta o primise între timp din Olanda, iar din ianuarie 1610 și-a îndreptat lunetele spre cer, descoperind corpuri cerești nemaivăzute până atunci. A observat astfel cei patru sateliți principali ai lui Jupiter (trei în noaptea de 7 ianuarie, al patrulea apărând în noaptea de 13 ianuarie), un veritabil sistem copernican în miniatură (orbitele acestor sateliți se află în planul ecuatorial al lui Jupiter, având semiaxele de câteva diametre ale acestei planete și perioadele de revoluție în jurul ei de ordinul zilelor), a descoperit munții, văile și craterile lunare (deci suprafața Lunii nu era netedă cum presupuneau grecii antici), inelul lui Saturn (numită inițial *planeta tricorporeum*), fazele planetei Venus, petele și rotația Soarelui și structura stelară a Căii Lactee (în dreptul căreia i-au apărut mii de stele, invizibile cu ochiul liber). Primele astfel de observații le-a publicat în *Nuncius sidereus* (Veneția, martie 1610), provocând o emoție extraordinară. Impactul științific al acestor descoperiri, făcute de Galilei cu lunetele construite de el, și care au revoluționat ideile oamenilor despre Univers, a fost imediat, cum se poate ușor deduce din entuziasmul cu care un om de talia lui Christian Huygens scrie despre ele în *Dioptrica, de telescopiis*, 1653. De la lunetă (obiectiv de distanță focală mare) până la microscop (obiectiv și ocular de distanță focală mică) nu mai era decât un pas, pe care și Galilei l-a făcut (1610), odată cu inventatorii olandezi, alăturându-se astfel precursorilor microscopului compus modern. Sunt bine cunoscute nenorocirile pe care ignoranța și Inchiziția le-a abătut asupra lui Galilei pentru descoperirile sale, dar flacăra rațiunii și a științei nu mai putea fi stinsă, pentru că începuse deja secolul 17, al gigantilor științei: Galilei, Kepler, Descartes, Pascal, Fermat, Newton, Leibniz și Huygens.

1610

Kepler, Johannes (1571-1630), astronom german, asistent (1600-1601) și apoi succesori al lui Tycho Brahe la observatorul din Praga. Animat de pasiunea exactitudinii și folosind observațiile precise ale lui Tycho Brahe, precum și multă răbdare și stăruință în calcule (pe care le-a reluat de zeci și zeci de ori), Kepler a descoperit legile orbitelor planetare, enunțate în cartea sa *Astronomia nova*, Praga, 1609, punând astfel capăt unei tradiții de 2000 de ani a reprezentărilor geometrice circulare (vezi S. Olariu, *Geneza și evoluția reprezentărilor mecanicii clasice*, Ed. Științifică și Enciclopedică, București, 1987).

1609

Nu același noroc l-a avut Kepler atunci când a folosit datele experimentale eronate ale lui Witelo cu privire la unghiurile de refracție, de unde rezultă cât de importantă este pentru cunoaștere precizia observațiilor și a măsurătorilor. Astfel, în prima sa carte de optică, intitulată *Ad Vitellionem paralipomena, quibus astronomiae pars optica traditur*, Frankfurt, 1604, Kepler încearcă și aproape reușește, să descopere legea exactă a refracției. Pentru aceasta, Kepler a început prin a-și pune problema suprafețelor carteziane (cu 33 de ani mai devreme decât Descartes în *La Dioptrique*, 1637), și anume pentru cazul particular al unei suprafețe care să

1604

refracte un fascicul paralel de lumină într-o imagine punctuală. Inspirat, a ales ca test o suprafață hiperboloidală care, după cum știm, satisface condițiile legii exacte de refracție dar, din nefericire, având încredere în tabelele lui Witelo, a renunțat la problemă pentru că suprafața considerată nu satisfăcea datele eronate ale acestuia, care exprimau o relație falsă între unghiurile de incidență și de refracție.

1611

Galilei era în corespondență cu Kepler, căruia i-a prezentat și o lunetă construită de el (1610), cu ajutorul căreia tocmai deschisese era marilor descoperiri astronomice. Stimulat de aceste succese, Kepler și-a reluat cercetările de optică și a scris a doua sa carte în acest domeniu, intitulată *Dioptrice*, Augsburg, 1611, în care dă un impuls important progresului unei științe, a cărei parte teoretică era neglijată de prea multă vreme. Astfel, în această lucrare, care conține optzeci de pagini și poate fi citită cu folos și astăzi, pe baza unor considerații simple de geometrie elementară, Kepler stabilește *principiile fundamentale ale dioptricii* în aproximația paraxială (în care unghiurile de incidență și de refracție sunt proporționale), cu aplicații la lentile subțiri și la dublete precum și la triplete de lentile subțiri. În acest context, Kepler elaborează *prima teorie a telescoapelor de refracție* (pentru care aproximația paraxială este excelentă întrucât, în practică, unghiul de incidență al razelor de lumină este întotdeauna foarte mic) și discută cinci tipuri de lunete și anume: (1) dubletul obiectiv convex/ocular concav (luneta olandeză sau *luneta lui Galilei*), (2) dubletul obiectiv convex/ocular convex (sistem propus în propoziția 88 din *Dioptrice* și care poartă numele de *luneta lui Kepler*), (3) tripletul un obiectiv convex/două oculare concave, (4) tripletul un obiectiv convex/două oculare convexe și (5) două obiective convexe/un ocular convex. Luneta (2) propusă aici de Kepler va fi realizată efectiv câțiva ani mai târziu (circa 1613) de compatriotul său, astronomul *Cristoph Scheiner* (1575-1650) cu ajutorul căreia acesta va face timp de câțiva ani primele observații sistematice ale mișcării petelor solare (rezultate publicate în lucrarea *Rosa Ursina*, 1626-1630). Spre deosebire de luneta lui Galilei, luneta lui Kepler s-a impus în observațiile astronomice (în care faptul că imaginea apare răsturnată nu prezintă nici un inconvenient) datorită câmpului unghiular relativ mare. În plus, luneta lui Kepler are avantajul esențial că imaginea intermediară este reală astfel că, montând în planul acesteia două fire reticulare cu punctul de intersecție pe axul lunetei sau un cerc divizat, luneta poate fi folosită pentru poziționări sau măsurători precise. Dintre oamenii care au mai jucat un rol important în istoria invenției lunetelor mai cităm aici pe *Fontana* și *Schyr* (sau *Schyrhäus*). Astfel, astronomul italian *Francesco Fontana* (1580-1656), autorul lucrării *Novae celestium terrestriumque rerum observationes*, 1646, primul observator al "canalelor" planetei Marte și, probabil, primul care a schimbat ocularul inițial concav al microscopului cu ocularul convex, susține, de asemenea, că el inventase luneta astronomică (luneta lui Kepler) încă din 1608. Mai bine stabilite sunt meritele astronomului *Antoine - Marie Schyrhäus de Rheita* (1597-1660), care este inventatorul *lunetei terestre* (1645), un cuadruplet de lentile convexe sau dublă lunetă astronomică, ce dă

1613

1645

imagini drepte ale obiectelor. Tot de la el au mai rămas denumirile de *obiectiv* și de *ocular* iar de la *Demiscianus*, un membru al Academiei dei Lincei, denumirile de *telescop* și de *microscop*, în locul cuvintelor *conspicilia*, *perspicilia*, *occhiali* și *occhialini*, folosite pe atunci.

În afară de deschiderea făcută în teoria dioptricii și a lunetelor, Kepler a stabilit și mersul corect al razelor de lumină prin ochi, arătând cum fiecare con de raze emis de punctele obiectului este refractat de cristalin și reunit în punctul imagine corespunzător, și anume pe retină; vederea reprezintă deci senzația stimulării retinale, iar analogia dintre ochi și camera obscură cu lentilă convergentă este corectă. Toată această *teorie a vederii* a fost elaborată de *Kepler* în prima sa carte de optică din 1604 și a fost curând confirmată experimental de *Scheiner* (constructorul mai sus amintit al lunetei lui Kepler) într-o lucrare remarcabilă, *Oculus, hoc est fundamentum opticum*, 1610. Aici Scheiner arată că indicele de refracție al umorii apoase este egal cu cel al apei iar al cristalinului se apropie de cel al sticlei; tot aici el descrie celebra sa experiență cu ochiul de bou. Astfel, îndepărtând partea posterioară a scleroticii și coroidei și privind prin spatele ochiului ca prin obiectivul unei lunete, el a văzut foarte clar pe retina transparentă imaginea obiectelor îndepărtate din fața ochiului. Mai târziu, în 1625, a făcut aceeași demonstrație cu ochiul uman. Prin această experiență, decisivă și foarte instructivă, se stabilește definitiv că *sediul vederii se află în retină*. Totodată Scheiner a explicat și *mecanismul adaptării ochiului* prin modificarea formei cristalinului (obținută în experiența de mai sus printr-o ușoară presare a ochiului), cristalinul devenind mai convex (mai bombat) pentru obiectele apropiate și mai puțin convex (mai aplatizat) pentru obiectele îndepărtate. Ne apropiem de un moment culminant al opticii geometrice în care *legea simplă și exactă a refracției*,

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n,$$

iarăși "plutea în aer". Ea a mai plutit deasupra astronomului și matematicianului grec Ptolemeu (150), în jurul matematicianului și fizicianului arab Alhazen (1025), printre mâinile fizicianului polonez Witelo (1274), cum am arătat la timpul potrivit. Acum se oferea singură chiar marelui descoperitor de legi, Kepler, în forma necesității presante de a înțelege, în fine, funcționarea realizărilor chinuite ale empiricului, ochelarii, microscopul și luneta. Pentru a fi descoperită, nu trebuia decât să fie măsurate cu suficientă precizie *două unghiuri*: unghiul de incidență i și unghiul de refracție r . Și Kepler a refăcut aceste măsurători (*Dioptrice*, 1611), dar a ajuns numai la rezultatul, moștenit încă de la Ptolemeu, că, pentru unghiuri de incidență care nu depășesc circa 30° , se poate scrie aproximativ $i/r = n$ unde, pentru trecerea aer-sticlă, $n = 3/2$. A descoperit însă, în plus, *unghiul critic de reflexie totală*, care pentru reflexia sticlă-aer este de circa 42° , punct de la care datele eronate ale lui Witelo erau în flagrantă contradicție cu experiența. Kepler, însă, nu și-a mai amintit de frumoasa problemă pe care și-o pusese cu șapte ani mai înainte, în prima sa carte de optică, din 1604. Și, astfel, nici Kepler nu a avut fericirea de a descoperi veritabila lege a refracției, în ciuda șansei pe care a avut-o, ceea ce apare uimitor pentru un savant de talia lui.

1610

1611

1621
1637

Dar, timpul nu mai avea răbdare și capricioasa lege s-a scris atunci singură (și, în esență, fără alte mijloace decât cele cunoscute de aproape 1500 de ani) prin mâinile lui *Snell* (circa 1621) în forma $\text{cosec } r / \text{cosec } i = n$ și prin mâinile lui Descartes (1637) în forma $\sin i / \sin r = n$. Astfel, în fig.A.1, făcută în planul razelor incidentă AI și refractată IB, corespunzând trecerii aer-sticlă ($n = 1,5$), sunt ilustrate ambele "reprezentări" ale legii, și anume cea a lui Snell, care a scris $IB/IE = n$, și cea a lui Descartes, care a scris $IC/ID = n$.

1621

Snell, Willebrord van Roijen, lat. Snellius (1591-1626), matematician olandez, profesor la Leiden, cunoscut prin lucrările sale de trigonometrie sferică și triangulație, a scris și o lucrare de optică în care expune legea de refracție în forma raportului de cosecante, valoarea acestui raport pentru refracția aer-apă fiind corect dată prin $IB/IE = n = 4/3$.

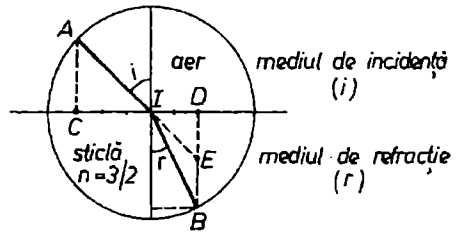


Fig.A.1. Legea refracției.

Este plauzibil să presupunem că Snell a fost condus la această lege pe baza unor măsurători (mai precise) de unghiuri și a exprimat-o în această formă inspirându-se din experiența lui *Ctesibius* (50 î.e.n.) cu "moneda din cupă" (ridicarea aparentă a fundului unui vas umplut cu apă). Fapt este că nimeni nu știe cum a gândit și cum a stabilit Snell, dintr-o singură "lovitură", legea care deschide ușa opticii moderne, pentru că lucrarea lui de optică nu a fost publicată niciodată. Ar fi, desigur, interesant de imaginat scenariul devenirii noastre științifice și tehnologice dacă această ușă ar fi fost deschisă de Ptolemeu, de Alhazen, sau măcar de Witelo. Cum remarca Huygens, se pare că Snell nu și-a dat prea bine seama de importanța descoperirii sale. Din fericire, Huygens, care a văzut manuscrisul lucrării (ca și Isaac Voss, la care ne vom referi mai departe), l-a citat corespunzător în prima sa carte de optică, *Dioptrica* (1653).

1637

Descartes, René du Perron, lat. Cartesius, Renatus (1596-1650), matematician francez, fondatorul geometriei analitice, a scris și o frumoasă carte de optică, *La Dioptrique*, 1637, în care exprimă legea exactă a refracției în forma actuală a raportului de sinuși. Modul în care Descartes încearcă să explice această lege pe baza unei analogii mecanice ad hoc, de refracție a unor mici globule rotitoare, reprezintă însă o altă problemă. Astfel, în esență, el presupune, așa cum va face și Newton curând, că lumina constă din particule și explică refracția (ca și reflexia) prin forța normală care se exercită asupra acestora la suprafața de separare. În consecință, viteza tangențială a particulelor de lumină rămâne neschimbată, adică $V_i \sin i = V_r \sin r$, de unde rezultă legea de refracție în forma

1637

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{V_r}{V_i} = n.$$

Această ecuație implică faptul că, la trecerea într-un mediu mai dens ($i > r$), viteza particulelor de lumină crește ($V_r > V_i$), și vice-versa, ceea ce pare să contrazică bunul simț, dar la critica *modelului corpuscular al luminii* vom

reveni ceva mai departe, împreună cu Fermat. Deocamdată, pe baza legii exacte de refracție, în capitolul opt al cărții sale *La Dioptrique* rezolvă cu strălucire problema în care eșuase Kepler în 1604, descriind suprafețele (denumite de atunci *suprafețe carteziene* sau *ovale Descartes*) care asigură, prin definiție, stigmatismul riguros pentru o pereche de puncte, în caz particular important reprezentându-l suprafețele cu secțiune conică.

Cum am arătat la locul potrivit, acestea au găsit un larg câmp de aplicații în construcția telescoapelor de reflexie și a lentilelor asferice. Este remarcabil faptul că Descartes a propus folosirea lentilelor hiperbolice pentru perfecționarea lunetelor și a proiectat o mașină de șlefuit astfel de profile, cu ajutorul căreia opticianul Ferrier din Paris a realizat încă de atunci *prima lentilă hiperbolică convexă*. Și *lentila cristalinului* a format obiectul cercetărilor lui Descartes, care a făcut numeroase disecții anatomice ale ochiului, confirmând concluzia lui Kepler, că retina este sediul fotoreceptor al imaginii, și experiențele lui Scheiner făcute cu ochiul de bou și cu ochiul uman; în plus, el bomba

cristalinul ochiului preparat în prealabil (alungire prin presare ușoară), observând că pe retina transparentă se formează atunci imaginea clară a obiectelor mai apropiate, fapt ce lămurește definitiv *mecanismul acomodării ochiului*.

În fine, menționăm contribuția strălucită a lui Descartes în elaborarea teoriei geometrice cantitative a *curcubeului* (*Les Météores*, 1637), cel mai frecvent și grandios fenomen optic natural, produs de refracția luminii solare în picăturile de ploaie, cum este ilustrat în figura A.2. Desigur, despre acest fenomen s-a scris încă din Antichitate (Aristotel, 350 î.e.n.; Seneca, 50 e.n.), dar de abia mult mai târziu Witelo (1274) încearcă să-l explice prin refracție și, în fine, *Dietrich din Freiberg, lat.*

TEORIA CARTEZIANĂ A CURCUBEULUI

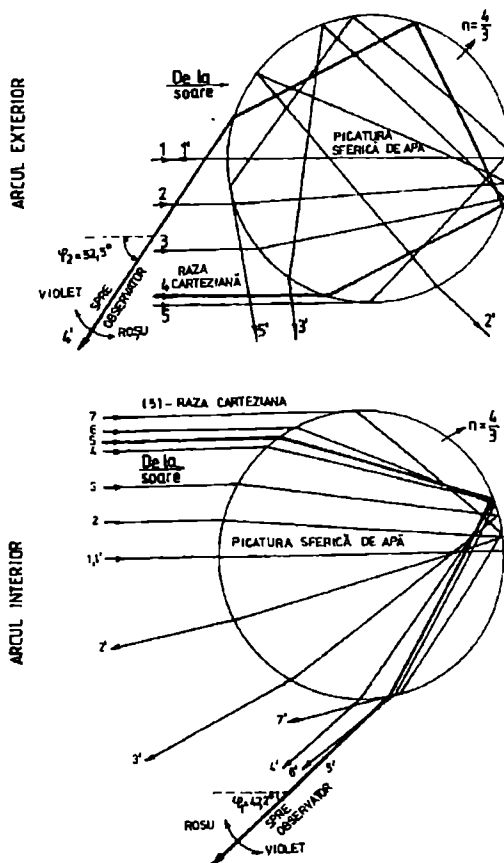


Fig.A.2. Producerea curcubeului în teoria lui Descartes.

1311

Theodoricus Teutonicus de Vriberg, în lucrarea *De luce et ejus origine, de coloribus, de iride et radialibus impressionibus* (1311), propune explicația calitativă corectă a curcubeului prin două refracții ale razelor de lumină solară în picăturile sferice de ploaie, și anume cu o singură reflexie intermediară pentru arcul principal (interior) intens și cu două reflexii intermediare pentru arcul secundar (exterior) mai slab (deoarece intensitatea luminii scade după fiecare reflexie). Din nefericire, această lucrare, remarcabilă pentru secolul 14, a rămas ascunsă într-o mănăstire și, apoi, în biblioteca publică a orașului Basel, necunoscută timp de secole, până când *Giovani Battista Venturi* (1746-1822), fizicianul italian cunoscut prin tratatele sale de hidraulică (aceiași care a deblocat din manuscrisele care au mai rămas și opera științifică a lui Leonardo da Vinci în 1797), a pus-o în circulație prin lucrarea sa *Commentari sopra la storia e la teoria dell'optica*, Bologna, 1814. Și așa s-a întâmplat că Maurolicus (1575), care a și măsurat unghiul dintre razele solare incidente și razele emergente ($\varphi_1 = 40^\circ - 42^\circ$ pentru arcul principal și $\varphi_2 = 50^\circ - 53^\circ$ pentru arcul secundar), a eșuat în încercarea sa de a explica fenomenul iar *Marcus Antonius de Dominis* (1566-1624), în lucrarea *De radiis visus et lucis in perspectivis et iride*, publicată în 1611 la Venetia, a demonstrat experimental (simulând curcubeul prin similitudine cu ajutorul unor sfere umplute cu apă și iluminate convenabil de Soare), că mersul razelor de lumină intuit de Dietrich din Freiberg în 1311 este valabil. Nu se știe dacă de Dominis văzuse lucrarea lui Dietrich sau dacă Descartes avusese cunoștință despre cei doi înaintași, dar Descartes (*Les Météores*, 1637) a făcut și el experiența cu baloanele sferice de sticlă umplute cu apă și este, cu siguranță, primul care a folosit legea exactă a refracției pentru a trasa mersul razelor de lumină ilustrat în figură. Spre deosebire însă de această figură, trasată pentru $n = 4/3$ doar prin câteva raze, Descartes a calculat cu mâna mersul a 10000 (!) de raze pentru $n = 250/187 \approx 1,3369$, obținând unghiurile de deviație extremă $\varphi_1 = 41,5^\circ$ pentru arcul principal și $\varphi_2 = 51,9^\circ$ pentru arcul secundar. Evident, numai în vecinătatea acestor unghiuri razele emergente constituie fascicule paralele și contribuie efectiv la realizarea celor două arce ale curcubeului pentru un observator îndepărtat*. Mai departe, însă, Descartes nu a putut să explice culorile curcubeului și anume de ce culorile, care se succed de la violet (V) spre

1611

* Problema lui Descartes a picăturii sferice se rezolvă ușor pe cale analitică, prin metoda deviației maxime sau minime. Astfel, notând cu i unghiul de incidență, cu r unghiul de refracție și cu k numărul de reflexii interne, din considerații geometrice elementare rezultă unghiul $\phi = 2(i - r) + k(\pi - 2r)$ dintre razele solare și razele emergente, respectiv unghiul de observare $\varphi = \pi - \phi$. Folosind legea de refracție $\sin i = n \sin r$, respectiv $\cos i = n \cos r$, din condiția de deviație extremă $d\varphi/di = 0$ rezultă

$$\cos i = \sqrt{\frac{n^2 - 1}{(k+1)^2 - 1}}$$

Astfel, de exemplu, pentru $n = 4/3$ și $k = 1$ obținem $i_1 = 59,38^\circ$, $r_1 = 40,2^\circ$, $\phi_1 = 137,97^\circ$, deci $\varphi_1 = 42,2^\circ$. În mod similar, pentru $k = 2$, rezultă $\varphi_2 = 52,5^\circ$.

1704

roșu (R), sunt etalate în sensuri opuse în cele două arce (vezi figura), dar edificiul principal al teoriei era deja construit (teoria arcelor albe sau fără culoare). Explicarea culorilor curcubeului va fi făcută de Newton care, prin frumoasele sale experiențe cu prisme de sticlă, va descoperi că lumina albă este compusă dintr-un mare număr de raze colorate de refringibilitate diferită (*Opticks*, London, 1704, tradusă în limba română de prof. Victor Marian sub titlul *Optica*, Ed. Academiei Române, București, 1970, unde teoria lui Newton a curcubeului se află la paginile 110-116). Teoria lui Newton nu reprezintă, de fapt, decât o simplă extensie a teoriei lui Descartes și anume o aplicație a acesteia pentru fiecare culoare din lumina albă, cum rezultă din tabelul următor (date calculate de Newton):

		<i>arc principal</i>	<i>arc secundar</i>
<i>Violet</i>	$n = 109/81 \cong 1,3457$	$40^{\circ}17'$	$54^{\circ}7'$
<i>Roșu</i>	$n = 108/81 \cong 1,3333$	$42^{\circ}2'$	$50^{\circ}57'$

Și astfel Descartes și Newton, cu ajutorul legii exacte de refracție, au explicat cantitativ trăsăturile principale ale fascinantului fenomen al curcubeului. Este interesant de amintit în acest context încă un nume uitat al istoriei, *Johannes Marcus Marci de Kronland* (1595-1667), care în cartea sa dedicată curcubeului "*Thaumantias Iris, liber de arcu coelesti, deque colorum apparentium natura, ortu et causis*", publicată la Praga în 1648, a făcut pentru prima dată legătura dintre culoare și deviația produsă prin refracție, din observațiile spectrului luminii albe (iris trigonia) generat de o prismă triunghiulară (trigonum) plasată în fața deschiderii unei camere întunecoase. Contribuția lui Marci a fost remarcată însă abia după 300 de ani de la moartea sa (Războiul de 30 de ani a împiedicat circulația de idei între Europa centrală și cea de vest).

Chestiunea priorității în descoperirea legii de refracție a fost mult discutată în literatură, chiar până în zilele noastre. Ea a început prin bănuiala lui Christian Huygens și prin atacul violent al lui Isaac Voss, ambii compatrioți cu Snell, că Descartes ar fi văzut mai înainte manuscrisul acestuia ("quae et nos vidimus aliquando et Cartesium vidisse accepimus, ut hinc fortasse mensuram illam quae in sinibus consistit elicuerit"^{*}, Huygens, *Dioptrica*, 1653), respectiv că ar fi furat legea lui Snell, inventând ad hoc teoria cu globulele de lumină pentru a masca plagiatul (Vossius, *De lucis natura et proprietate*, 1662). Pare straniu că aceste afirmații au apărut abia la trei ani, respectiv la doisprezece ani, după moartea lui Descartes. Este adevărat că Descartes a călătorit foarte mult prin Europa și că a fost timp de 20 de ani rezident permanent în Olanda (1629-1649), unde a locuit în 13 orașe, printre care și în Leida (în 1630), orașul în care trăise Snell. Studii mai noi cu privire la această controversă (P. Kramer, *Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik*, No.4, pp. 233-278, Teubner, Leipzig, 1882; H. Boegehold, *Keplers Gedanken über Brechungsgesetz und ihre Einwirkung auf Snell und Descartes*, Ber. naturwiss., Ver. Regensburg, 19, 150 (1928-30); M. Herzberger *Optics from Euclid to Huygens*,

* "ceea ce și noi am văzut cândva și știm că a văzut și Cartesius, încât de aici a apărut poate acea măsură a raportului de sinuși".

Applied Optics, 5, 1383 (1966)) au descoperit însă în scrisorile lui Descartes că acesta se preocupa de lentila asferică plano-hiperbolică încă din 1627. Cum o astfel de lentilă focalizează stigmatic imaginea unui obiect îndepărtat tocmai pentru că suprafața ei hiperbolică este definită prin legea de sinus, este drept să presupunem că Descartes avea în minte legea de refracție cu trei ani mai înainte de vizita sa la Leida în 1630. De aceea, este echitabil ca această lege, crucială pentru dezvoltarea ulterioară a opticii, ca și a științelor în general, să poarte numele de *legea Snell-Descartes*, neuitând nici de Kepler, care a fost atât de aproape de ea, și nici de Witelo, Alhazen sau Ptolemeu, care puteau să o descopere la fel de bine cu mult timp mai înainte.

1637

Este neîndoielnic faptul că fundamentarea teoretică a dioptricii prin Kepler și Descartes a fost impulsionată de lunetele și microscopul alcătuite accidental abia prin anii 1610, după multe sute de ani de șlefuit sticlă și cristale și de confecționat lentile sau obiecte similare cu acestea. Dar, tot atât de adevărat este și faptul că legea fundamentală a opticii geometrice, comunicată public de Descartes în 1637, a constituit un instrument puternic pentru depășirea stării de stagnare științifică milenară. Mai întâi, vom asista la metamorfoza legii de refracție într-o lege și mai generală a opticii geometrice, *principiul lui Fermat*, (1657), cu implicații conceptuale profunde în formularea variațională a legilor naturii. Cu aceeași grabă pentru recuperarea timpului pierdut, se trece la proiectarea și construcția telescoapelor de performanță (*Gregory, Newton, Cassegrain, Hooke, Huygens, Hadley, Dollond, Herschel*) cu impactul cunoscut în noua astronomie post-telescopică și în reprezentările despre Univers, ca și la introducerea microscopului (*Hooke, Leeuwenhoek*) în observațiile micrografice și anatomice de precizie. Se acumulează rapid noi fapte privind fenomene luminoase mai subtile ca, difracția (*Grimaldi*), interferența (*Hooke*), dispersia (*Marci, Newton*), birefringența (*Bartholinus*), viteza luminii (*Römer, Bradley*), într-o perioadă de o fertilitate fără precedent, aureolată de geniul lui Newton și de geniul lui Huygens. Spre deosebire de perioada anterioară, în care eforturile savanților erau în mare măsură individuale, începând din această epocă interacția dintre aceștia crește considerabil, schimburile de idei dovedindu-se extrem de fertile pentru provocarea altor descoperiri. Științele, în fine, încep să înflorească și, în ciuda unor fluctuații și instabilități inerente epocii, se cristalizează primele societăți științifice puternice prin Societatea Regală din Londra, 1662, cu celebra sa publicație *Philosophical Transactions of the Royal Society* (fondată în 1665) și prin Academia de Științe din Paris, 1664, cu publicația *Journal des Savants* (fondată în 1665), urmate de academiile din Bologna (1712), Berlin (1720), Petersburg (1725), Uppsala (1725), Stockholm (1739), Copenhaga (1743) ș. a. m. d. Să continuăm, deci, cu prezentarea, pe scurt, a marilor momente din perioada post-carteziană.

Fermat, Pierre de (1601-1665), matematician francez, fondatorul teoriei moderne a numerelor și precursor al calculului infinitezimal (a dezvoltat metoda lui Kepler conform căreia, în vecinătatea maximelor și minimelor, variațiile funcțiilor sunt nule). A avut polemici aprinse cu

Descartes, atât în probleme de minim și maxim al curbilor cât, mai ales, cu privire la modul în care acesta a "demonstrat" legea de refracție și a ajuns la concluzia că viteza (particulelor) luminii este mai mare în medii mai dense. De fapt, judecând această controversă la nivelul secolului 20, modelul corpuscular Descartes-Newton al luminii poate fi ușor modificat și pus în acord cu experiența acumulată până astăzi. Pentru aceasta, este suficient să scriem conservarea componentei tangențiale a impulsului (și nu a vitezei), adică $p_i \sin i = p_r \sin r$, de unde rezultă legea de refracție în forma corectă

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{p_r}{p_i} = n,$$

și care *nu* poate fi transcrisă în forma $\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{V_r}{V_i} = n$, deoarece *impulsul*

fotonului (particulei de lumină) *nu* se scrie ca produsul $p = mV$. Cum știm (Einstein - de Broglie), $p \sim 1/\lambda = v/V \sim 1/V$, unde *V este viteza de fază* a unei monocromatice de lumină, astfel că expresia corectă a legii de refracție se mai poate scrie, alternativ, în forma

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{V_i}{V_r} = n,$$

sau, definind indicele absolut de refracție $n_{i,r} = c/V_{i,r}$, corespunzător trecerii vid-mediu,

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_r}{n_i} = n,$$

unde *n* (simplu) reprezintă indicele relativ de refracție, asociat trecerii mediu (*i*) - mediu (*r*) considerate. Dar toate aceste reprezentări nu erau tot așa de clare în perioada căutărilor conceptuale din timpul celebrei dispute Descartes versus Fermat, dispută continuată la nivelul Newton versus Huygens, apoi luând proporții seculară, secolul 18 versus secolul 19, până la împăcarea (sau armistițiul) dualismului particulă-undă din secolul nostru. S-ar putea pune întrebarea de ce nu s-a făcut, încă de la început, un experiment prin care să se decidă, de exemplu, dacă viteza luminii este mai mare în apă decât în aer, cum rezultă din formula originală a lui Descartes, sau invers, cum susținea Fermat. Răspunsul este că, prin tehnica experimentală a secolelor 17 și 18, nu se putea stabili dacă viteza luminii crește sau scade în medii mai dense. Tot ce s-a putut face a fost determinarea vitezei luminii în vid prin metode astronomice (*Römer*, 1676 și *Bradley*, 1727), cum vom vedea ceva mai departe. De abia la mijlocul secolului 19 (secolul opticii ondulatorii) a fost posibilă demonstrația experimentală, în condiții terestre, că viteza luminii este mai mare în aer decât în medii mai dense, cum este apa (*Fizeau* și *Foucault*, 1850). Dar, în acel moment, modelul ondulatoriu al luminii era deja bine consolidat prin demonstrația și lămurirea fenomenelor sale caracteristice de interferență (experiențele lui *Young*, 1802-1804), difracție (teoria și experiențele lui *Fresnel*, 1818), și polarizare (natura transversală a undelor de lumină, *Young* și *Fresnel*, 1820), îndreptându-se cu pași mari spre culmea gloriei sale, teoria electromagnetică a luminii (*Maxwell*, 1873 și *Hertz*, 1887). În secolul 17, însă, era riscant de avansat ipoteze asupra naturii subtile a luminii pe baza observațională și experimentală existentă atunci. Desigur, se

1676
1727

mai întâmplă uneori ca o prezicere să fie mai târziu confirmată, cum este cazul sugestiei lui Descartes privind curbarea razelor de lumină la trecerea pe lângă un corp ceresc masiv, anticipându-l astfel pe Einstein cu aproape 300 de ani*. Dar, singurul sprijin ferm pentru dezvoltarea mai departe a cunoașterii fenomenelor luminoase era expresia matematică exactă a legii de refracție, a cărei verificare și confirmare experimentală în sticlă, cristale, apă și multe alte lichide devenise o ocupație la ordinea zilei după apariția cărții de optică a lui Descartes. Inițial, Fermat era convins că legea însăși este falsă dar evidența experimentală a devenit curând atât de clară, încât mai rămânea de dezlegat misterul modelului corpuscular al lui Descartes, cu ajutorul căruia dedusese totuși legea formal exactă, dar cu concluzia paradoxală că lumina întâmpină o rezistență mai mică într-un mediu dens decât într-un mediu rarefiat. După mulți ani de strădănie, eventual amintindu-și principiul drumului minim al lui Heron (50 e.n.), Fermat a reușit să înlăture paradoxul vitezei și să formuleze un mare postulat (vezi operele sale publicate postum, *Varia opera mathematica*, p. 156, Toulouse, 1679), cunoscut sub numele de *principiul timpului minim sau principiul lui Fermat* (1657). Exprimat mai întâi în forma heroniană "... que la nature agit toujours par les voies les plus courtes" (într-o scrisoare din Toulouse, August, 1657), apoi în forma generală, care cuprinde și refracția, și anume că *raza de lumină se propagă de la un punct la altul pe traiectoria parcursă în timpul cel mai scurt* (într-o scrisoare din Toulouse, 1 ianuarie, 1662), cu remarcă, adăugată ulterior, că *timpul de propagare a luminii este staționar* (minim, maxim sau constant), acest principiu reprezintă expresia cea mai concisă a întregii optici geometrice. Din el rezultau, mai întâi, toate legile cunoscute până atunci ale refracției, reflexiei și propagării rectilinii în medii omogene dar, prin însumare de durate infinitezimale, el este mult mai general, fiind valabil și pentru traiectoriile curbilinii din medii neomogene oarecare. Astfel, de exemplu, pentru refracția la suprafața de separare dintre două medii omogene avem

1657

$$t_j + t_r = \frac{s_j}{v_j} + \frac{s_r}{v_r} = \text{staționar},$$

de unde rezultă aceeași lege a raportului de sinuși, dar în forma fizic acceptabilă $\sin i / \sin r = v_j / v_r = n$. În formularea sa cea mai generală, valabilă și în medii neomogene, principiul lui Fermat se scrie

$$\int_{t_1}^{t_2} dt = \int_{P_1}^{P_2} \frac{ds}{v} = \text{staționar}.$$

* Mai mult, astronomii zilelor noastre au descoperit veritabile miraje gravitaționale ("quasarii dubli" și "quasarii multipli"), pe care le explică prin deformarea, amplificarea sau multiplicarea imaginii astrelor îndepărtate produsă de masa galaxiilor aflate în apropierea traiectoriei razelor de lumină (vezi Alain Blanchard, *Les mirages gravitationnels*, La Recherche, octombrie, 1987).

Este evident saltul conceptual făcut de Fermat, de la o lege în sinus care imită direct geometria refracției (și care, la rândul ei, reprezintă o regulă simplă care înlocuiește nesfârșite tabele goniometrice), la un principiu unic, care guvernează comportarea razelor de lumină în orice situație. Concepția lui Fermat, de a construi edificiul de legi ale naturii dintr-un principiu integral de extremum, a inspirat puternic pe marii săi urmași Leibnitz, Jean și Jaques Bernoulli, Maupertuis, Euler, Lagrange, Hamilton, Jacobi, până la Feynman în zilele noastre.

1682

Astfel, *Gottfried, Wilhelm Leibnitz* (1646-1716) a reluat problema în spiritul aristotelian că "natura nu face nimic în zadar" și a avansat *principiul efortului minim* (*Acta Eruditorum*, Leipzig, 1682), unde prin efort înțelegea un lucru mecanic (travaliu) și anume, produsul dintre forța de rezistență R întâmpinată de lumină în mediu și deplasarea s . Aplicând calculul infinitezimal (pe care îl elaborase în competiție cu Newton) la principiul său $R_i s_i + R_r s_r = \text{minim}$, obține $R_i ds_i + R_r ds_r = 0$, de unde, exprimând elementele de drum în funcție de unghiuri, rezultă legea raportului de sinuși în forma $\sin i / \sin r = R_r / R_i$, adică rezistența este mai mare în mediul mai dens. Deci, în esență nimic nou față de rezultatul lui Fermat dacă facem ipoteza naturală că $v \sim 1/R$. Dar, pentru a ilustra cât de greu și alunecos este drumul conceptelor și al reprezentărilor fizicii, amintim că Leibnitz a făcut presupunerea *incredibilă* că $v \sim R$ (pe baza analogiei că viteza unui râu este mai mare acolo unde albia este mai îngustă). Această opțiune, surprinzătoare, a lui Leibnitz se explică mai ales prin părerea dominantă a timpului său, impusă de autoritatea lui Descartes și Newton, că viteza de propagare a luminii ar fi mai mare în medii mai dense, dar și pentru că formalismul generos, introdus de Fermat în optica geometrică, urma iminent să fie preluat și de științele surori, matematica și mecanica. Căci iată, *Jean Bernoulli* (1667-1748) formulează celebra sa

1696

problemă a brachistochronei (*Acta Euroditorum*, Leipzig, 1696), la care el însuși dă soluția prin analogie cu optica geometrică iar fratele său mai mare *Jacques Bernoulli* (1654-1705) răspunde, printr-o reformulare pentru o clasă mai generală de probleme, punând astfel *bazele calculului variațional*. În același spirit, *Pierre Louis Moreau de Maupertuis* (1698-1759) reia ideea lui Leibnitz și enunță *principiul minime acțiunii*

1744

(*Mémoires de l'Académie de Paris*, 1740, 1744), unde prin *acțiune* înțelege produsul dintre impulsul mV al unei particule (nu neapărat de lumină) și deplasarea s . Acest nou principiu se scrie $V_i s_i + V_r s_r = \text{minim}$ și conduce, cum am văzut, la legea carteziană în forma ei primitivă $\sin i / \sin r = V_r / V_i$. Dar marea descoperire a fost că, deși fals pentru razele opticii geometrice, acest principiu se potrivea pentru traiectoriile mișcării mecanice. De fapt, formularea precisă a principiului lui Maupertuis, valabilă pentru mișcarea unei particule în câmp conservativ, a fost dată de *Leonhard Euler* (1707-1783) în *Methodus inveniendi lineas curvas, maxime minimive proprietate gaudentes*, Lausanne et Genève, 1744, și anume

$$\int_{P_1}^{P_2} V_{ds} = \text{sta\c{t}ionar},$$

iar pentru condiții mai generale de *Joseph Louis Lagrange* (1736-1813) în *Mécanique Analytique*, 1788, de *William Rowan Hamilton* (1805-1865) în *On a General Method in Dynamics*, Philosophical Transactions of the Royal Society, 1834, de *Karl Gustav Jacob Jacobi* (1804-1851) în *Vorlesungen über Dynamik*, 1866, pentru mecanica clasică, până la *Richard Phillips Feynman* (1918-1987), în *Space-Time Approach to Non-Relativistic Quantum Mechanics*, Rev. Mod. Phys., 20, 367, (1948) și în *Quantum Mechanics and Path Integrals*, 1966, pentru mecanica cuantică. Și astfel, elegantele formulări variaționale ale legilor naturii și formalismul lagrangian și hamiltonian asociat, au dominat fizica secolelor 19 și 20. Aceasta a fost deschiderea conceptuală izvorâtă din principiul lui Fermat. Desigur, putem adăuga post festum că, dacă Heron ar fi extins pentru refracție principiul său de minim, atunci el ar fi fost autorul a ceea ce numim principiul lui Fermat, dar, el, precum Ptolemeu în fața legii de sinus, rată marea șansă de salt milenar peste timp.

Revenind la aplicațiile practice, este interesant de remarcat că succesele dioptricii au deblocat mai întâi aplicațiile catoptricii. Astfel, neajunsul principal al primelor lunete, cauzat de aberațiile cromatice (irizarea imaginii), precum și gradul de perfecțiune atins de oglinzile metalice concave, folosite încă din Antichitate (vezi legendele cu oglinzile lui Arhimede sau cu farul din Alexandria și până la presupusul instrument cu oglindă din Ragusa), au condus la ideea *telescopului de reflexie*, propus mai întâi cu reflector sferic de *Nicolaus Succius* (*Optica philosophica*, 1616), apoi cu reflector parabolic de *Marin Mersenne* (*Cogitata phisico-mathematica*, 1644), dar proiectat efectiv de matematicianul scoțian *James Gregory* (1638-1675) în memoriul său *Optica promota* (1663), în care descrie varianta care îi poartă numele (oglină principală parabolică și oglindă secundară eliptică concavă). La rândul ei, lucrarea lui Gregory îi stimulează pe *Robert Hooke* (1635-1703), care realizează efectiv telescopul lui Gregory, dar cu oglinzi sferice (Phil. Trans. Roy. Soc., 1674), pe *Giovanni Cassegrain* (1625-1712), care descrie în *Journal des Savants* (1672) varianta sa, mai scurtă (cu oglindă secundară hiperbolică convexă), și pe, tânărul atunci, *Isaac Newton* (1642-1727). Încă din anul 1666 Newton descoperise fenomenul de dispersie a luminii sau, în terminologia sa, de refringibilitate diferită a razelor de lumină de diverse culori, de unde a tras concluzia imposibilității realizării de lunete perfecte, adică lunete care să dea în lumină albă imagini clare, neirizate. Această concluzie, cunoscută ca "eroarea lui Newton", (vezi Cap.I, secțiunea 1.2.7), bazată pe presupunerea că dispersia relativă a luminii este aceeași în toate sticlele, l-a făcut pe Newton să creadă că problema realizării lunetei cu obiectiv acromat este insolubilă. Dar până și această eroare a avut un sfârșit fericit căci atunci Newton s-a apucat să construiască, cu propriile mâini și cu o îndemănare de invidiat până în zilele noastre, telescopul de reflexie care îi poartă numele, reușind o mărire de 30-40X cu un instrument de numai 6 inch lungime și 1

1672

inch diametru (*Phil. Trans. Roy. Soc.*, 1672). Toată această istorie a telescopului lui Newton, ca și întreaga sa contribuție inestimabilă la cercetarea experimentală a fenomenelor optice, merită citită direct din opera autorului ei (vezi Isaac Newton, *Optica*, Ed. Academiei Române, București, 1970). Este o onoare pentru Societatea Regală din Londra că l-a apreciat cum se cuvine pe Newton, alegându-l ca membru al ei în ședința sa din 11 ianuarie 1672 și expunând telescopul realizat de acesta în Biblioteca Societății, unde se află și astăzi lângă inscripția "Invented by Sir Isaac Newton and made with his own hands, 1671". Dar primele telescoape de reflexie, realizate de Hooke și de Newton, erau modele experimentale de mici dimensiuni iar valoarea lor nu consta decât în aceea că indicau căile de urmat pentru obținerea unor performanțe mai bune. Primele astfel de telescoape mai mari, de interes practic, au fost construite abia peste 50 de ani, atât în varianta lui Newton (în 1723), cât și în varianta lui Gregory (în 1726) de către *John Hadley* (1682-1744). Dar, avantajele oglinzilor față de lentile (lipsa aberațiilor cromatice și dimensiuni posibile mult mai mari) au stimulat în continuare obținerea unor performanțe și mai bune. Astfel, cele mai puternice telescoape din perioada care urmează au fost construite de celebrul astronom englez *Sir William Herschel* (1738-1822), printre care și marele său telescop cu distanța focală de 12 metri (*Phil. Trans. Roy. Soc.*, p. 347, 1795), în varianta care îi poartă numele, folosită și în zilele noastre. Cu ajutorul acestor instrumente minunate, Herschel a descoperit planeta Uranus (dublând astfel extinderea sistemului solar cunoscut) și peste 800 de stele duble (arătând că stelele binare se rotesc una în jurul celeilalte în acord cu legea de gravitație a lui Newton), a studiat și catalogat circa 2500 de nebuloase sau roiuri (clusteri) de stele și a făcut descoperirea senzațională a "luminii invizibile" din spectrul infraroșu al Soarelui (*Phil. Trans. Roy. Soc.*, p. 292, 1800; măsurând temperatura cu ajutorul unor termometre așezate în diferite porțiuni ale spectrului solar, el a arătat că aceasta crește de la violet spre roșu, atingând valoarea maximă în domeniul invizibil, denumit astăzi infraroșu).

1795

1800

1676

Este remarcabil faptul că determinarea vitezei de propagare a luminii (în vid), una din cele mai mari cuceriri ale opticii, a fost posibilă mai întâi prin metodele astronomice generate de secolul 17 (Römer, 1676 și Bradley, 1727). Până în anul 1676 nu se știa dacă lumina se propagă instantaneu sau nu, iar dacă nu, cât de mare ar putea să fie viteza sa. Încă din Antichitate, domina părerea lui Heron (*Catoptrica*, circa 50 e.n.) că, prin analogie cu traiectoria unei săgeți aruncate cu viteză din ce în ce mai mare, viteza luminii, care se propagă rectiliniu, trebuie să fie mult mai mare decât viteza oricărui corp terestru. Descartes (*La Dioptrique*, 1637) considera că, dacă viteza de propagare a luminii ar fi finită atunci, din compunerea acesteia cu viteza orbitală a Pământului, ar trebui să observăm o mișcare aparentă a "stelelor fixe" pe bolta cerească (acest efect, denumit aberație stelară, a fost într-adevăr descoperit de Bradley în 1727, adică după 90 de ani). Încercarea lui Galilei (1638), cu semnale luminoase schimbate între doi observatori terestri, distanțați la circa 3 Km, a eșuat desigur, din cauza timpului mult prea scurt în care lumina se propaga între aceștia. Și

1675

astfel, ajungem la momentul Cassini - Römer (1675-1676), al astronomului de origine italiană *Giovanni Domenico Cassini* (1625-1712), membru al Academiei Franceze și al Societății Regale, primul director al Observatorului Astronomic din Paris, pe care l-a condus timp de 40 de ani (1671-1711), cu o activitate prodigioasă (circa 200 de memorii științifice, între care descoperirea a patru sateliți ai lui Saturn și studiul rotației planetelor în jurul axelor proprii) și al astronomului danez *Olaf Christensen Römer* (1644-1710), și el membru al Academiei Franceze și care, mai târziu (1681-1710), va deveni profesor la Universitatea din Copenhaga, director al Observatorului Astronomic și chiar primar al acestui oraș (1705). În august 1675, Cassini a comunicat "la seconde inégalité" în mișcarea sateliților lui Jupiter, efect despre care a scris că "pare cauzat de faptul că luminii îi trebuie un oarecare timp pentru a ajunge de la sateliți la noi și că îi trebuie 10-11 minute pentru a parcurge o distanță egală cu raza orbitei Pământului". Cum se știa încă de la Galilei (1610), perioadele de revoluție ale sateliților lui Jupiter sunt de câteva zile (de exemplu perioada primului satelit, Io, cel mai apropiat de planetă, este, conform datelor actuale, de 42 ore 28 minute 16 secunde iar orbita sa în jurul lui Jupiter este practic în planul orbitei lui Jupiter în jurul Soarelui). Inegalitatea lui Cassini reprezenta observația că timpul dintre două eclipse succesive ale sateliților lui Jupiter crește și scade periodic odată cu îndepărtarea, respectiv cu apropierea, periodică a Pământului de Jupiter, în mișcarea lor orbitală în jurul Soarelui (vezi figura A.3). Astfel, observațiile lui Römer și Cassini din anul 1676 au stabilit faptul că primul satelit al lui Jupiter a ieșit din umbra planetei (a "răsărit") cu 10 minute mai târziu în luna Noiembrie decât în luna August, adică după un sfert de an, interval de timp în care distanța dintre Pământ și Jupiter crescuse practic cu o rază a orbitei terestre, confirmând concluzia lui Cassini din anul precedent. Folosind această întârziere,

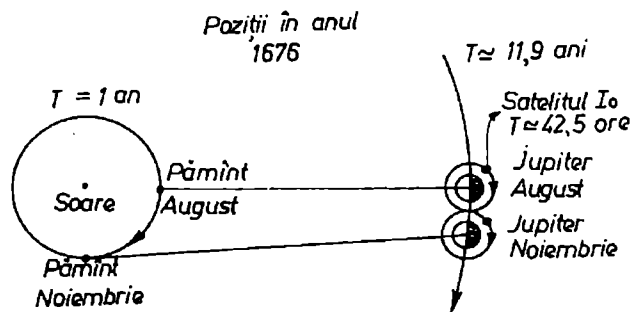


Fig.A.3. Determinarea vitezei luminii (metoda Römer).

1676

cauzată de propagarea luminii, și datele de atunci ale razei orbitei Pământului, Römer a găsit pentru viteza luminii o valoare de circa 214000 km/s, valoare, într-adevăr, excesiv de mare dar, totuși, *finită* (întârzierea de 10 minute a fost supraestimată; cu datele actuale, lumina parcurgând, de fapt, distanța Soare-Pământ de $149 \cdot 10^6$ km în 8,35 minute, de unde rezultă $c \approx 300000$ km/s). Este interesant de amintit că argumentul lui Descartes, formulat cu aproape 40 de ani mai înainte, cu privire la aberația stelară, era așa de tare, încât Cassini, inițiatorul și co-autorul primei metode prin care s-a determinat, în fine, viteza luminii, s-a desolidarizat de acest rezultat, iar Römer l-a comunicat singur, în condiții de mare ostilitate, în ședința Academiei de Științe din 21 noiembrie 1676, publicându-l apoi în *Journal*

des Savants din 7 decembrie 1676 și în *Philosophical Transaction of the Royal Society* din 1677. Descoperirea nu a fost, totuși acceptată de comunitatea științifică a timpului până când obiecția carteziană nu a fost satisfăcută, iar aceasta s-a întâmplat abia în anul 1727, când astronomul englez *James Bradley* (1693-1762), profesor la Universitatea din Oxford și membru a trei academii (Societatea Regală din Londra, Academia de Științe din Paris și Academia de Științe din Berlin), a descoperit, în fine, și efectul de aberație stelară (*Phil.*

Trans. Roy. Soc., 35, p. 637, 1728). Astfel, studiind cu grijă poziția stelelor γ și δ din constelația Dragonului, situate practic la polul eclipticii Pământului,

Bradley a observat că, într-adevăr, în decurs de un an, acestea descriu câte o mică elipsă, cu un diametru unghiular de $2\alpha \approx 40''$. Prin analogie cu înclinarea necesară a unei umbrele la deplasarea prin ploaie (vezi figura A.4), înclinarea telescopului de observare, cauzată de aberația stelară, este $\alpha \approx V/c$, unde

$V \approx 30 \text{ km/s}$ este viteza orbitală a Pământului iar $\alpha \approx 20'' = 10^{-4}$ radiani. Și, astfel, Bradley obține:

$$c \approx \frac{V}{\alpha} \approx \frac{30}{10^{-4}} \text{ km/s} = 300000 \text{ km/s},$$

confirmând rezultatul lui pe Rømer și stabilind definitiv valoarea primei constante universale. Mai mult de 100 de ani aveau să treacă până când *Armand Hippolyte Louis Fizeau*, cu roata dințată (*C. R. Acad. Sci.*, Paris, 1849) și *Jean Bernard Léon Foucault*, cu oglinda rotitoare (*C. R. Acad. Sci.*, Paris, 1850) vor deschide seria măsurătorilor terestre ale lui c , a cărei valoare actuală (stabilită în 1970) este

$$c = 299792,458 \text{ km/s},$$

cu o eroare de cel mult 300 m/s, adică de 0,0001%. Un număr considerabil de experiențe au fost făcute pentru a determina cât mai exact viteza luminii. Întrucât aceasta este foarte mare, este necesar să fie folosite distanțe foarte mari și/sau intervale de timp foarte scurte. Alternativ, se măsoară lungimea de undă în vid, λ_0 , a unei unde electromagnetice de frecvență ν cunoscută, viteza luminii rezultând din relația simplă $c = \nu\lambda_0$. De fapt, tot arsenalul de dispozitive electronice clasice și cuantice ale secolului 20 și-a verificat performanțele în determinarea acestei mărimi, dată fiind importanța ei în întreaga evoluție a teoriilor fizice. Este viteza luminii "foarte mare"? Puteți

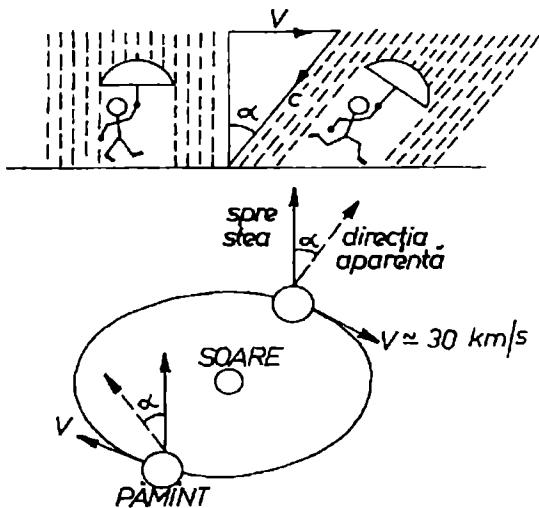


Fig.A.4. Pentru înțelegerea aberației lui Bradley.

aprecia singuri știind că luminii îi trebuie ca să ajungă de la Soare la noi, cum am văzut, circa 8 minute, de la cele mai apropiate stele (Alfa Centauri și Proxima Centauri) 4,3 ani, de la cea mai strălucitoare stea (Sirius) 8,5 ani, de la Steaua Polară 400 de ani, de la centrul Galaxiei noastre $5 \cdot 10^4$ ani, de la cele mai apropiate galaxii $2,5 \cdot 10^6$ ani, de la cele mai îndepărtate galaxii observate $6,5 \cdot 10^9$ ani, iar de la marginea Universului nostru observabil poate $19 \cdot 10^9$ ani. Ceea ce este esențial pentru structura Universului nostru este însă faptul că viteza luminii în vid nu poate fi atinsă de nici un alt corp material, că ea nu poate fi depășită de nici-un alt semnal, că lumina în vid este cel mai rapid mesager iar *c este o viteză limită*, afirmație într-adevăr foarte tare, ridicată de *Albert Einstein* la rangul de postulat al teoriei relativității. O altă caracteristică remarcabilă legată de natura ei subtilă este că *lumina se propagă și în vid*, adică într-un spațiu lipsit de substanța atomo-moleculară obișnuită (spre deosebire de sunet, de exemplu, care o presupune) ceea ce atrage atenția asupra faptului că acest "vid" trebuie să fie sediul unor proprietăți și procese la nivelul cel mai rafinat și profund al materiei.

Dacă prin telescop a fost descoperit Universul obiectelor îndepărtate, prin microscop a fost descoperit Universul obiectelor infime. *Robert Hooke* (1635-1703), amintit mai înainte pentru construcția primului telescop de reflexie (1674), îmbunătățind substanțial calitatea lentilelor, a realizat și *primul microscop compus* de interes practic (1675), devenind pionierul observațiilor microscopice de precizie. Toate acestea sunt descrise în cartea sa de referință în istoria microscopului, *Micrographia or some physiological descriptions of minute bodies*, London, 1665. Hooke a jucat un rol de prim ordin în *organizarea Societății Regale din Londra*, ca membru fondator (1663), director (curator) permanent pentru experiențe și ședințele săptămânale (1662-1703) și unul din secretarii societății (din 1677). Dintre primii membri aleși ca *Fellow of the Royal Society* (*F. R. S.*) amintim nume ilustre ca *Huygens* (1663); *Newton* (1672); *Flamsteed* (1676), primul director al Observatorului Astronomic din Greenwich (1675); *Halley* (1678), cunoscut pentru calculul său al orbitei cometei Halley, 1682, autorul binecunoscutei formule $(1/p_1) + (1/p_2) = (n-1) \cdot [(1/r_1) - (1/r_2)]$ și, în fine, un celebru rival al lui Hooke, biologul olandez *Antony van Leeuwenhoek* (1632-1723), F.R.S. din 1679, care și-a uimit contemporanii cu descoperirile sale la *microscopul simplu* (*Phil. Trans. Roy. Soc.*, 1673), autorul celor patru volume de opere *Arcana naturae ope microscopiorum detecta* (*Secretele naturii descoperite prin microscop*), Leiden, 1722. Cu lentile construite de el cu mare precizie, cele mai mici având un diametru de numai 0,5 mm, și probe fixate pe vârful unui ac, Leeuwenhoek a putut observa structuri și procese biologice la nivele inaccesibile până atunci, cu o putere de rezoluție a detaliilor până aproape de limita teoretică de un micron. Cu ajutorul unui astfel de instrument, el a studiat textura dinților și oaselor, striția fibrelor musculare, structura fibroasă a cristalinului, circulația capilară sangvină (confirmând și dezvoltând observațiile microscopice anterioare ale medicului italian *Marcello Malpighi*, 1661), a

1665

dat prima descriere exactă a globulelor roșii, a bacteriilor, a protozoarelor și a fost primul observator al mișcării haotice permanente a particulelor infime suspendate în lichide (1673). Această *mișcare browniană* a fost confirmată în 1827 de fizicianul scoțian *Robert Brown* (1773-1858), care a observat la microscop neîntrerupta mișcare în zig-zag a granulelor de polen suspendate într-o picătură de apă. Teoria cinetică a mișcării browniene a suspensiilor, produsă prin ciocnirile moleculare, a fost dată de *Albert Einstein* (1905) și strălucit confirmată experimental de *Jean Perrin* (1908) prin clasicul său studiu microscopic al particulelor de fum (diametru $\cong 10^{-4}$ cm) din aer, prilej cu care a fost determinată o foarte bună valoare a *numărului lui Avogadro*.

Începând din secolul 17, studiul refracției a căpătat un mare avânt datorită interesului practic și științific pentru construcția instrumentelor optice. Formulele lentilelor și oglinzilor sferice, construcțiile geometrice ale imaginilor, introducerea în studiul aberațiilor, toate acestea au fost opera unor oameni ca *Johannes Kepler* (*Dioptrice*, 1611), *Francesco Bonaventura Cavalieri* (*Exercitationes geometricae*, 1647), *Christiaan Huygens* (*Dioptrica*, 1653), *Isaac Newton* (*Lectiones opticae*, 1669), *Isaac Barrow* (*Lectiones opticae et geometricae*, 1674) și *Edmund Halley* (*Phil. Trans. Roy. Soc.*, 1693), sistematizate în marile tratate de optică ale secolului 18, scrise de *David Gregory* (*Optics*, 1735), *Robert Smith* (*A Compleat System of Optics*, 4 volume, 1738), *Joseph Harris* (*A Treatise of Optics*, 1775) și popularizate prin cărțile de largă accesibilitate ale lui *James Ferguson* (*Astronomy explained upon Sir Isaac Newton's Principles, and made easy for those who have not studied Mathematics*, 1756; *Lectures on Selected Subjects in Mechanics, Hydrostatics, Pneumatics and Optics*, 1760). În anii 1655-1660 a fost depus un efort considerabil pentru perfecționarea lunetelor (telescoape de refracție) de frații *Christiaan* și *Constantin Huygens* și de italienii *Eustachio de Divini*, *Giuseppe Campani* și marele elev al lui Galilei, *Evangelista Torricelli* (prima demonstrație că o mică sferă de sticlă, așa cum se poate ușor topi în flacăra, reprezintă cea mai puternică lupă; astfel s-a putut înțelege de ce nu trebuie udate plantele în plin soare: picăturile sferice de apă concentrează energia solară în focare - situate aproape de contactul cu frunzele, pe care le ard local). Ei au realizat obiective de lunetă cu distanțe focale de 30 - 40 m, foarte bine tăiate și șlefuite, dar irizarea cauzată de deviațiile cromatice, atât de frumos studiată de Newton în experiențele sale cu lentile și prisme (*Lectiones Opticae*, 1669; disertația *A New Theory about Light and Colours*, prezentată în ședința de comunicări a Societății Regale din Londra la 6 Februarie 1672; tratatul de "*Opticks*", 1704) a împiedicat obținerea unei calități satisfăcătoare a imaginii. Celebra "*eroare a lui Newton*", privind imposibilitatea principială ca o lentilă să refracte lumina compusă din diverse culori într-un focar comun, a fost îndreptată abia în anul 1758 de opticianul londonez *John Dollond* (1706-1761), care a introdus *doubletul acromat de contact*, realizat prin alipirea unei lentile convexe de sticlă Crown de o lentilă concavă de sticlă Flint. Pentru această realizare de importanță deosebită în perfecționarea instrumentelor optice de refracție,

1758

- Dollond a primit brevet de invenție (urmașii săi și firma Dollond și Aitchison din Londra sunt activi și astăzi) și a fost onorat de Societatea Regală prin alegerea sa ca F.R.S (unde a prezentat comunicarea *An Account of some Experiments concerning the different Refrangibility of Light*, 1758). Dar ca orice descoperire, și invenția acromatului are un context și o istorie proprie. În acest caz, dubletul acromat fusese descoperit de fapt în 1733 de opticianul amator, avocat de profesie, *Chester Moor Hall* (1703-1771), care însă a reușit să practice arta sa în secret timp de 25 de ani, până când Dollond a aflat cu totul întâmplător de ea în timpul unei vizite în atelierul șlefuitorului de lentile George Bass. Întâmplarea l-a găsit însă cu totul pregătit pe Dollond, care era interesat de mai multă vreme de problema lentilei acromatice, fiind în corespondență cu marele matematician *Leonhard Euler*, preocupat și el de teoria culorilor și de compensarea aberațiilor cromatice cu ajutorul mediilor optice de dispersie opusă (*Nova theoria lucis et colorum*, Mem. Acad. Berlin, 1746) și cu *Samuel Klingenstierna* (1689-1785), profesor de matematică și fizică la Universitatea din Uppsala, membru al Academiei de Științe din Paris și al Societății Regale din Londra, care, inspirat de Euler, descoperise eroarea lui Newton și elaborase o teorie matematică a obiectivului acromat (publicată în 1760). Istoria poate deci onora pe Hall cu titlul de inventator, dar și pe Euler și Klingenstierna pentru cercetarea lor fundamentală, și pe Dollond pentru introducerea în practică curentă a acestei invenții cu mari consecințe. Problema obiectivului acromat l-a preocupat mulți ani pe Euler (membru al Academiei din Berlin, 1762), el realizând efectiv o lunetă compusă din opt lentile și calculând numeroase combinații de lentile (*Dioptrica*, 3 volume, Petersburg, 1769-1771). Dar, cercetările de dispersie a luminii prin descompunere spectrală cu ajutorul prismelor, atât de frumos lansate de Newton în anii 1670, au fost reluate abia în anul 1800. Astfel, cum am arătat, *William Herschel* (*Experiments on the Refrangibility of the invisible rays of the Sun*, Phil. Trans. Roy. Soc. 1800) descoperă *razele termice (infraroșii)* invizibile, care se reflectă și se refractă conform legii Snell-Descartes. Repetând experiența lui Herschel, dar folosind ca detector înnegrirea clorurii de argint, *Johan Wilhelm Ritter* (1776-1810) a descoperit razele ultraviolete observând că acțiunea *razelor chimice (ultraviolete)* este mai slabă în roșu dar atinge un maxim imediat după extremitatea violetă a spectrului vizibil (*Gilberts Annalen*, 7, 525, 1801). În paranteză, notăm că *prima fotografie durabilă* a fost realizată abia în anul 1826 de *Joseph Nicéphore Niépce* (1765-1833), care a folosit o cameră obscură cu lentilă convergentă și o expunere de circa opt ore pe o placă fotosensibilă dintr-un aliaj de cositor; procesul de fotografiere (negativ/pozitiv) familiar astăzi, cu înregistrarea imaginilor pe hârtie acoperită cu clorură de argint și fixată cu clorură de sodiu, a fost introdus în 1835 de *William Henry Fox Talbot* (1800-1877).
- După această scurtă digresiune, să revenim la anul 1802 în care *William Hyde Wollaston* (1766-1828) a făcut două observații remarcabile (a căror semnificație a fost înțeleasă abia peste 15 ani de Fraunhofer). Pe scurt, Wollaston, a refăcut cea mai simplă experiență cu prismă, descrisă de

Newton în felul următor: Într-o cameră foarte întunecoasă, în dreptul unui orificiu rotund făcut în oblonul unei ferestre și larg de aproximativ o treime de inch, am așezat o prismă de sticlă prin care fasciculul de lumină solară să poată fi refractat mai mult spre peretele opus al camerei și acolo să formeze o imagine colorată a Soarelui (vezi Isaac Newton, *Optica*, p. 26, ediția tradusă în limba română de prof. Victor Marian, Ed. Academiei, București, 1970). Varianta lui Wollaston (*A method of examining refractive and dispersive powers by prismatic reflection*, Phil. Trans. Roy. Soc. II, pp. 365-380, 1802) a constatat în aceea că el a privit *direct prin prismă* la o fantă îngustă puternic iluminată de Soare, observând astfel, pentru prima dată, spectrul solar brăzdat de câteva linii întunecoase (desigur, liniile de absorbție Fraunhofer). Wollaston a folosit apoi ca sursă de lumină o flacără de lumânare și a observat pentru prima dată, câteva linii strălucitoare pe un fond întunecos (adică spectrul de linii de emisie atomică, între care, desigur, și dubletul, nerezolvat, D al sodiului). Wollaston, ca și Newton cu 130 de ani înainte, se găsea, de fapt, în interiorul camerei unui mare și rudimentar spectroscop cu prismă, dar nu și-a dat seama că aici se pregătea semnarea actului de naștere al fizicii cuantice (iminentă în scala istoriei milenare a opticii). Încă un pas a mai trebuit genialului experimentator *Joseph von Fraunhofer* (1787-1826) ca să materializeze ideea celebrei experiențe a lui Newton în forma *spectroscopului modern*. Fraunhofer, nevoit încă de mic să-și câștige existența din optică și mecanică fină, studia pe atunci acromatizarea lentilelor de telescop încercând, în prealabil, acromatizarea combinațiilor de prisme din sticlele testate. Pentru a face măsurători cât mai precise asupra refringibilității razelor de diferite culori, el a folosit montajul optic, astăzi familiar, cu fasciculul paralel de lumină, limitat de o fantă fină, incident pe prisma de sticlă fixată în poziția de deviație minimă și observare a spectrului prin lunetă. Cu acest instrument minunat a descoperit Fraunhofer (*Bestimmung des Brechungs und Farbzerstreungs Vermögens verschiedener Glassorten in Bezug auf die Verrokkommung achromatischer Feruröhre*, Denkschr. der Münch. Akad. d. Wiss, 5, 193, 1817) că spectrul continuu al Soarelui este brăzdat (etalonat sui generis) de nenumărate linii spectrale fine, mai mult sau mai puțin întunecate, un marcher ideal al poziției culorii în spectru, care permite caracterizarea riguroasă a dispersiei mediilor optice (vezi exemplu, tabelul din secțiunea 1.2.7, *Aberații cromatice*) și alegerea celor mai convenabile sticle pentru construcția sistemelor optice acromatice. Aceste linii au căpătat de atunci denumirea de *linii Fraunhofer*, cele mai intense (cele mai negre în spectrul Soarelui) fiind notate cu literele alfabetului latin. Abia din acest moment, cu sticle optice de indice de refracție și dispersie precis cunoscute, a fost posibilă construcția marilor telescoape de refracție. A doua realizare

1817

1817

epocală a lui Fraunhofer constă în *invenția rețelei de difracție** (*Neue Modifikation des Lichtes durch gegenseitige Einwirkung und Beugung der Strahlen und Gesetze derselben*, Denkschrift der K. Akademie zu München, 8, 1, 1821-22), element mult mai dispersiv decât prisma optică și care, în plus, permite caracterizarea precisă a culorilor și liniilor spectrale prin lungimi de undă (teoria difracției Fraunhofer prin rețele optice a fost definitivată în 1835 de către *Friedrich Magnus Schwerd* în lucrarea de sinteză intitulată *Die Beugungserscheinungen aus den Fundamentalgesetzen der Undulationstheorie analytisch entwickelt*).

În primele experiențe el a folosit rețele din fire subțiri metalice întinse echidistant cu ajutorul a două șuruburi paralele, perioada rețelei fiind astfel egală cu pasul șurubului (rețele de circa 10 fire pe milimetru). Nemulțumit, Fraunhofer a realizat apoi rețele mult mai dese, până la 300 de linii pe milimetru, trasând cu ajutorul unei mașini de divizat cu cuțit de diamant linii echidistante pe o lamă de sticlă (procedeu folosit până în zilele noastre). Cu ajutorul acestor rețele, el a extins și precizat măsurătorile sale atât în spectrul de linii negre al luminii solare, directe sau reflectate de Lună sau Venus, observând până la 576 astfel de "linii Fraunhofer", cât și în spectrul de linii strălucitoare ale surselor de lumină terestre (flacăra, scânteia și arcul electric). În particular, el a stabilit că linia neagră D din spectrul Soarelui coincide cu linia galbenă strălucitoare caracteristică a sodiului. Și astfel, în scurta sa viață, de numai 39 de ani, Fraunhofer a introdus și instrumentele de bază ale spectroscopiei optice moderne. Ca un omagiu adus omului care a realizat primul telescop de refracție acromat de mare precizie și a demonstrat că liniile spectrale provenite de la elementele astrelor sau ale surselor terestre sunt aceleași, mormântul său din München poartă epitaful "*Approximavit Sidera*", El a apropiat stelele.

1826

Un rol important în realizarea obiectivelor acromate de diametre (deci puteri de rezoluție unghiulară, vezi ecuația (1.249)) mari l-a jucat perfecționarea tehnologiei de fabricație a sticlelor *crown* și *flint* de către opticianul elvețian *Pierre Louis Guinand* (1748-1824) prin folosirea agitatorului care asigură eliminarea bulelor de gaz și a tensiunilor și omogenizarea pastei de sticlă optică în timpul răcirii. Sticlele lui Guinand aveau următoarele compoziții: sticla crown, slab dispersivă (72%SiO₂, 18%K₂CO₃ și 10%CaO), sticla de flint, puternic dispersivă și refractivă (45%SiO₂, 12%K₂CO₃ și 43%PbO) și erau mult mai pure, mai transparente și mai omogene (fără striuri) decât până atunci. Producția lor a fost curând monopolizată de marile firme *Feil* din Paris și *Chance* din Birmingham. Cu astfel de sticle au fost construite marile telescoape de refracție, începând cu vestita lunetă cu diametrul obiectivului D = 24 cm, realizată de Fraunhofer (fostul ucenic și apoi asociatul lui Guinand) și

* De fapt, difracția luminii în mai multe ordine spectrale cu ajutorul unei rețele de fire paralele fusese remarcată încă de astronomul american *David Rittenhouse* (1785), dar simplele sale observații, ca atare, nu au avut nici-un ecou și au căzut repede în uitare. Abia *Thomas Young*, prin celebrele sale experiențe din anii 1801-1803 (vezi *Lectures on Natural Philosophy*, London, 1807) avea să demonstreze interferența undelor de lumină care provin de la surse coerente și să ne învețe cum să determinăm lungimile de undă pentru diverse culori (v. istoria opticii ondulatorii - în vol. II).

instalată la Tartu, Estonia, în 1824, la cererea astronomului *Friedrich Georg Wilhelm von Struve*, până la telescoapele refractoare cu obiective uriașe, realizate de opticianul american *Alvan Clark* (1804-1887) și instalate în marile observatoare astronomice printre care cel din Pulkovo, Rusia (D = 75cm, în 1885), din Lick, S.U.A. (D = 91 cm, în 1888) și din Yerkes, S.U.A. (D = 102 cm, în 1897). În general, realizarea sticlelor optice de înaltă calitate a dat un puternic impuls opticii instrumentale (telescopul, obiectivul fotografic, microscopul, instrumentele spectrale).

Să urmărim mai întâi progresele spectroscopiei, ale cărei baze experimentale au fost puse, cum am arătat, de Fraunhofer. Astfel, spectroscopul cu prismă a fost perfecționat de *Meyerstein* (1856, 1861), *Amici* (1860) a introdus sistemul de prisme cu viziune directă (cimentarea alternativă a unei prisme de flint între două prisme de crown sau a două prisme de flint între trei prisme de crown, în așa fel că lungimea de undă medie din spectrul vizibil apare nedeviată), *Geissler* (1856) inventează tuburile de descărcări în gaze la presiune joasă, punând astfel la dispoziție o nouă sursă de lumină pentru spectroscopia de emisie. Spectroscopia va deveni în curând cea mai fină și mai precisă metodă de investigare a proceselor intime de emisie și absorbție a luminii care au loc în sistemele atomice și moleculare, provocând o nouă revoluție în cunoașterea Universului și a structurii materiei. Astfel, pentru a cita numai câteva din suita de nume ilustre, marele teoretician *Gustav Robert Kirchhoff* (1824-1887) și abilul experimentator *Robert Wilhelm Bunsen* (1811-1899), în atmosfera științifică a orașului universitar Heidelberg, au pus *bazele analizei spectrale*, metodă ultrasensibilă pentru determinarea compoziției chimice a substanțelor terestre și cosmice (*Chemische Analyse durch Spektralbeobachtungen*, Poggendorff Annalen, 1860; *Untersuchungen über das Sonnenspektrum und Spektren der chemischen Elemente*, Abhandl. Berlin. Akad., 1861-1863). În particular, Kirchhoff, care a fundamentat matematic teoria scalară a difracției (vezi Cap. II), a explicat liniile Fraunhofer ca linii de absorbție în gazele mai reci din atmosfera solară și a stabilit celebra sa lege conform căreia *raportul dintre puterea de emisie și puterea de absorbție a corpurilor este o funcție universală de frecvență și temperatură*. *Anders Jonas Ångström* (1814-1874), un clasic al măsurătorilor spectroscopice de înaltă precizie (unitatea de lungime $1\text{\AA} = 10^{-10}$ m îi poartă numele), a determinat valoarea absolută a lungimilor de undă a 1000 de linii Fraunhofer din spectrul Soarelui (*Recherches sur le spectre normal du Soleil*, Uppsala, 1868). *Henry Augustus Rowland* (1848-1901) a inventat rețeaua concavă și a perfecționat tehnica trasării rețelelor optice de difracție până la 1700 linii pe milimetru, deschizând astfel drumul spectroscopiei de înaltă putere de rezoluție din infraroșu și vizibil până în vacuum ultraviolet (*Manufacture and Theory of Gratings for Optical Purposes*, Phil. Mag., 13, 469, 1882; *Table of the Solar Spectrum Wavelengths*, Astrophys. Jour., 1-6, 1895-1898). *Johann Jakob Balmer* (1825-1898) a formulat binecunoscuta lege a lungimilor de undă ale liniilor din spectrul vizibil al hidrogenului (*Notiz über die Spectrallinien des Wasserstoffs*, Wied. Ann., 25, 80,

1860

1863

1868

1882

- 1885). *Johannes Robert Rydberg* (1854-1919), a descoperit legea generală a frecvențelor liniilor din seriile spectrale ale hidrogenului și anume $\nu = R \left[\left(\frac{1}{m^2} \right) - \left(\frac{1}{n^2} \right) \right]$, unde apare constanta universală $R = 3,2869 \cdot 10^{15} \text{ sec}^{-1}$ care îi poartă numele (*Recherches sur la constitution des spectres d'émission des éléments chimiques*, Kongl. Svenska Vetensk. Akad. Handling, 23, 155, 1890). Pasul Următor a fost făcut de *Walter Ritz* (1878-1909) cu *principiul de combinare* conform căruia frecvența oricărei linii spectrale poate fi reprezentată în forma $\nu = T_m - T_n$, unde sistemul de numere T_i , denumite *termeni spectrali*, este caracteristic pentru sistemul atomic considerat. Semnificația acestui principiu a fost înțeleasă de *Niels Henrik David Bohr* (1885-1962), care a identificat sistemul de numere $-T_i$ cu sistemul de nivele de energie posibile E_i ale electronilor în atom, constanta de proporționalitate fiind chiar constanta h a lui Planck, adică $E_i = -hT_i$, de unde rezultă celebrul său *postulat al frecvențelor* $h\nu = E_n - E_m$ prin care a pus bazele structurii cuantice a atomilor și a interacției lor cu lumina (Phil. Mag. 26, 1, 476, 857 (1913); *The Theory of Spectra and Atomic Constitution*, Cambridge, 1922; *On the Application of the Quantum Theory to Atomic Structure*, Cambridge, 1924). Și mai profund a pătruns *Albert Einstein* (1879-1955) în mecanismul subtil al interacției luminii cu sistemele atomice prin lucrarea sa fundamentală privind procesul de *emisie stimulată* care, împreună cu procesele de emisie spontană și de absorbție i-au permis o deducere uimitor de simplă și generală a legii de distribuție a energiei radiante din spectrul corpului negru (*Zur Quantentheorie der Strahlung*, Physicalische Zeitschrift, 18, 121, 1917). Vor mai trece, însă, câteva zeci de ani până când ideile lui Einstein se vor concretiza în dispozitivele cuantice, azi atât de răspândite, care realizează amplificarea luminii prin emisia stimulată de radiație. Cum se știe, prima rază laser a țâșnit dintr-un cristal de rubin abia în iunie 1960, în laboratorul condus de *Theodore H. Maiman* (n. 1927) la Hughes Aircraft Co., Malibu, California, deschizând o nouă eră în istoria milenară a opticii (pentru o prezentare istorică detaliată vezi *Mario Bertolotti, Masers and Lasers - An Historical Approach*, Adam Hilger Ltd. Bristol, 1983). Dar revoluției opticii cuantice, declanșată în anul 1900 de către *Max Karl Ernst Ludwig Planck* (1858-1947) prin introducerea conceptului de *cuantă de lumină* și stabilirea legii radiației termice (*Über irreversible Strahlungsvorgänge*, Ann. Physik, 1, 69, 1900), îi rezervăm un loc aparte în volumul al doilea.

Să revenim la istoria opticii geometrice din momentul marcat de matematicianul, astronomul și fizicianul irlandez *Sir William Rowan Hamilton* (1805-1865) prin seria sa de lucrări *Theory of Systems of Rays*, publicate în Transactions of the Royal Irish Academy (15, 69-174, 1828; 16, 1-61, 1830; 16, 93-125, 1831; 17, 1-144, 1837) și în care, având la bază principiul lui Fermat și calculul variațional, introduce celebrele sale *funcții caracteristice* V, W, T ale sistemelor optice. Astfel, de exemplu, funcția de șase variabile V , denumită astăzi *eiconalul punctual*, este definită ca drumul optic

$$V(x, y, z; x', y', z') = \int_P^{P'} nds,$$

dintre punctul $P(x, y, z)$ din spațiul obiect și punctul $P'(x', y', z')$ din spațiul imagine, satisfăcând ecuațiile eiconalului

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 = n^2(x, y, z),$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y'}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z'}\right)^2 = n'^2(x', y', z'),$$

unde derivatele parțiale reprezintă direcția razei de lumină în punctul considerat. Cum proprietățile sistemelor optice pot fi descrise în funcție de punctele și/sau de razele (cosinuşii directori) din spațiul obiect și imagine, Hamilton a mai introdus și funcțiile caracteristice "auxiliare" W și T , denumite în terminologia modernă *eiconalul mixt* și, respectiv, *eiconalul unghiular*. Oricare din funcțiile caracteristice ale lui Hamilton caracterizează sistemul optic, utilizarea lor prezentând avantaje specifice în diversele aplicații, cum a arătat chiar el însuși pentru lentile, oglinzi și sisteme de revoluție în general, pentru propagarea în medii anizotrope și în atmosferă.

Formalismul elaborat de Hamilton pentru razele de lumină ale opticii geometrice a fost extins de el și pentru traiectoriile particulelor din dinamica clasică într-o scurtă notă intitulată *On the Application to Dynamics of a General Mathematical Method Previously Applied to Optics*, publicată în British Association Report (1834) și în articolul definitiv *On a General Method in Dynamics: by which the Study of the Motions of All Free Systems of Attracting or Repelling Points is Reduced to the Search and Differentiation of One Central Relation or Characteristic Function*, publicat, de astă dată, în revista cu cel mai înalt prestigiu și cea mai largă circulație (Phil. Trans. of the Royal Society, 1834).

1834

Metoda matematică generală și fertilă a funcțiilor caracteristice, introdusă de Hamilton în optica geometrică și în dinamică, reprezintă una din cele mai profunde descoperiri ale secolului 19. Dar, în timp ce formalismul hamiltonian din dinamică a devenit îndată bine cunoscut, grație lucrărilor lui *Karl Gustav Jacob Jacobi* (1804-1851), marea operă de optică geometrică a lui Hamilton a căzut pentru multe zeci de ani în uitare (cu excepția lui Maxwell (*On the Application of Hamilton's Characteristic Function*), Proc. London Math. Soc., 6, 117, 1875) și a lui Thiesen (Ann. d. Physik, 45, 821, 1892)). Conceptul de funcție caracteristică, sub denumirea de *eiconal*, a fost redescoperit și repus în circulație abia de către *H. Bruns* (*Das Eikonale*, K. sächs. Ges. d. wiss. Abhand. math. - phys. Kl., 21, 323-436, 1895) și, fapt extraordinar, în totală ingoranță a operei de optică a marelui său precursor, cum rezultă din propoziția de la pagina 329: "Eine ganz ähnliche Rolle, wie der

1895

Hamilton'sache Ansatz in der Mechanik, spielt nun der Eikonalebegriff auf dem allerdings weit engeren Gebiete der geometrischen Optik". Avem aici un exemplu amuzant de modul cum avansează știința prin beznă. De fapt, Bruns a parcurs drumul în sens invers, adică de la mecanica lui Hamilton și Jacobi la optica geometrică, dar pornind de la teorema lui Malus (1808) și nu de la principiul mult mai general al lui Fermat (aplicabil și în medii anizotrope). În fine, Bruns a ajuns la funcții eiconal aparent mai simple (de patru variabile) dar care reprezintă doar cazuri particulare ale funcțiilor caracteristice hamiltoniene prin intersecția congruențelor de raze cu o pereche de plane de referință ($z = 0, z' = 0$). Din acest motiv, peste o sută de ani de la crearea formalismului hamiltonian în optică (1824-1844), importanța relativă a contribuțiilor lui Hamilton și Bruns a fost încă obiectul unei dispute ascuțite între *John Lighton Synge (Hamilton's Method in Geometrical Optics, J. Opt. Soc. Amer., 27, 75, 1937; Hamilton's Characteristic Function and Bruns'Eikonal, J. Opt. Soc. Amer., 27, 138, 1937)* și *Maximillian Jakob Herzberger (On the Characteristic Function of Hamilton, the Eikonal of Bruns and Their Use in Optics, J. Opt. Soc. Amer., 26, 177, 1936; Hamilton's Characteristic Function and Bruns Eikonal, J. Opt. Soc. Amer., 27, 133, 1937)*, încheiată în favoarea primului dar cu denumirea, mai scurtă, de eiconal, păstrată. În același timp, compatrioții lui Hamilton, A. W. Conway și J. L. Synge, au editat două volume din lucrările publicate și din manuscrisele sale sub titlul *The Mathematical Papers of Sir William Rowan Hamilton*, vol. I: *Geometrical Optics* (1931) și vol. II: *Dynamics* (1940), la Cambridge University Press. De fapt, sarcina implementării și dezvoltării ideilor *opticii hamiltoniene* a revenit aproape în exclusivitate secolului nostru prin lucrările lui *T. Smith* (Trans. Opt. Soc., London, 23, 1921-1933), *G. C. Steward (The Symmetrical Optical System, Cambridge, 1928)*, *J. L. Synge (Geometrical Optics, An Introduction to Hamilton's Method, Cambridge, 1937, 1962)*, *R. K. Luneburg (Mathematical Theory of Optics, Berkeley, 1964)*, *M. J. Herzberger (Modern Geometrical Optics, Interscience, 1968)*, *H. A. Buchdahl (An Introduction to Hamiltonian Optics, Cambridge, 1970)*, *O. N. Stavroudis (The Optics of Rays, Wavefronts and Caustics, Academic Press, 1972)*, *T. Sekiguchi și K. B. Wolf (The Hamiltonian Formulation of Optics, Am. J. Phys., 55, 830, 1987)* și alții.

În general, orice sistem a cărui evoluție este guvernată de ecuațiile lui Hamilton (vezi secțiunea 1.1.2, ecuația (1.64)) are multe proprietăți remarcabile cum este, de exemplu, *teorema lui Liouville*, conform căreia elementele de volum în spațiul fazelor se conservă. Să considerăm, pentru simplitate, problema optică unidimensională, cu traiectoria $x(z)$ și direcția de propagare $p_x(z)$ a razei, astfel că elementul de volum din spațiul fazelor devine elementul de arie $dx.dp_x$. Această arie elementară reprezintă un fascicul îngust de raze de lumină care trec printre punctele x și $x + dx$ și au direcția de propagare între p_x și $p_x + dp_x$. Conform teoremei lui Liouville, această arie se conservă de-a lungul traiectoriei astfel că, luând două puncte oarecare ale acesteia $P_1(z_1)$ și $P_2(z_2)$, avem $dx_1.dp_{x1} = dx_2.dp_{x2}$, cum

este ilustrat în fig.A.5. Cu ajutorul unui sistem optic putem, de exemplu, să obținem o lățime dx_2 mai mică dar cu o împrăștiere dp_{x_2} a direcțiilor razelor mai mare, sau invers. Această proprietate fundamentală a spațiului fazelor este o consecință directă a teoremei lui Liouville și reprezintă esența relațiilor de incertitudine în optica ondulatorie și în mecanica cuantică. În general, formalismul hamiltonian a deschis drumul spre o analogie profundă între optică și mecanică, reprezentând totodată un instrument puternic pentru descrierea duală, prin traiectorii și undele asociate, a fenomenelor naturii. Cum se știe, relevanța sa contemporană este legată de

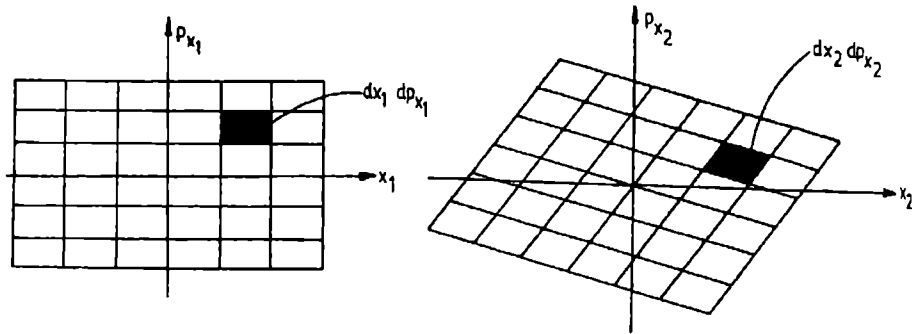


Fig.A.5. Ilustrarea conservării elementului de arie (teorema lui Liouville).

formularea mecanicii cuantice și de reprezentările mișcării la scară microscopică.

Ultimele decenii au marcat o seamă de rezultate teoretice noi prin care domeniul clasic al opticii geometrice a fost considerabil extins. Astfel, *J. Keller* și colaboratorii săi (*Appl. Phys. Letters*, 28, 426, 1957; *J. Opt. Soc. Amer.*, 52, 2, 1962) dezvoltă o teorie geometrică a difracției pornind de la generalizarea invariantului lui Descartes. Rezultatele obținute constituie un progres net față de teoria lui Kirchhoff (1883), a cărei valabilitate este limitată la distanțe mari ($\gg \lambda$) față de planul aperturii pe care are loc difracția (vezi Cap. II). Pornind pe o cale opusă, *K. Miyamoto și E. Wolf* (*J. Opt. Soc. Amer.*, 52, 615, 626, 1962) dezvoltă ideile lui *B. B. Baker și E. T. Copson* (*The Mathematical Theory of Huygens' Principle*, Oxford, 1939) și *A. Rubinowicz* (*Die Beugungswelle in der Kirchhoffschen Theorie der Beugung*, Warsaw, 1957), ajungând la concluzia că integrala lui Kirchhoff pe suprafața aperturii poate fi pusă sub forma unei integrale de linie pe conturul acesteia. Se restaurează astfel explicația inițială dată de Thomas Young figurilor de difracție, care considera că acestea reprezintă interferența unei primare incidente cu undele secundare generate de conturul aperturii. *M. Kline și I. W. Kay* (*Electromagnetic Theory and Geometrical Optics*, Interscience, 1965) continuă opera lui *R. K. Luneburg* (*Mathematical Theory of Optics*, Berkeley, 1964) elaborând metode aproximative care leagă teoria electromagnetică a luminii de optica geometrică și teoria difracției. În cartea noastră, pentru simplitate, am preferat să pornim de la ecuația scalară a undelor armonice, atât pentru deducerea ecuației eiconalului, conform demonstrației lui *Arnold Sommerfeld* și *Iris Runge* (*Anwendung der*

1911

Vektor-rechnung auf die Grundlagen der Geometrischen Optik, Ann. d. Physik, 35, 277, 1911), cât și pentru prezentarea teoriei scalare a difracției a lui *Gustav Robert Kirchhoff* (*Zur Theorie der Lichtstrahlen*, Ann. d. Physik, 18, 663, 1883). Mai recent, *P. Hillion* (J. Optics, 10, 11, 1979), prin liniarizarea ecuației eiconalului, a dezvoltat o teorie care permite descrierea câmpurilor optice polarizate. O altă direcție a fost marcată de *D. Gloge și D. Marcuse* (J. Opt. Soc. Amer., 59, 1629, 1969) care pornesc de la principiul lui Fermat și realizează o cuantificare a razelor de lumină, demonstrând, pe această cale, că fasciculele gaussiene sunt asociate unor pachete de undă de împrăștiere minimă. Aceste idei au fost amplu dezvoltate prin aplicarea metodelor de grupuri și algebre Lie în optică (*Lie Methods in Optics*, editori J. Sánchez-Mondragón și K. B. Wolf, în Lecture Notes in Physics, vol. 250, Springer, 1986), metode folosite cu succes și în mecanica cuantică. Formalismul hamiltonian se dovedește astfel a fi capabil să descrie proprietățile geometrice, ondulatorii și cuantice, rădăcinile sale adânci constând în geometria simplctică a spațiului fazelor (*J. Sniatycki, Geometric Quantization and Quantum Mechanics, Springer, 1980; V. Guillemin și S. Sternberg, Symplectic Techniques in Physics, Cambridge, 1984*). Remarcăm, în fine, succesele recente ale aplicării grupurilor Lie în studiul aberațiilor geometrice de ordin superior.

În timp ce Hamilton reînvia înseși bazele opticii teoretice, modelând optica geometrică și mecanica clasică în cadrul preluat, peste o sută de ani, de mecanica cuantică, progrese considerabile erau realizate în domeniul opticii instrumentale și experimentale. Astfel, *L. Schleiermacher* a inițiat teoria vignetei și a propus metoda celor mai mici pătrate pentru optimizarea parametrilor sistemelor optice (*Über den Gebrauch der analytischen Optik*, Poggendorff Annalen, 14, 1828; *Analytische Optik*, Darmstadt, 1842). Marii matematicieni Cauchy și Gauss au continuat opera de optică a lui Euler care, cum am arătat mai înainte, s-a străduit mulți ani ca să compenseze dispersia culorilor într-un ansamblu de lentile. Astfel, *Augustin Louis Cauchy* (1789-1857) a izbutit să dea o primă bună aproximație a formulei de dispersie în medii transparente, în *Mémoire sur la dispersion de la lumière*, 1836 (vezi și secțiunea 1. 2. 7, rel. (1.262)) și a introdus indicii de refracție complexi pentru a explica reflexia metalică (vezi vol. II). *Karl Friedrich Gauss* (1777-1855) a efectuat cercetări sistematice ale proprietăților sistemelor optice centrate traversate de raze paraxiale, introducând noțiunile de plane conjugate și plane principale, care au facilitat considerabil studiul instrumentelor complexe (*Dioptrische Untersuchungen*, 1843). *Giovani Battista Amici* (1786-1863) a folosit proprietatea de aplanetism a punctelor Wierstrass pentru construcția obiectivelor de microscop de mare apertură numerică (Ann. de chim. et phys., 12, 117, 1844) și a introdus metoda imersiei (vezi și secțiunea 1. 2. 1, fig.1.24). *James Clark Maxwell* (1831-1879) a contribuit la optica geometrică cu exemplul clasic de instrument optic perfect realizat cu distribuția "ochi de pește" - vezi secțiunea 1. 3. 3 (Cambridge and Dublin Mathematical Journal, 8, 188, 1854; Quart. Journ. of Pure and Applied

1843

1854

- 1865** Mathematics, 2, 233, 1858; pentru generalizări interesante, inclusiv lentilele Luneburg, vezi R. Stettler, *Optik*, 12, 529, 1955). Profunzimea operei lui Maxwell poate fi comparată doar cu cea a lui Newton și a lui Einstein. Cum se știe, geniului marelui fizician scoțian îi datorăm teoria electromagnetică și ecuațiile care-i poartă numele (*A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field*, Phil. Trans. Roy. Soc. London, 155, 459, 1865; *A Treatise on Electricity and Magnetism*, Oxford, 1873), prima mare unificare a fenomenelor electrice, magnetice și optice, unul din cele mai mari triumfuri intelectuale ale tuturor timpurilor. Interpretăm aici celebra relație $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ cu propriile cuvinte ale lui Maxwell: "The velocity of the transverse undulations in our hypothetical medium, calculated from the electromagnetic experiments of M. M. Kohlrausch and Weber (n.n. 1856), agree so exactly with the velocity of light calculated from the optical experiments of M. Fizeau (n.n. 1849), that we can scarcely avoid the inference that light consists in the transverse undulations of the same medium which is the cause of electric and magnetic phenomena" și " ... we have strong reason to conclude that light itself is an electromagnetic disturbance in the form of waves propagated through the electromagnetic field according to electromagnetic laws". Curând (1888), **1888** *Heinrich Rudolf Hertz* (1857-1894) a încununat opera lui Maxwell prin descoperirea undelor radio (care se propagă cu aceeași viteză, se reflectă, refractă, interferă, difractă și se polarizează ca și lumina obișnuită), confirmând definitiv ipoteza că lumina și undele electromagnetice au aceeași natură. Teoriei electromagnetice a luminii și aplicațiilor sale le vom dedica o mare parte din volumul al doilea al cărții noastre.
- Dacă Fraunhofer a deschis drumul corectării precise a aberațiilor cromatice și construcției obiectivelor telescopice refractoare moderne încă din anul 1817, problema aberațiilor geometrice avea să-i aștepte pe Seidel și Petzval până în anii 1856-1857. Între timp, cum am văzut, Gauss (1843) a dat o formă elegantă teoriei de ordinul întâi, în care invariantul lui Descartes $n \cdot \sin\theta$ se scrie simplu $n \cdot \theta$, ceea ce implică un fascicul îngust de raze în jurul axului optic ($\theta \leq 0,1$ radiani $\cong 6^\circ$). Sub impulsul invenției și perfecționării aparatelor și tehnicilor fotografice (Niépce, 1826; Talbot, 1835; Daguerre, 1839; E. Becquerel și Draper, 1842; Foucault și Fizeau, 1845; Bond, 1850; De la Rue, 1860; Cros și Ducos du Haron, 1868; Eastmann, 1888; Lippmann, 1893; și mulți alții) apare noua sarcină de realizare a obiectivelor cu apertură și câmp de vedere mare și, în consecință, de extensie a teoriei sistemelor optice în domeniul extraparaxial. Evident, o aproximație mai bună avem dacă reținem primii doi termeni din dezvoltarea $\sin\theta = \theta - (1/3!)\theta^3 + (1/5!)\theta^5 - (1/7!)\theta^7 + \dots$, adică în cadrul unei teorii de ordinul al treilea. Abaterea care rezultă în acest caz de la teoria de ordinul întâi va conduce (vezi secțiunea 1. 2. 8) la cele cinci aberații primare (aberația sferică, coma, astigmatismul, curbura câmpului și distorsia), denumite și aberațiile lui Seidel, după numele lui **1843** *Ludwig von Seidel* (1821-1896), care le-a studiat sistematic pentru prima dată (*Zur Dioptrik, über die Entwicklung der Gliedern 3-ter Ordnung*, Astron. Nachr., 43, 289, 305, 321, 1856). Ulterior analiza lui Seidel a fost
- 1856**

simplificată de mulți autori (în cartea noastră, de exemplu, am preferat metoda sugerată în notele, nepublicate, ale lui Edward L. O'Neill) și extinsă, prin diverse tehnici, la studiul aberațiilor geometrice de ordin superior. Cum am arătat, lentila convergentă simplă a fost folosită de mult la camera obscură (vezi della Porta, 1589) ca și la realizarea primei fotografii (Niépce, 1826), dar primele dagherotipii erau deja realizate cu un obiectiv dublet acromat (Chevalier, 1830). Timpii de expunere erau însă foarte mari din cauza diafragmării puternice, necesară pentru atenuarea aberațiilor geometrice. În particular, spre deosebire de telescoapele obișnuite, curbura câmpului și distorsia nu mai pot fi tolerate la un bun obiectiv fotografic. Primul mare succes teoretic și practic a fost obținut de *Josef Max Petzval* (1807-1891), care a studiat în detaliu aberația de curbură a câmpului, a dedus condiția de aplatizare a imaginii (vezi secțiunea 1. 2. 8, ecuația (1.320) și a realizat, pe bază de calcule prealabile, obiectivul fotografic rapid pentru portrete (*Bericht über die Ergebnisse einiger dioptrischer Untersuchungen*, Pesth, 1843; *Bericht über optische Untersuchungen*, Ber. Keis. Akad. Wien, Math. - naturwiss. Kl. 24, 50, 92, 129, (1857)). *Obiectivul "aplanat"* al lui Petzval, compus din doi dubleți separați, caracterizat prin luminozitate mare dar câmp vizual mic, a fost perfecționat de Steinheil (1860) și Dallmeyer (1866) care, făcând dubleții separați simetrici, au eliminat și aberația de distorsie, măbind totodată foarte mult și câmpul de vedere.

1859

O altă realizare remarcabilă din această perioadă constă în descoperirea *metodei "schlieren"* sau "*knife - edge*" (vezi § 1. 3) de către *L. Foucault* (*Mémoire sur la construction des télescopes en verre argenté*, Ann. de l'Observatoire Imp. de Paris, 5, 197, 1859) și, în mod independent, de *A. Töpler* (*Beobachtungen nach einer neuen optischen Methode*, Bonn, 1864; Pogg. Ann. Physik u. Chem., 127, 556, 1866).

1865

Înainte de a trece la "momentul Abbe" vom mai nota câteva acumulări de seamă din istoria opticii secolului 19. Astfel, marele astronom *Sir George Biddell Airy* (1801-1892) a fost probabil primul care a corectat astigmatismul, folosind o lentilă sfero-cilindrică pentru ameliorarea propriului astigmatism miopic (1825). Amplificarea în practica oftalmologică curentă a acestei metode va avea loc însă abia după anul 1862, an în care olandezul *Franciscus Cornelius Donders* (1818-1889) a publicat tratatul său privind lentilele cilindrice și astigmatismul. Airy a studiat în detaliu formarea imaginilor prin telescop și precizia observațiilor astronomice. Din cele peste 500 de publicații ale sale, de importanță deosebită pentru stabilirea limitei de aplicabilitate a opticii geometrice și puterea de rezoluție a instrumentelor optice este lucrarea în care a calculat difracția Fraunhofer pe apertură circulară (*On the Diffraction of an Object Glass with Circular Aperture*, Trans. Cambridge Phil. Soc., 5, 283, 1835). Maximul central, în care este concentrată 83,9% din energia difractată, reprezintă un spot strălucitor circular (*discul lui Airy*) de rază unghiulară γ dată de celebra formulă (vezi Cap. II, ecuația (2.204))

1835

$$\sin \gamma = 1,22 \frac{\lambda}{D}.$$

De numele său sunt legate de asemenea teoria ondulatorie a curcubeului, (vezi *F. Uliu, Curcubeul - De la mit la adevăr*, Ed. SITECH, Craiova, 1994) ca și funcția lui Airy din teoria interferenței multiple (vezi secțiunea 2. 8. 5 și vol. II).

Lord Rayleigh, John William Strutt (1842-1919) a fost primul care a introdus un criteriu practic și simplu ($\gamma_{\min} = 1,22\lambda/D$, vezi cap. II, secțiunea 2. 8. 2) pentru a caracteriza puterea de rezoluție a instrumentelor optice, pentru surse de lumină necoerente (*Investigations in Optics with special reference to Spectroscopy*, Phil. Mag., 8, 261, 1879). În fine, mai notăm cele două criterii simple de stigmatism (vezi cap. I, secțiunea 1. 1. 3, ecuația (1.98) și ecuațiile (1.102), respectiv (1.112)) și anume *condiția de stigmatism axial*, dedusă de *Sir William Herschel* (Phil. Trans. Roy. Soc., 111, 226, 1821) și *condiția de stigmatism transversal*, dedusă mai întâi de unul din creatorii termodinamicii, *Rudolf Julius Emanuel Clausius* (Pogg. Ann., 121, 1, 1864) și de marele fiziolog și fizician *Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz* (Pogg. Ann. Jubelband, 557, 1874) din considerații termodinamice. Importanța ultimei condiții pentru proiectarea sistemelor optice a fost însă sesizată abia după redescoperirea ei de către *Ernst Karl Abbe* (Jenaische Ges. Med. u. Naturwiss., 129, 1879).

Ultima treime a secolului 19 este dominată de personalitatea fizicianului optician *Ernst Karl Abbe* (1840-1905), profesor la Universitatea din Jena, care, în strânsă colaborare cu constructorul de microscopie *Carl Zeiss* (1816-1888) și chimistul specializat în sticle optice *Otto Schott* (1851-1935), a pus bazele teoretice, tehnice și tehnologice ale microscopiei optice moderne (vezi Ernst Abbe: *Beiträge zur Theorie des Mikroskops und der mikroskopischen Wahrnehmung*, Arch. f. mikr. Anat., 9, 413, 1873; *Die optischen Hilfsmittel der Mikroskopie*, Braunschweig, 1878; *Gesammelte Abhandlungen*, Gustav Fisher, Jena, 3 volume, 1904-1906. O expunere generală a teoriei lui Abbe a instrumentelor optice a fost publicată de colaboratorul său S. Czapski, *Theorie der optischen Instrumente*, 1893; vezi și S. Czapski, O. Eppenstein, *Grundzüge der Theorie der Optischen Instrumente nach Abbe*, J. A. Barth, Leipzig, 1924). Pentru a ilustra impactul acestor realizări, amintim că cercetările de microbiologie și bacteriologie ar fi fost imposibile fără microscopie cu puterea de rezoluție până la limita teoretică de difracție. Ca și Fraunhofer în timpul său, Abbe a reprezentat o combinație unică de geniu științific, proiectant și inventator, demonstrând în mod strălucit interacția fertilă dintre știința pură și aplicată. Spre deosebire, însă, de obiectivele de telescop și fotografice, realizarea microscopelor de performanță a întârziat datorită dificultăților întâmpinate în șlefuirea, cu toleranțe controlabile, a lentilelor mici, în îmbunătățirea substanțială a sticlelor optice pentru acromatizare și în înțelegerea fenomenelor de difracție inerente observării microobiectelor cu sisteme corect calculate din astfel de lentile. Istoria momentului Abbe-Zeiss-Schott poate fi rezumată în următoarele evenimente:

1846, Carl Zeiss este mecanic și lector la Universitatea din Jena și, la sugestia biologului J. Schleiden (1804-1881), începe să construiască microscop.

1861, Carl Zeiss este distins cu medalia de aur la Expoziția Industrială din Turingia pentru microscopul său de bună calitate, dar realizat după metoda empirică, tradițională, de încercare și eroare.

1866, Carl Zeiss și cei douăzeci de oameni din micul său atelier din Jena produsese circa o mie de astfel de microscop, în condițiile unei grele concurențe cu firma Hartnack din Paris, care realizase, încă din 1859, obiective cu imersie în apă. Zeiss începe să colaboreze cu Abbe, pe atunci lector la Universitatea din Jena, pentru a pune construcția microscopului pe baze științifice. Abbe și-a concentrat mai întâi eforturile pentru construcția și introducerea în atelierul lui Zeiss a numeroase instrumente de măsură și control, de precizie:

1867, focometrul lui Abbe, pentru măsurarea distanțelor focale ale obiectivului și a lentilelor sale componente;

1869, refractometrul lui Abbe, publicat în *Jenaische Ges. Med. u. Naturwiss*, 8, 96, 1874, pentru determinarea indicilor de refracție ai probelor de sticlă și de lichide din măsurători ale unghiului limită de reflexie totală; în același an, condensorul lui Abbe, pentru iluminarea probelor pentru orice apertură unghiulară γ_1 în intervalul maxim posibil ($\pm 90^\circ$);

1870, apertometrul lui Abbe, pentru determinarea *aperturii numerice* $AN = n_1 \sin \gamma_1$ a obiectivelor de microscop, unde n_1 este indicele de refracție al mediului de imersie (aer, apă, ulei etc.) dintre obiect și lentila frontală a obiectivului iar γ_1 este unghiul dintre raza marginală și axul optic. Conceptul de apertură numerică a fost introdus de Abbe deoarece, după numeroase experiențe, a stabilit că această mărime controlează strălucirea imaginii și puterea de rezoluție a obiectivelor de microscop (plane conjugate apropiate), spre deosebire de *numărul f* $f = f/D$, care este mărimea relevantă când obiectele sunt îndepărtate (telescop, obiectiv fotografic). Abbe a demonstrat, mai întâi experimental, apoi pe baza teoriei de difracție, că distanța minimă $(\delta r_1)_{\min}$ dintre două puncte obiect care mai pot fi rezolvate în imagine (adică inversul puterii de rezoluție spațială) este proporțională cu λ_0 și invers proporțională cu AN (vezi secțiunea 1.2.1, ecuația (1.123)). Consecința imediată a acestor cercetări a fost aceea că, începând din anul 1872, firma Zeiss va deveni vestită prin performanțele microscopului său, primele bazate pe o teorie corectă și precalcul matematic. Abbe devine partenerul lui Zeiss (1875).

1871, Abbe publică studiile sale privind intensitatea luminii din instrumentele optice, în care elaborează teoria diaframelor și pupilelor (*Jenaische Ges. Med. u. Naturwiss.*, 6, 263, 1871). Aceste cercetări vor fi extinse mai târziu de *M. von Rohr* (*Zentr. Ztg. Opt. u. Mech.*, 41, 145, 159, 171 (1920)).

1873, publică lucrarea sa fundamentală "*Contribuții la teoria microscopului și a percepției microscopice*" (op. cit.) în care pune, pentru prima dată, *bazele teoriei de difracție a formării imaginilor*. O astfel de

1873

teorie s-a impus cu necesitate în cazul observării micro-obiectelor cu detalii de ordinul lungimii de undă, când contribuția luminii difractate nu mai poate fi neglijată. Pentru a ilustra teoria lui Abbe, să considerăm un astfel de obiect de forma unei aperturi circulare P_1P_2 , iluminat de o undă plană incidentă normal pe planul obiectului (vezi fig. A.6).

Undele difractate de obiect sunt mai întâi focalizate de sistemul obiectiv în planul său focal posterior, unde formează figura de difracție Fraunhofer corespunzătoare, cu maximele (spectrale) de diverse ordine în $S_0, S_{\pm 1}, S_{\pm 2}$ ș. a.

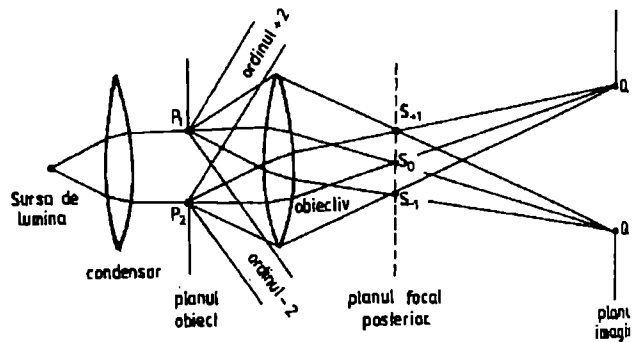


Fig. A.6. Teoria lui Abbe a formării imaginii în microscop (apertură circulară).

m. d., apoi se propagă mai departe, interferează și în final, formează imaginea inversată a obiectului în planul imagine al obiectivului. Acum este evident că, pentru a obține o imagine cât mai fidelă, este necesar ca apertura unghiulară γ_1 (mai general, apertura numerică $AN = n_1 \sin \gamma_1$) a obiectivului să fie cât mai mare pentru ca la formarea imaginii să-și aducă contribuția cât mai multe spectre (frecvențe spațiale). În acest mod a explicat Abbe celebra sa formulă a limitei teoretice de rezoluție spațială $(\delta r_1)_{\min} = C \cdot \lambda_0 / (n_1 \sin \gamma_1)$ unde constanta C este de ordinul unității ($C = 0,82$ pentru iluminarea coerentă și $C = 0,61$ pentru iluminarea necoerentă, v. cap. II sau, mai detaliat, *M. Born, E. Wolf, Principles of Optics*, Pergamon, 1986, p. 418-424). Cum am arătat, grosismentul util al microscopului este limitat de rezoluția spațială a obiectivului și a ochiului observatorului (vezi cap. I, secțiunea 1.2.5), ocularul servind numai pentru a prezenta ochiului, sub un unghi de vedere convenabil, imaginea (intermediară) formată și rezolvată de obiectiv. Abbe și-a confirmat teoria prin numeroase experiențe ingenioase (vezi și K. Michel, *Die Grundlagen der Theorie des Mikroskops*, Stuttgart, 1950; K. Kranje, *Simple Demonstration Experiments in the Abbe Theory of Image Formation*, Am. J. Phys., 30, 342, 1962), a căror dezvoltare a condus pe urmașii săi la multe descoperiri importante cum este, de exemplu, *metoda contrastului de fază*, elaborată de fizicianul olandez *Frits Zernike* (1888-1966) în anii 1932-1934 și pentru care acesta a fost onorat cu premiul Nobel pentru fizică, în anul 1953 (F. Zernike, *Beugungstheorie der Schneidenverfahrens und seiner verbesserten Form, der Phasenkontrastmethode*, Physica, 1, 689, 1934; Zs. Tech. Phys., 16, 454, 1935; Phys. Zs., 36, 848, 1935; Physica, 9, 686, 974, 1942; *How I Discovered Phase Contrast*, Science, 121, 345, 1955; pentru prezentarea detaliată a metodei contrastului de fază v. M. Françon, *Le contrast de phase en optique et en microscopie*, Paris, Revue d'Optique, 1950; A. H.

1935

Bennett, H. Jupnik, H. Osterberg, O. W. Richards, *Phase Microscopy*, New York, Wiley, 1952). Zernike însuși a calificat metoda sa ca o aplicație logică a teoriei lui Abbe cu privire la formarea imaginii în microscop pentru obiecte transparente de grosime optică neuniformă (*obiecte de fază*), cum sunt frecvent întâlnite în biologie și cristalografie, obiecte care modifică numai faza dar nu și amplitudinea undei incidente. Ideea metodei lui Zernike constă în plasarea unei plăci transparente subțiri (*placa de fază*) în planul focal posterior al obiectivului astfel că faza ordinului central S_0 este avansată sau retardată cu $\pi/2$ față de celelalte ordine de difracție și, în consecință, imaginea invizibilă a obiectului de fază (transparent) devine vizibilă (contrastată), ca și a unui obiect de amplitudine (absorbant); diferențele de fază din obiectul de fază sunt transformate astfel în diferențele corespunzătoare de strălucire sau intensitate ale imaginii. Deoarece planul focal posterior al obiectivului este, de regulă, localizat în interiorul sistemului de lentile care îl compun, placa de fază este "incorporată" în obiectiv. Rezonanța actuală a teoriei lui Abbe este profundă și fertilă, exemplul microscopului permițând sesizarea conceptului de *filtraj spațial*, înțelegerea semnificației transformărilor Fourier în formarea imaginilor și dezvoltarea unui nou domeniu al opticii, optica Fourier și prelucrarea optică a informației.

1879

1879, Abbe stabilește forma generală a condiției necesare de aplanetism sau *condiția de sinus* care îi poartă numele (op. cit.), suplimentată ulterior cu condiția de izoplanetism de către *F. Staebble* (Münchener Sitz. - Ber., 183, 1919) și *E. Lihotzky* (Wiener Sitz. - Ber., 128, 85, 1919), condiții care reprezintă criteriile majore de corecție în proiectarea sistemelor optice moderne.

1879, Abbe introduce obiectivul acromat (pentru două lungimi de undă) cu imersie omogenă (ulei), având o apertură numerică $AN = 1,25$. Perfecționarea mai departe a acestor obiective impunea însă producerea unor noi tipuri de sticlă, care să permită combinații de sticlă de indice de refracție mic și dispersie mare cu sticlă de indice de refracție mare și dispersie mică. Din fericire, în anul 1879, Abbe își găsește partenerul ideal pentru rezolvarea problemei noilor sticle în persoana chimistului *Otto Schott*, împreună cu care, după câțiva ani de mari eforturi, va reuși să construiască celebrele sale *obiective apocromate*, care satisfac condițiile de acromatizare pentru trei culori și condiția de sinus (aplanetism) pentru două culori (Jenaische Ges. Med. u. Naturwiss., 1886). Obiectivul apocromat al lui Abbe (obiectiv cu imersie, compus din zece lentile, $f = 2\text{ mm}$, $AN = 1,4$), livrat de firma Zeiss începând din anul 1886, va deschide o nouă epocă în observațiile vizuale cele mai fine și în microfotografie, puterea sa de rezoluție atingând limita teoretică de difracție.

1886

1884, se înființează întreprinderea de sticlă "Jenaer Glaswerke Schott und Genossen" care, în 1886, deja producea 44 de tipuri de sticlă optică, de calitate și varietate nemaiîntâlnită până atunci.

1889

1889, Abbe prezintă obiectivul său acromat de cea mai înaltă performanță, cu imersie în monobrom-naftalen ($AN = 1,6$).

1889, după moartea lui Carl Zeiss (1888), Abbe rămâne singurul proprietar al firmei și înființează Fundația Carl Zeiss pentru cercetări științifice și îmbunătățiri sociale (Carl Zeiss Stiftung), devenind un mare pionier și în domeniul reformelor sociale.

În afară de cele enumerate, multe alte dispozitive și instrumente de precizie sunt legate de numele lui Abbe, cum sunt spectrometrul lui Abbe (pe principiul autocolimării), pentru determinarea rapidă a indicelui de refracție și dispersiei sticlelor (1874), interferometrul lui Abbe, de testare comodă a plăcilor plan-paralele (1885), ocularele de proiecție pentru microfotografie (1886), sistemul de iluminare cu oglindă și lentile cunoscut sub numele de condensorul lui Abbe (1886), microscopul comparator (1891), o versiune îmbunătățită a dilatometrului interferențial al lui Fizeau pentru determinarea coeficienților de dilatare termică a sticlelor (1893), sistemul lui Abbe cu prisma Porro pentru inversarea imaginii în telescoape terestre (1895), dezvoltă în cadrul firmei Zeiss noile secții de telemetrie binoculară, de obiective fotografice și de telescoape astronomice. Mai departe, Abbe își dezvoltă ideile prin colaboratorii săi apropiați dintre care amintim pe *Carl Pulfrich* (1858-1927), inventatorul stereocomparatorului, stereolocatorului și fotometrului care îi poartă numele, și pe *P. Rudolph* care, prin invenția "anastigmatelor" (1890), a marcat nașterea obiectivelor fotografice moderne (cum este, de exemplu, binecunoscutul obiectiv Tessar, creat de el în 1902). Pentru o descriere mai detaliată a numeroaselor realizări ale lui Abbe în optică vezi M. von Rohr *Ernst Abbe*, Fischer Verlag, Jena, 1940; N. Guenther, *Ernst Abbe, Schöpfer der Zeiss - Stiftung*, Fischer Verlag, Stuttgart, 1951; F. Schomerus, *Werden und Wessen der Carl Zeiss-Stiftung*, Fischer Verlag, Stuttgart, 1955; H. Volkmann, *Ernst Abbe and his Work*, Appl. Optics, 5, 1720, 1966; *Jenaer Rundschau (Jena Review)*, No. 3, 1973, număr dedicat aniversării a 100 de ani de la elaborarea de către Abbe a bazelor teoretice și practice ale microscopiei optice moderne.

Dintre diferitele metode de iluminare a obiectelor transparente mai amintim condensorul lui A. Köhler (Zs. f. wiss. Mikroskopie, 10, 433, 1893; 16, 1, 1899), iluminarea critică (F. Zernike, Physica, 5, 794, 1938) și, în ultimul timp, condensoarele asferice cu numere f foarte mici care asigură o mare densitate de flux luminos pe obiect (vezi lentilele asferice prezentate în Cap. I, secțiunea 1.1.3).

Cele mai mari contribuții la dezvoltarea opticii geometrice fundamentale din secolul nostru au fost aduse de *Alvar Gullstrand* (*Allgemeine Theorie der monochromatischen Aberrationen*, Acta Reg. Soc. Sci. Uppsala, 3, 1900; *Die reele optische Abbildung*, Svenska Vetensk. Handl., 41, 1, 1906; *Tatsachen und Fiktionen in der Lehre der optischen Abbildung*, Arch. Optik, 1, 1, 81, 1907; *Das allgemeine optische Abbildungssystem*, Svenska Vetensk. Handl., 55, 1, 1915), *Thomas Smith* (*On Tracing Rays through an Optical System*, Proc. Phys. Soc. London, 28, 502, 1915; 30, 221, 1918; 32, 252, 1920; 33, 174, 1921; 57, 286, 1945), *H. Boegehold* (*Über die Entwicklung der Theorie der optischen Instrumente seit Abbe*, Ergeb. d. exakt. Naturwiss., 8, 1929;

Raumsymmetrische Abbildung, Z. Instrumentenk., 56, 98, 1936), M. Hertzberger (*Strahlenoptik*, Springer, Berlin, 1931; *Modern Geometrical Optics*, Interscience, New York, 1968) și G. Slusarev (*Metodi di calcolo dei sistemi ottici*, Firenze, 1943; *Geometricheskaya optika*, Moskva, 1946). Pentru contribuțiile sale în domeniul oftalmologiei (astigmatismul și formele anormale ale corneei, lentile de corecție după îndepărtarea cristalinului cataractic), Gullstrand a fost distins cu premiul Nobel pentru fiziologie și medicină (1911). Prin introducerea metodelor de algebră matriceală în trasarea razelor (ray tracing) și proiectarea instrumentelor optice, T. Smith a devenit unul din marii profesori ai generației următoare de opticieni. În prima lucrare (op. cit.), Boegehold face o sinteză a celor mai importante realizări în optica geometrică din primii 30 de ani ai secolului nostru. Herzberger aplică la optica geometrică ideile fundamentale ale lui Hamilton (vezi și controversa sa creatoare cu Synge) și dezvoltă modele matematice pentru sistemele optice. Slusarev face o amplă analiză a aberațiilor Seidel și a metodelor de calcul optic. În fine, în anii 40-50 ai secolului nostru, mai reamrăm elaborarea teoriei de difracție a aberațiilor de către B. R. A. Nijboer, F. Zernike și N. G. van Kampen (vezi M. Born și E. Wolf, *Principles of Optics*, Pergamon, 1986, cap. IX).

Cum am arătat, noile sticle optice introduse de Schott (cum este, de exemplu, sticla crown cu stabilizator de oxid de bariu (BaO), introdus în compoziție sub formă de nitrat $(\text{Ba}(\text{NO}_3)_2)$ sau carbonat (BaCO_3) de bariu, având indice de refracție mare și dispersie mică) au revoluționat corectarea sistemelor dioptrice de aberații cromatice și geometrice. Astfel, la baza obiectivelor fotografice de astăzi stau *anastigmaticele* lui P. Rudolph (firma Zeiss) și H. D. Taylor (firma Cooke), sisteme acromatizate caracterizate prin corectarea curbării câmpului, astigmatismului și comei pentru câmpuri unghiulare mari, și perfecționate mai departe de Wandersleb, Merté, Bertele, Zollner, ș. a. Pentru prezentări mai ample vezi W. Merté, R. Richter, M. von Rohr, *Das photographische Objectiv*, Springer 1932; E. Wandersleb, *Die Lichtverteilung im Grossen im der Brennebene des photographischen Objectivs*, Akademie Verlag, Berlin, 1952; J. Flügge, *Das photographische Objectiv*, Springer, 1955.

În zilele noastre, proiectarea sistemelor dioptrice a devenit din ce în ce mai mult o problemă de automatizare în care metodele matriceale joacă un rol important. Astfel, se pot scrie programe care fac posibilă proiectarea automată, de la simpla trasare a razelor și până la proiectarea sistemelor de cea mai înaltă performanță, în care sunt corectate aberațiile de ordinul trei, patru și chiar mai înalt. Pentru introducere, vezi D. P. Feder, *Automatic Optical Design*, Applied Optics, 2, 1209, 1963.

Marea majoritate a sistemelor de lentile și oglinzi au suprafețe sferice, ușor de fabricat cu precizia optică necesară (toleranțe $\ll \lambda$), dar care pun problema corectării aberațiilor inerente. Există însă și instrumente optice de înaltă performanță care conțin elemente cu suprafețe asferice (carteziene, toroidale, cilindrice), în ciuda dificultăților de realizare (vezi T. Sakurai, K. Shishido, *Study on the fabrication of aspherical surfaces*, Appl. Optics, 2, 1181, 1963). În general, stigmatismul axial riguros al

1905

sistemelor optice centrate se poate realiza cu o suprafață asferică iar aplanetismul cu două. Un astfel de sistem (obiectiv aplanetic de telescop cu câmp unghiular mare, compus din două oglinzi asferice) a fost calculat de

Karl Schwarzschild (*Theorie der Spiegelteleskope*, Abh. Königl. Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen, Math. - physik. Klasse, 4, 1905) și a fost aplicat mai ales în microscopie (vezi D. S. Gray, *A New series of Microscope Objectives*, Journ. Opt. Soc. Amer., 39, 723, 1949; R. C. Mellors, *The Reflecting Microscope*, Science, 112, 381, 1950). Deși principiul microscopului reflector (deci fără aberații

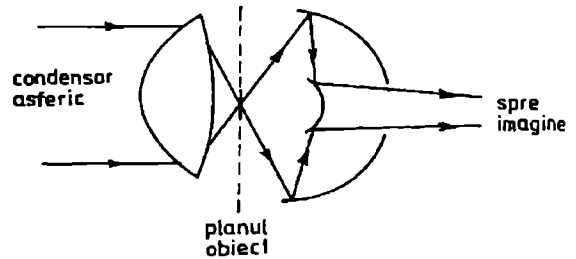


Fig.A.7. Obiectiv reflector de microscop (de mare apertură unghiulară)

cromatice) fusese lansat încă de Newton și reluat mai târziu de Amici, obiectivul unui astfel de microscop fiind asemănător cu obiectivul telescopului newtonian funcționând în sens invers, ideea a fost materializată abia de *Cecil Reginald Burch* (Proc. Phys. Soc., 59, 41, 1947) pornind de la soluția analitică a lui Schwarzschild pentru sistemul aplanetic de două oglinzi. Un astfel de *obiectiv reflector de microscop*, de mare apertură unghiulară, care amintește de obiectivul telescopului Cassegrain, este ilustrat în fig.A.7.

1947

Odată pus la punct în domeniul vizibil, acest sistem permite microfotografia și în domeniul ultraviolet, unde puterea de rezoluție spațială este mai mare. În general, sistemele catoptrice sunt larg folosite și în afara domeniului optic, începând de la focalizarea razelor X (vezi V. P. Kirkpatrick, H. H. Pattee, Jr., *X-Ray Microscopy*, în Encyclopedia of Physics, 30, 305 - 336, editor S. Flügge, Springer, 1957; H. Riesenberg, *Über zentralabschattungsfreie, rotationssymmetrische Spiegel systeme mit besonderer Berücksichtigung ihrer Eignung als abbildende Optik für extrem weiche Röntgenstrahlen*, Jenaer Jahrbuch, II, 250 - 328, 1963), până la radiotelescoapele observatoarelor din Jodrell Bank (Anglia) și Parkes (Australia). Din istoria recentă a marilor telescoape optice de reflexie, cu oglinzi principale parabolice, amintim instalarea la observatorul din Mont Wilson, S.U.A., a telescoapelelor cu $D = 152$ cm, în anul 1908 (cu oglindă șlefuită de G. W. Ritchey), și cu $D = 254$ cm, în anul 1918, la observatorul din Mont Palomar, S. U. A., a telescopului cu $D = 508$ cm, în anul 1947 (proiectat de G. E. Hale, cu oglindă șlefuită și aluminizată de J. D. Strong) și, în ultimii ani, la observatorul din Caucaz, a celui mai mare telescop reflector, cu oglindă principală de diametru $D = 600$ cm. Toate aceste mari instrumente ilustrează interacția fertilă dintre știință și tehnologie. În particular, elaborarea de către *John Donovan Strong* (1932) a tehnologiei de aluminizare, prin evaporare, a oglinzilor de telescop a avut o profundă influență asupra observațiilor astronomice. Un mare progres a fost realizat de asemenea prin construirea telescoapelelor catadioptrice cu

1932

1931

lamă refringentă corectoare (vezi cap. I, secțiunea 1.2.5, fig.1.61) de către *Bernhard Voldemar Schmidt* (Central Zeitung f. Optik u. Mechanik, 52, 1931; Mitt. Hamburg Sternwarte Bergedorf 36, 15, 1932; vezi și R. Schorr, Zs. f. Instrum., 56, 336, 1936; Astr. Nachr., 258, 45, 1936; Mitt. Hamburg Sternwarte Bergedorf, 42, 175, 1936; C. Carathéodory, *Elementare Theorie des Spiegelteleskops von B. Schmidt*, Teubner, Leipzig, 1940; E. H. Linfoot, *Recent Advances in Optics*, cap. IV, Clarendon, Oxford, 1955) și *Dmitri Dmitrievici Maksutov* (*Noviie Katadioptriceskie Sistemî*, Dokl. Akad. Nauk S. S. S. R., 37 - 127, 1942; *New Catadioptric Meniscus Systems*, Journ. Opt. Soc. Amer., 34, 270, 1944; vezi și A. Bouwers, *Achievements in Optics*, Elsevier, New York, 1950). Aceste instrumente performante, de câmp unghiular foarte mare, în variante de tip Gregory sau Cassegrain, au permis întocmirea de hărți astronomice pentru tot cerul (vezi, de exemplu, pentru cerul boreal, așa-numitul *Sky Survey* al observatorului de la Mount Palomar, realizat cu telescopul Schmidt cu oglindă $D = 180$ cm și lamă corectoare de 120 cm diametru). În domeniul microscopiei amintim perfecționarea obiectivului lui Burch prin realizarea obiectivului catadioptric de către D. S. Gray (op. cit., 1949), care a mărit substanțial apertura unghiulară prin adăugarea unui sistem frontal de lentile din cuarț topit și fluorină (transparente în ultraviolet). Mai recent, folosirea calculatoarelor de mare viteză a permis o îmbunătățire radicală în proiectarea sistemelor optice complexe cu lentile asferice pentru cele mai diverse aplicații (teledetecție, ghidare, trasare), cu performanțe până la limita naturală de difracție, a fost atinsă o precizie extremă în polizarea elementelor optice prin bombardament ionic, a devenit de uz curent depunerea de straturi simple și multiple (reflectante, anti-reflectante), a luat o mare amploare tehnologia materialelor pentru infraroșu, au fost introduse materialele plastice în construcția elementelor optice (prisme, lentile, asferice, replici de rețele, fibre optice), au fost descoperite sticlele ceramice cu coeficient de dilatare termică extrem de mic.

1969

O idee mai veche, brevetată de *John Logie Baird* (patent britanic 285738, 15 februarie 1928), care prezicea posibilitatea transmiterii luminii și a imaginilor prin fibre dielectrice transparente, a fost relansată de *Charles Kuen Kao* (1966) astfel că, în anul 1969, firma Corning Glass deja fabrica primele *fibre optice* din sticlă cu pierderi relativ mici ($\cong 20$ dB/km), marcând momentul intrării în era comunicațiilor prin fibre optice (vezi N. S. Kapany, *Fiber Optics, Principles and Applications*, Academic Press, New York, 1967; D. Gloge, *Optical Fibers for Communications*, Appl. Optics, 13, 249, 1974; D. Marcuse, *Principles of Optical Fiber Measurements*, Academic Press, New York, 1981; A. B. Sharma, S. J. Halme, M. M. Butusov, *Optical Fiber Systems and their Components*, Springer, Ser. Opt. Sci., 24, 1981; Y. Suematsu, K. Iga, *Introduction to Optical Fiber Communications*, Wiley, New York, 1982; A. H. Cherin, *Introduction to Optical Fibers*, McGraw-Hill, New York, 1983). Gama diametrelor fibrelor folosite astăzi pentru ghidarea luminii la distanță se întinde de la câțiva microni până la câteva mii de microni (firul de păr de cap uman are un diametru de circa 50 microni). Dacă diametrul

fibre este mare în comparație cu lungimea de undă, propagarea luminii prin fibră poate fi tratată în termenii opticii geometrice, așa cum am făcut în cap. I, secțiunea 1.3.2, pentru structuri cilindrice. Dacă, însă, diametrul este comparabil cu lungimea de undă, lumina se propagă prin fibră ca printr-un ghid de undă din domeniul frecvențelor optice ($\cong 10^{15}$ Hz), în acest caz fiind necesară aplicarea teoriei electromagnetice riguroase; această afirmație este valabilă și pentru propagarea luminii în straturi dielectrice foarte subțiri. A luat astfel naștere un nou capitol al opticii aplicate denumit, pe scurt, *optica integrată* (S. E. Miller, 1969). Ca și în cazul ghidurilor cavitare metalice pentru domeniul microundelor, analiza riguroasă a propagării undelor electromagnetice luminoase în ghiduri dielectrice se face cu ajutorul ecuațiilor lui Maxwell și a condițiilor la limită corespunzătoare (vezi vol. II). Lungimea de undă în domeniul optic este însă de circa 10^4 ori mai mică decât în domeniul microundelor iar avantajele frecvențelor optice și ale miniaturizării corespunzătoare a ghidurilor și circuitelor optice sunt multiple (vezi M. J. Adams, *An Introduction to optical Waveguides*, Wiley, New York, 1981; R. G. Hunsperger, *Integrated Optics, Theory and Technology*, Springer, Ser. Opt. Sci., 33, 1984).

Încheiem aici această primă parte a istoriei opticii cu observația că, deși optica geometrică ne apare astăzi ca un caz limită al ecuațiilor lui Maxwell aplicate la fenomenele de propagare a câmpurilor electromagnetice de lungime de undă foarte mică, totuși proiectarea instrumentelor optice se bazează, de regulă, pe trasarea razelor de lumină prin sistemele considerate, deoarece rareori se întâmplă ca difracția să depășească aberațiile geometrice. De asemenea, studiul fenomenelor mai fine, de natură ondulatorie, cum sunt interferența, difracția și polarizarea, implică întotdeauna evaluarea prealabilă a drumului geometric al razelor de lumină. Și aceasta deoarece, pentru a descrie într-o primă bună aproximație propagarea luminii, nu avem nevoie de nici-o ipoteză cu privire la natura ei "ultimă", fiind suficiente doar reprezentările pur geometrice, așa cum este sintetizat în următoarele cuvinte prin care Fermat se apăra de atacurile cartezienilor:

"... je ne prétends ni n'ai jamais prétendu être de la confidence secrète de la Nature. Elle a des voies obscures et cachées que je n'ai jamais entrepris de pénétrer; je lui avais seulement offert un petit secours de géometrie au sujet de la réfraction, si elle en ait eu besoin. "

("... nu pretind și nici n-am pretins vreodată că mă aflu printre confidenții tainici ai Naturii. Ea are căi nedeslășite și ascunse pe care n-am încercat niciodată să le pătrund; i-am oferit doar un mic ajutor din geometrie, cu privire la refracție, asta dacă cumva ar fi avut nevoie de el.")

Acest program minimal, realizat cu strălucire prin principiul lui Fermat și opera de optică geometrică a lui Hamilton, ar putea fi considerat ca *motto* pentru primul capitol al cărții noastre.

BIBLIOGRAFIE

1. J. A. Arnaud, *Beam and Fiber Optics*, Academic Press, New York, 1976;
2. V. V. Bianu, *Optică geometrică*, Editura Tehnică, București, 1962;
3. J. W. Blaker, *Geometric Optics. The Matrix Theory*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1971;
4. M. Born, E. Wolf, *Principles of Optics*, Pergamon Press, Oxford, 1986;
5. G. A. Boutry, *Instrumental Optics*, Hilger, London, 1961;
6. G. G. Brătescu, *Optica*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1982;
7. W. Brouwer, *Matrix Methods in Optical Instrument Design*, W. A. Benjamin, Inc. New York, 1964;
8. H. A. Buchdahl, *Optical Aberration Coefficients*, Oxford University Press, London, 1954; *An Introduction to Hamiltonian Optics*, Cambridge University Press, 1970;
9. E. J. Butikov, *Optika*, Izd. Vișșaia șkola, Moskva, 1986;
10. A. H. Cherin, *Introduction to Optical Fibers*, Mc Graw - Hill, New York, 1983;
11. H. Chrétien, *Calcul des combinaisons optiques*, Masson, Paris, 1959;
12. A. E. Conrady, *Applied Optics and Optical Design*, Dover Publication, Inc., New York, 1975;
13. S. Cornbleet, *Microwave Optics*, Academic Press, New York, 1976;
14. René Descartes, *La Dioptrique*, Oeuvres de Descartes, Vol. VI, C. Adam et P. Tannery (éditeurs), Paris, 1902;
15. F. Desvignes, *Détection et détecteur de rayonnements optiques*, Collection Mesures Physiques, Paris, 1987;
16. P. Dodoc, *Calculul și construcția aparatelor optice*. Editura Didactică și Pedagogică, București, 1983;
17. E. Elbaz, F. Roux, *Optique matricielle*, Ellipses, Paris, 1989;
18. G. R. Fowles, *Introduction to Modern Optics*, Dover Publications, New York, 1975;
19. A. Gerrard, I. M. Burch, *Introduction to Matrix Methods in Optics*, John Wiley & Sons, New York, 1975;
20. R. Grigorovici, *Curs de optică*, partea I, *Optica Geometrică*, Universitatea București, 1957;
21. R. D. Guenther, *Modern Optics*, Wiley, New York, 1990;
22. W. R. Hamilton, *The Mathematical Papers of Sir William Rowan Hamilton*, Vol. I, *Geometrical Optics*, edited by A. W. Conway and J. L. Synge, Cambridge University Press, New York, 1931;
23. O. S. Heavens, R. W. Ditchburn, *Insight into Optics*, Wiley, New York, 1991;
24. E. Hecht, *Optique, Cours et Problèmes*, McGraw-Hill, Inc., New York, 1980;
25. E. Hecht, A. Zajac, *Optics*, Addison - Wesley Publ. Comp., Inc., Reading, Mass., 1987;
26. G. Huțanu, *Zigzag în lumea opticii*, Ed. Albatros, București, 1986;
27. M. Herzberger, *Modern Geometrical Optics*, Interscience Publishers, New York, 1968;

28. Christian Huygens, *Traité de la lumière*, Van der Aa, Leiden, 1906, republicat de Gauthier - Villars, Paris, 1992;
29. K. Iizuka, *Engineering Optics*, Springer - Verlag, Berlin, 1985;
30. I. Iova, *Elemente de optică aplicată*, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1977;
31. F. A. Jenkins, H. E. White, *Fundamentals of Optics*, McGraw-Hill, Inc., 1981;
32. M. V. Klein, *Optics*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1970;
33. M. Kline, I. W. Kay, *Electromagnetic Theory and Geometrical Optics*, John Willey & Sons, Inc., New York, 1965;
34. Yu. A. Kravțov, Yu. I. Orlov, *Geometrieskaia optika neodnorodnih sred*, Izd. Nauka, Moskva, 1980;
35. E. E. Kriezis și alții, *Electromagnetics and Optics*, World Scientific, Singapore, 1992;
36. M. Lanchenaud, *Instruments d'Optique*, Dunod, Paris, 1976;
37. L. Landau, E. Lifchitz, *Théorie du champ*, Chap. VII, *Propagation de la lumière*, Editions Mir, Moscou, 1966;
38. G. S. Landsberg, *Optica*, prima parte, Editura Tehnică, București, 1958;
39. L. Levi, *Applied Optics, A Guide to Optical Design*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1968;
40. R. S. Longhurst, *Geometrical and Physical Optics*, Longmans, Green and Co., Ltd., London, 1984;
41. D. J. Lowell, *Optical anecdotes*, SPIE, Washington, 1984;
42. R. K. Luneburg, *Mathematical Theory of Optics*, University of California Press, Berkeley, 1964;
43. E. Mach, *The Principles of Physical Optics. An Historical and Philosophical Treatment*, Dover Publication, Inc., New York, 1953;
44. D. Marcuse, *Light Transmission Optics*, Van Nostrand Reinhold, New York, 1972;
45. A. Maréchal, *Optique géométrique générale*, în *Handbuch der Physik*, herdansgegeben von S. Flügge, Band XXIV, *Grundlagen der Optik*, Springer - Verlag, Berlin, 1956;
46. L. C. Martin, *Geometrical Optics*, Philosophical Library, Inc., New York, 1956;
47. L. C. Martin, W. T. Welford, *Technical Optics*, Pitman & Sons, Ltd., London, 1966;
48. A. N. Matveev, *Optics*, Mir Publishers, Moskow, 1988;
49. J. R. Meyer - Arendt, *Introduction to Classical and Modern Optics*, Prentice - Hall, Inc., London, 1972;
50. G. C. Moisil, E. Curatu, *Optică, teorie și aplicații*, Editura Tehnică, București, 1986;
51. K. D. Möller, *Optics*, University Science Books, Mill Valley, 1988;
52. G. Nemeș, I. Teodorescu, M. Nemeș, *Optica în spațiul fazelor, teorie și aplicații*, Editura Academiei Române, București, (va apare);
53. Isaac Newton, *Optica*, Editura Academiei Române, București, 1970, în traducerea Prof. Victor Marian;
54. A. Nussbaum, *Geometric Optics*, Addison - Wesley Publ. Co., Inc., Reading, Mass., 1968;
55. G. H. Owyang, *Foundations of Optical Waveguides*, Elsevier, New York, 1981;

56. F. L. Pedrotti, L. S. Pedrotti, *Introduction to Optics*, Prentice-Hall, 1993;
57. J. -P. Pérez, *Optique (Fondements et applications)*, Masson, Paris, 1996;
58. V. Pop, *Optica*, Vol. II, Universitatea "Al. I. Cuza", Iași, partea I, 1983, partea a doua, 1986;
59. I. I. Popescu, *Optica, 1. Optica geometrică*, Tipografia Univ. din București, 1988;
60. I. I. Popescu, E. I. Toader, *Optica*, Ed. Științifică și Enciclopedică, București, 1989;
61. I. M. Popescu, *Teoria electromagnetică macroscopică a luminii*, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1986;
62. J. P. Provost, P. Provost, *Optique, vol.3, Exercices et problèmes d'optique géométrique*, Cedic/Fernand Nathan, Paris, 1980;
63. V. Ronchi, *The Nature of Light, an Historical Survey*, Harvard University Press, 1970;
64. D. Sivoukhine, *Cours de Physique Générale*, tome IV, *Optique*, première partie, Editions Mir, Moscou, 1984;
65. F. G. Smith, J. H. Thomson, *Optics*, Wiley, New York, 1988;
66. A. Sommerfeld, *Lectures on Theoretical Physics*, Vol. IV, *Optics*, Academic Press Inc., New York, 1954;
67. O. N. Stavroudis, *The Optics of Rays, Wavefronts and Caustics*, Academic Press, New York and London, 1972;
68. P. Ștețiu, *Optica I, Optica Geometrică*, Tipografia Universității din Cluj-Napoca, 1987;
69. J. L. Synge, *Geometrical Optics, An Introduction to Hamilton's Method*, Cambridge University Press, 1962;
70. E. I. Toader, *Aparate optice*, Ed. Științifică, București, 1995;
71. R. Țițeica, I. I. Popescu, *Fizica Generală*, Vol. II, Editura Tehnică, București, 1973;
72. F. Uliu, *Optică și Spectroscopie*, partea I, *Optica Geometrică*, Tipografia Universității din Craiova, 1973; *Culegere de probleme de optică*, Tipografia Universității din Craiova, 1979;
73. F. Uliu, *Curcubeul - De la mit la adevăr*, Editura SITECH, Craiova, 1994;
74. F. Uliu, *Probleme alese de fizică, vol.II (Optică și relativitate)*, Ed. Radical, Craiova, 1997;
75. H. G. Unger, *Planar Optical Waveguides and Fibres*, Oxford Univ. Press, 1980;
76. I. Ursu, *Optica*, Litografia Universității din Cluj, Cluj, 1953;
77. W. T. Welford, *Geometrical Optics*, North Holland Publ., Co., Amsterdam, 1962; *Aberations of the Symmetrical Optical Systems*, Academic Press, London, 1974;
78. H. G. Zimmer, *Geometrical Optics*, Springer - Verlag, Berlin, 1970;
79. * * * *Sbornic zadaci po obščemu kursu fiziki (Optica)*, pod redacția D. V. Sivoukhina, Izd. Nauka, Moskva, 1977;
80. * * * *Melles Griot, Optics Guide*, 5, 1990.

Capitolul II

DIFRACTIA LUMINII

§. 2. 1. Considerente preliminare

În capitolul anterior, dedicat opticii geometrice, am considerat aproximația opticii ondulatorii pentru lungimi de undă foarte mici, adică pentru $\lambda \rightarrow 0$ (sau, echivalent, pentru $k \rightarrow \infty$). În această limită, *ecuația undelor* se reduce la *ecuația eiconalului*, respectiv problema propagării luminii în diverse medii optice, caracterizate prin funcția $n = n(\vec{r})$ a indicelui de refracție, se reduce la determinarea *traectoriei razelor de lumină*.

Modelul geometric al propagării luminii este un model util, de mare importanță practică, dar, este lesne de înțeles, el trebuie să fie depășit deoarece reprezintă doar o aproximație "de ordinul zero" a realității. Într-adevăr, când lumina trece pe lângă marginea obiectelor (obstacolelor) sau prin aperturi mici, aproximația opticii geometrice nu mai este suficientă. Observarea *atentă* arată că, în interiorul umbrei geometrice, intensitatea luminii *scade în mod continuu*, iar în partea de lumină geometrică apar zone alternative, de intensitate mai mare sau mai mică, denumite *franje de difracție*. În lumină compusă sau albă franjele de difracție apar colorate. Pătrunderea luminii în interiorul umbrei și apariția franjelor în zona de lumină poartă denumirea generală de *difracție*.

Fenomenul difracției, adică al abaterii razelor de lumină de la propagarea pe traiectoriile prevăzute de optica geometrică, a fost descris detaliat, pentru prima dată, de către italianul *Franciscus Maria Grimaldi* în cartea *Physico - mathesis de lumine, coloribus et iride (Fizica luminii, culorilor și imaginii)*, publicată în anul 1665 la Bologna. Se pare însă că, înaintea sa, difracția luminii a fost remarcată și de *Leonardo da Vinci* (vezi Anexa de la sfârșitul capitolului anterior), dar fără nici un ecou.

Pentru fixarea ideilor, în fig.2.1. reprezentăm cazul simplu al limitării unui fascicul (homocentric) de raze de lumină de către o diafragmă (apertură într-un ecran opac). Dacă legile opticii geometrice ar fi riguroase, în spatele ecranului ar trebui să avem o zonă de umbră *delimitată net* de zona de lumină, străbătută de raze. În realitate, datorită difracției, distribuția intensității luminoase în spatele ecranului este mult mai complexă, lumina ajungând, în general, și în punctele de observație P aflate în umbra geometrică. Afirmația este adevărată și pentru situația complementară, reprezentată în fig.2.2., unde în zona

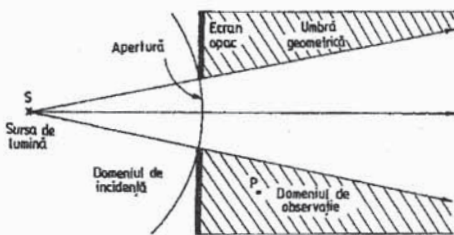


Fig.2.1. Propagarea luminii printr-o apertură într-un ecran opac. Dacă dimensiunile aperturii sunt comparabile cu lungimea de undă, lumina pătrunde și în domeniul umbrei geometrice.

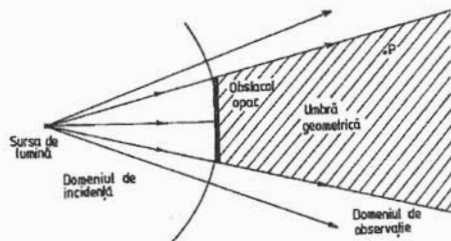


Fig.2.2. În urma difracției, lumina poate ocoli marginile obstacolului opac, pătrunzând în domeniul umbrei geometrice.

mediană, avem un obstacol opac.

Fenomenul de difracție are drept consecință o redistribuire a energiei electromagnetice la dreapta ecranului sau obstacolului (în domeniul de observație) atât în zona de lumină geometrică, sub formă de franje de difracție, cât și în cea de umbră geometrică. Redistribuirea energiei incidente este cu atât mai drastică cu cât lungimea de undă λ a radiației nu mai poate fi considerată infinit de mică față de dimensiunile D ale aperturii sau obstacolului, deci cu cât aproximația opticii geometrice ($\frac{\lambda}{D} \rightarrow 0$) și conceptul de rază de lumină nu mai sunt adecvate pentru modelarea propagării luminii.

După cum se știe, difracția este un fenomen pur undulatoriu, cauzat de mișcarea din aproape în aproape, și a fost explicat cu ajutorul *principiului Huygens-Fresnel* (formulat inițial de către Huygens - 1690 și completat ulterior de către Fresnel - 1819). Conform acestui principiu, *în procesul de propagare al unei unde, din fiecare punct al unui front de undă se emit unde noi, înfășurătoare fronturilor acestora fiind noul front al undei inițiale, la momentul de timp ulterior considerat.* Conform precizărilor lui Fresnel, *sursele secundare virtuale oscilează în fază*, adică undele emise de acestea *sunt coerente*.

Astfel, starea de oscilație a câmpului electromagnetic în orice punct de observație P este determinată de superpoziția coerentă (interferența) a undelor emise de oscilatorii punctuali secundari din dreptul aperturii (vezi figurile anterioare). Această afirmație poate fi înțeleasă ușor dacă propagarea luminii are loc prin aer - de exemplu, sau prin orice alt mediu material transparent. Dacă însă experiența se face în vid, știm cu siguranță că nu există sarcini electrice oscilante reale în dreptul aperturii. Atunci, în conformitate cu principiul superpoziției, câmpul electromagnetic în punctul P rezultă ca suprapunerea, cu retardarea corespunzătoare, a câmpului undei primare (ce vine direct de la S) și a câmpului generat de oscilațiile induse ale sarcinilor electrice din substanța ecranului. Explicația difracției pe baza oscilației surselor fictive, secundare (Huygens - Fresnel), din dreptul orificiului, apare astfel paradoxală de data aceasta. Și totuși, totul se petrece ca și cum ar fi așa!

Vom demonstra această ultimă afirmație cu ajutorul unei experiențe mintale simple, cu o sursă de lumină și un ecran opac infinit prevăzut cu apertură. Dacă apertura este deschisă, câmpul electromagnetic într-un punct oarecare P din spatele ecranului (la dreapta sa) este

$$E_P^{(1)} = E_S + E_{\text{ecran}} + E_{\text{apertură}}, \quad (2.1)$$

în care E_S este câmpul primar venit direct de la sursă, $E_{\text{apertură}}$ este câmpul sosit de la sursele secundare de pe frontul undei la nivelul aperturii, iar E_{ecran} - de la oscilațiile induse ale sarcinilor din ecran. *În vid, câmpul $E_{\text{apertură}}$ este nul* deoarece nu există sarcini electrice care să-l genereze.

Dacă închidem apertura cu un "dop" opac, de forma aperturii, câmpul în P se anulează, adică

$$E_P^{(2)} = E_S + E_{\text{ecran}} + E_{\text{dop}} = E_P^{(1)} + E_{\text{dop}} = 0. \quad (2.2)$$

De aici rezultă

$$E_P^{(1)} = -E_{\text{dop}}, \quad (2.3)$$

deci câmpul în P , când în ecran există apertură, se poate calcula considerând numai oscilația sarcinilor electrice din dop. Factorul $-1 = \exp(i\pi)$, adică defazarea cu π radiani, nu contează în expresia intensității luminoase $I = E^*E = |E|^2$. Acest raționament justifică de ce se poate

da, și în cazul vidului, o tratare obișnuită, bazată pe principiul Huygens - Fresnel, pentru determinarea câmpului (intensității luminoase) în diverse puncte P din spatele ecranului.

Teoria riguroasă a difracției radiației electromagnetice pe un corp oarecare se bazează pe integrarea ecuațiilor lui Maxwell, sau a ecuației vectoriale a undelor, atât în exteriorul, cât și în interiorul corpului difractant, cu utilizarea condițiilor la limită corespunzătoare situației analizate. Se determină astfel *in mod complet* starea câmpului electromagnetic $\vec{E}(\vec{r}, t)$, $\vec{H}(\vec{r}, t)$ - amplitudine, fază, polarizare - în tot spațiul și la orice moment de timp. Ne vom permite o astfel de tratare riguroasă în alte capitole (vol. II), în cazul simplu al reflexiei, refracției sau dublei refracții a undelor plane monocromatice la o suprafață de discontinuitate plană, infinită, dielectric - dielectric sau dielectric - conductor.

Pentru simplitate, în continuare, în acest prim volum, vom renunța să ne interesăm de starea de polarizare a undelor electromagnetice* și vom prezenta numai teoria difracției undelor *scalare*, dată de Kirchoff (1883) și completată (din punctul de vedere al rigurozității matematice) de către Rayleigh și Sommerfeld. Teoria scalară a difracției are avantajul că dă o expresie (o formulare) matematică riguroasă principiului Huygens - Fresnel și că este satisfăcătoare, de obicei, pentru tratarea diverselor probleme practice ale opticii instrumentale.

Suntem datori să precizăm însă că studiul vectorial al difracției undelor electromagnetice de diverse lungimi de undă, în diferite situații concrete pe care le ridică practica, este și în momentul de față un domeniu de cercetare intensă. Teoria difracției este un capitol deschis al opticii, un domeniu în care, în special în ultima vreme (după descoperirea laserilor), s-au făcut progrese considerabile.

§. 2. 2. Teorema integrală Helmholtz - Kirchhoff

Fie $e(\vec{r}, t)$ o *perturbație luminoasă* în punctul caracterizat de raza vectorie \vec{r} , la momentul t. În cazul undelor electromagnetice polarizate liniar (vezi vol.II) putem considera această funcție ca fiind fie intensitatea câmpului electric, fie intensitatea câmpului magnetic.

Pentru început ne vom referi numai la cazul undelor *monocromatice* pure, urmând ca ulterior să generalizăm rezultatele pe care le vom stabili și la cazul undelor nemonocromatice. Dacă unda (perturbația) este monocromatică, de *frecvență* ν , pentru perturbația luminoasă putem scrie

$$e(\vec{r}, t) = E_0(\vec{r}) \cos [2\pi\nu t + \Phi(\vec{r})], \quad (2.4)$$

unde $E_0(\vec{r})$ și $\Phi(\vec{r})$ sunt *amplitudinea*, respectiv *faza* undei în punctul considerat. Utilizând notații complexe, ca și la începutul primului capitol, vom scrie formula anterioară sub forma

$$e(\vec{r}, t) = \text{Re}[E(\vec{r}) \exp(-2\pi i \nu t)], \quad (2.5)$$

unde, de data aceasta, $E(\vec{r})$ este *amplitudinea complexă*

$$E(\vec{r}) = E_0(\vec{r}) \exp[-i\Phi(\vec{r})], \quad (2.6)$$

* De altfel, în lumină naturală, figura de difracție rezultă de la trenuri de undă distribuite în toate stările posibile de polarizare.

iar Re desemnează *partea reală* a expresiei de la dreapta sa.

La propagarea în vid, funcția reală $e(\vec{r}, t)$ satisface *ecuația scalară a undelor*

$$\Delta e - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 e}{\partial t^2} = 0, \quad (2.7)$$

c fiind viteza de propagare. Dacă relația (2.5) se substituie în ecuația undelor (2.7) obținem *ecuația atemporală a lui Helmholtz*

$$(\Delta + k^2)E(\vec{r}) = (\nabla^2 + k^2)E(\vec{r}) = 0, \quad (2.8)$$

unde

$$k = 2\pi \frac{\nu}{c} = \frac{2\pi}{cT} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \quad (2.9)$$

este *numărul de undă*, adică modulul vectorului de propagare \vec{k} . De aici, rezultă formal $\nabla = \pm i\vec{k} = \pm i k \vec{\tau}$ cu $\vec{\tau} = \vec{k}/k$.

În cele ce urmează, vom presupune că amplitudinea complexă a oricărei perturbații luminoase monocromatică, ce se propagă în spațiul liber, satisface ecuația lui Helmholtz, adică relația (2.8).

Pentru a calcula funcția $E(\vec{r})$ într-un punct oarecare al spațiului, în loc să rezolvăm ecuația lui Helmholtz - cu condiții la limită - ne vom servi de așa-numita *teoremă a lui Green*, al cărei enunț este următorul: fie $E(\vec{r})$ și $G(\vec{r})$ două funcții complexe oarecare, de poziție, și fie Σ o suprafață ce închide volumul V ; dacă $E(\vec{r})$ și $G(\vec{r})$ precum și derivatele lor parțiale de ordinul I și II sunt bine definite și continue în V și pe Σ , atunci este adevărată relația

$$\iiint_V (G \cdot \Delta E - E \cdot \Delta G) dV = \iint_{\Sigma} \left(G \cdot \frac{\partial E}{\partial N} - E \cdot \frac{\partial G}{\partial N} \right) dA, \quad (2.10)$$

unde $\partial/\partial N$ reprezintă derivata parțială în raport cu normala exterioară la suprafața Σ .

Teorema se poate demonstra pornind de la formula Gauss-Ostrogradski

$$\iiint_V \nabla \cdot \vec{a} dV = \iint_{\Sigma} \vec{a} \cdot \vec{N} dA = \iint_{\Sigma} a_N dA,$$

aplicată câmpului vectorial $\vec{a}(\vec{r}) = G \cdot \nabla E - E \cdot \nabla G$. Cititorul se poate convinge ușor de acest lucru.

Revenind la teorema lui Green trebuie să subliniem că, din multe puncte de vedere, ea este considerată ca un fundament matematic al teoriei scalare a difracției. Totuși, numai o *alegere prudentă și convenabilă a funcției Green $G(\vec{r})$* , folosită ca un auxiliar matematic (funcție de undă de tip "sondă virtuală"), și a suprafeței închise Σ , va permite o aplicare directă a teoremei la problema fizică a difracției. În cele ce urmează, urmărind firul istoric al abordării problemei, vom prezenta mai întâi alegerea funcției Green făcută de către Kirchhoff (1882-1883). Teorema integrală ce a rezultat din această alegere particulară s-a dovedit a fi o bună aproximație a fenomenului fizic, deși, după cum vom putea constata ulterior, întreaga construcție a teoriei era inconsistentă din punct de vedere matematic. Este meritul lui A. Sommerfeld de a fi reconsiderat, inițial în anul 1896, și apoi în 1912, teoria

scalară a difracției dată de Kirchhoff și, prin alte alegeri pentru funcția Green G , de a fi așezat-o pe baze matematice riguroase.

Modul în care a fost formulată de către Kirchhoff problema scolară a difracției este următorul: să se determine soluția ecuației omogene a undelor (2.8) într-un punct arbitrar, în interiorul unei suprafețe închise, în funcție de valorile soluției și a derivatelor sale de ordinul I pe această suprafață (arbitrară). Într-o manieră similară, problema fusese pusă, cu aproape două decenii mai devreme, de către Helmholtz, pentru cazul difracției undelor acustice.

Pentru fixarea ideilor să ne referim la fig.2.3 unde P este *punctul de observație* - în care ne interesează funcția E - iar Σ este o suprafață oarecare ce conține punctul P în interior. Vrem să determinăm $E(P)$ în funcție de valorile funcției E și a derivatelor sale pe suprafața Σ .

Pentru a rezolva această problemă Kirchhoff procedează în felul următor: ține cont că funcțiile E și G satisfac ecuația atemporală Helmholtz (2.8) și atunci, din teorema Green (2.10), rezultă imediat

$$\oiint_{\Sigma} \left(G \frac{\partial E}{\partial N} - E \frac{\partial G}{\partial N} \right) dA = 0. \quad (2.11)$$

Mai departe, el alege pentru funcția G o *formă particulară*, anume partea spațială (de amplitudine unitate) a unei unde armonice (monocromatice) sferice divergente, anume*

$$G(r) = \frac{1}{r} \cdot \exp(ikr), \quad k = \frac{2\pi}{\lambda_0}, \quad (2.12)$$

în care originea lui \vec{r} se află în punctul P , de observație, considerat ca sursă pentru unda sferică $G(r)$. Cititorul observă că pentru $r \rightarrow 0$, funcția $G(r) \rightarrow \infty$ și înțelege desigur că singularitatea din origine trebuie evitată. Kirchhoff a realizat acest lucru înconjurând punctul P cu o suprafață sferică Σ_ϵ , de rază ϵ , foarte mică (la limită $\epsilon \rightarrow 0$), cu centrul în P și aplicând formula (2.11) pe suprafața $\Sigma' = \Sigma + \Sigma_\epsilon$ ce închide volumul $V' = V - V_\epsilon$. În acest fel, în locul relației (2.11) se obține relația

* Pentru a argumenta alegerea lui Kirchhoff pornim de la ecuația $\Delta G + k^2 G = 0$ și considerând că funcția G are simetrie *sferică* (depinde numai de distanța r , nu și de unghiurile polare θ, φ), putem scrie

$$\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (rG(r)) + k^2 G(r) = 0.$$

De aici rezultă

$$\frac{d^2}{dr^2} (rG(r)) + k^2 (rG(r)) = 0,$$

adică o ecuație de forma celei a oscilatorului armonic liniar (unidimensional). Soluția sa este de forma $rG(r) \sim \exp(\pm ikr)$, adică $G(r) \sim \frac{1}{r} \exp(\pm ikr)$, semnele \pm corespunzând undelor *divergentă*, respectiv *convergentă*.

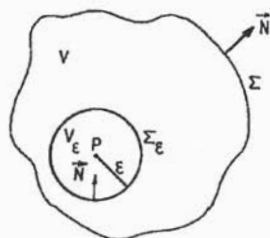


Fig.2.3. Punctul de observație P și suprafața închisă de integrare Σ .

$$\oint_{\Sigma} \left[\frac{e^{ikr}}{r} \cdot \frac{\partial E}{\partial N} - E \frac{\partial}{\partial N} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \right] dA + I(\Sigma_{\varepsilon}) = 0, \quad (2.11')$$

unde

$$\begin{aligned} I(\Sigma_{\varepsilon}) &= - \oint_{\Sigma_{\varepsilon}} \left[\frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon} \frac{\partial E}{\partial \varepsilon} - E \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon} \right) \right] dA_{\varepsilon} = \\ &= - \oint_{\Sigma_{\varepsilon}} \left[\frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon} \frac{\partial E}{\partial \varepsilon} - E \left(\frac{ik}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon^2} \right) e^{ik\varepsilon} \right] \varepsilon^2 d\Omega = \\ &= - \oint_{\Sigma_{\varepsilon}} e^{ik\varepsilon} \left[\varepsilon \frac{\partial E}{\partial \varepsilon} - ik\varepsilon E + E \right] d\Omega \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} -4\pi E(P), \end{aligned}$$

căci primii doi termeni din integrand tind spre zero când $\varepsilon \rightarrow 0$ (se admite continuitate pentru E și $\frac{\partial E}{\partial \varepsilon}$ în domeniul valorilor mici ale lui ε). Astfel obținem

$$E(P) = \frac{1}{4\pi} \oint_{\Sigma} \left[\frac{e^{ikr}}{r} \cdot \frac{\partial E}{\partial N} - E \frac{\partial}{\partial N} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \right] dA, \quad (2.13)$$

sau în general

$$E(P) = \frac{1}{4\pi} \oint_{\Sigma} \left[G \frac{\partial E}{\partial N} - E \frac{\partial G}{\partial N} \right] dA, \quad (2.13')$$

rezultat cunoscut sub denumirea de *teorema integrală a lui Helmholtz și Kirchhoff*. Ea ne spune că valoarea unei funcții de undă armonice în orice punct din interiorul unei suprafețe închise arbitrare este determinată de valorile funcției și ale gradientului ei normal pe această suprafață.

Observații: 1). Generalizarea teoremei Helmholtz -Kirchhoff la *cazul câmpurilor vectoriale* a fost realizată în anul 1923 de către F.Kottler. Pentru câmpurile \vec{E} (electric) și \vec{H} (magnetic) ale unei unde electromagnetice, Kottler a stabilit formulele*

$$\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi} \oint_{\Sigma} \left[G(\vec{N} \cdot \nabla) \vec{E} - \vec{E}(\vec{N} \cdot \nabla G) \right] dA, \quad (2.14)$$

$$\vec{H}(P) = \frac{1}{4\pi} \oint_{\Sigma} \left[G(\vec{N} \cdot \nabla) \vec{H} - \vec{H}(\vec{N} \cdot \nabla G) \right] dA, \quad (2.15)$$

care, în caz monocromatic, când $\nabla \times \vec{E} = i\omega\mu\vec{H}$, $\nabla \times \vec{H} = -i\omega\varepsilon\vec{E}$ (vezi vol. II) se pot scrie sub forma

$$\vec{E}(P) = -\frac{1}{4\pi} \oint_{\Sigma} \left\{ i\omega\mu \left[\vec{N} \times \vec{H} \right] G + \left[\left[\vec{N} \times \vec{E} \right] \times \nabla G \right] + \left(\vec{N} \cdot \vec{E} \right) \nabla G \right\} dA, \quad (2.16)$$

respectiv

$$\vec{H}(P) = -\frac{1}{4\pi} \oint_{\Sigma} \left\{ -i\omega\varepsilon \left[\vec{N} \times \vec{E} \right] G + \left[\left[\vec{N} \times \vec{H} \right] \times \nabla G \right] + \left(\vec{N} \cdot \vec{H} \right) \nabla G \right\} dA. \quad (2.17)$$

* Vezi de exemplu, M.B. Vinogradova, O.V. Rudenko, A.P. Suhorukov, *Teoria voln*, Moscova, 1979, pag. 272-278.

2). Revenind la formula scalară (2.13), care exprimă perturbația luminoasă din punctul P, se poate obiecta că, la deducerea ei, s-a presupus în mod tacit, că sursa unde E se află în exteriorul domeniului volumic de integrare. Obiecția nu este întemeiată deoarece, așa cum vom arăta, chiar și în cazul în care sursa se află în interiorul suprafeței de integrare rezultatul este același, adică are tot forma (2.13). Într-adevăr, să ne referim la fig.2.4 în care în domeniul hașurat s-ar afla sursa de radiație iar P este punctul de observație. Dacă teorema Green (2.10) se aplică pe volumul V'' ce exclude sursa de radiație, obținem formula (2.11) în care integrala de suprafață se ia pe $\Sigma + \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3$. Contribuția de pe suprafețele Σ_1 și Σ_3 , ale tăieturilor, se compensează reciproc deoarece normalele \vec{N}_1 și \vec{N}_3 au sensuri opuse ($\vec{N}_3 = -\vec{N}_1$). Excluzând singularitatea din P, ca și în deducerea anterioară, obținem rezultatul (2.13) cu integrala de suprafață luată pe $\Sigma + \Sigma_2$. Putem considera, deci, că sursele se află *întotdeauna* în afara suprafeței de integrare.

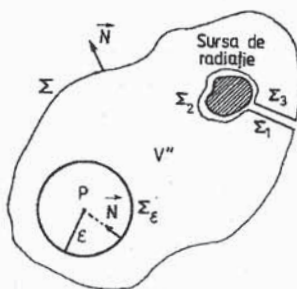


Fig.2.4. Configurație pentru stabilirea formulei (2.13) când sursa de radiație se află în interiorul suprafeței Σ.

§. 2. 3. Formula fundamentală a difracției (Kirchhoff)

Să considerăm problema difracției luminii emise de o sursă punctuală S, cauzată de o apertură într-un ecran opac infinit - vezi fig.2.5. În aproximația scalară considerată, ca și în cazul opticii geometrice, suntem obligați să renunțăm la orice informație privind starea de polarizare. Din acest motiv, așa cum am mai procedat, vom simplifica modelul câmpului electromagnetic vectorial înlocuindu-l prin câmpul scalar $E(\vec{r})$, denumit *câmp (perturbație) optic (ă)*. El se va calcula cu ajutorul teoremei integrale Helmholtz-Kirchhoff (2.13), alegând în mod convenabil suprafața de integrare. O variantă posibilă de alegere este redată în figură, în care suprafața închisă Σ este compusă din suprafața A (sau orice altă suprafață care se sprijină pe marginile aperturii), din suprafața B aflată în spatele ecranului și din suprafața sferică C, cu centrul în punctul de observație P și de rază $R \rightarrow \infty$. Din formula (2.13) rezultă

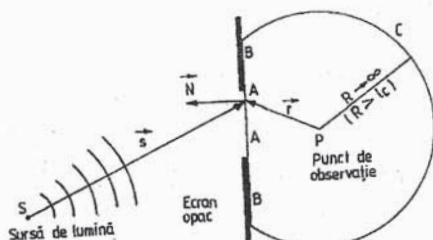


Fig.2.5. Aplicarea teoremei integrale Helmholtz - Kirchhoff la problema difracției pe o apertură (A).

$$E(P) = \frac{1}{4\pi} \left(\iint_A + \iint_B + \iint_C \right) \left[\frac{e^{ikr}}{r} \nabla E - E \nabla \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \right] d\vec{A}. \quad (2.18)$$

În general, utilizarea teoremei integrale Helmholtz-Kirchhoff la calculul concret al perturbației optice se lovește de faptul că nu putem găsi o suprafață închisă Σ pe care să cunoaștem *exact* valorile lui E și ∇E . Totuși, în alegerea de mai sus a acestei suprafețe

avem avantajul că *intuim* ca adevărate următoarele proprietăți simple, cunoscute sub denumirea de *condițiile lui Kirchhoff*:

1). Valorile lui E și ∇E pe suprafața A , a aperturii, nu sunt influențate de prezența ecranului,* astfel că aceste funcții sunt date numai de câmpul optic al sursei S , ajuns la nivelul aperturii din ecranul opac. Această presupunere este valabilă dacă dimensiunea D a aperturii satisface relația $D \gg \lambda (\approx (4-7) \cdot 10^2 \text{ nm})$, în domeniul vizibil), condiție îndeplinită în toate cazurile practice.

2). Valorile lui E și ∇E pe suprafața B , din imediata vecinătate a spatelui ecranului opac, au valori neglijabile în comparație cu cele de pe suprafața A , astfel că, în calcul, *le vom considera nule*. Desigur, această presupunere este valabilă pentru ecrane conductoare și de grosime mai mare decât grosimea în care se manifestă efectul pelicular (skin). Vom admite, deci, că, ecranul este *perfect opac*, impenetrabil.

Aceste condiții idealizează situația fizică reală, deoarece prezența unui paravan opac cu apertură (sau a unui obstacol) în drumul razelor va avea, cu certitudine, un efect perturbator de o anumită intensitate asupra câmpului E , iar umbra în imediata vecinătate a aperturii (sau obstacolului) nu va fi niciodată bine definită. Dacă admitem însă că: a). dimensiunile aperturii (obstacolului) sunt mari în comparație cu lungimea de undă a luminii și că b). punctul de observație al câmpului luminos difractat este situat la distanță suficient de mare de apertură (sau obstacol), eroarea pe care o comitem, considerând adevărate ipotezele lui Kirchhoff, este mică.

Să elucidăm acum ce contribuție va aduce suprafața sferică C la integrala (2.18). Suntem tentați să afirmăm că deoarece funcțiile E și G descresc ca $1/R$ la creșterea razei sferei C , pentru $R \rightarrow \infty$ contribuția fiecăruia din cei doi termeni din paranteza dreaptă ar fi nulă. Argumentul este insuficient deoarece aria sferei C crește ca R^2 și descreșterea ca $1/R^2$ din fiecare termen este compensată. Fără să analizeze prea riguros aceste aspecte, Kirchhoff a admis că:

3). Valorile lui E și ∇E pe suprafața sferică C pot fi considerate nule dacă raza acesteia este suficient de mare. Cu alte cuvinte, în tratarea lui Kirchhoff, suprafața C , aleasă de rază R cât mai mare, nu aduce nici-o contribuție la integrala (2.18).

Cu aceste presupuneri simplificatoare, intuitive (și în principiu discutabile), câmpul optic $E(P)$ este dat numai de integrala $\iint_A [\dots] \cdot d\vec{A}$ luată pe suprafața aperturii.

Câmpul optic produs, la nivelul aperturii, de sursa luminoasă punctuală S , este dat de unda sferică divergentă primară

$$E \equiv E_{\text{prim}} = E_0 \frac{e^{i(ks - \omega t)}}{s}, \quad (2.19)$$

semnificația parametrului s fiind cea indicată pe desen.

Teorema integrală Helmholtz-Kirchhoff ne conduce, în acest caz simplu, la următoarea expresie a câmpului optic în domeniul de observație

* Exceptăm punctele a căror distanță de marginea ecranului este de ordinul lungimii de undă λ (sau mai mică), și în care influența oscilațiilor induse de sarcinile electrice din ecran este predominantă și foarte complicată.

$$E(P) = \frac{E_0 \exp(-i\omega t)}{4\pi} \iint_A \left[\frac{e^{ikr}}{r} \nabla \left(\frac{e^{iks}}{s} \right) - \frac{e^{iks}}{s} \nabla \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \right] d\vec{A}, \quad (2.20)$$

unde $d\vec{A} = \vec{N}dA$ este elementul de arie orientat, ca de obicei, pe versorul ($|\vec{N}| = 1$) normalei exterioare \vec{N} la suprafața aperturii (A).

În problemele practice de difracție se măsoară întotdeauna *intensitatea luminoasă* $I = E^*E$. De aceea, factorul armonic temporal $\exp(-i\omega t)$ nu este relevant. În schimb, factorii armonici spațiali, $\exp(iks)$ și $\exp(ikr)$, de sub semnul de integrare, sunt decisivi deoarece ei determină faza de oscilație a diverselor puncte din suprafața aperturii. În domeniul optic, numărul de undă $k = 2\pi/\lambda$ are valori mari (pentru $\lambda = 628 \text{ nm}$, de exemplu, avem $k = 10^5 \text{ cm}^{-1}$) și, de aceea, chiar la variații mici ale lui s și / sau r , faza variază semnificativ.

Pentru calculul integralei de mai sus reamintim expresia produsului scalar de forma

$$\nabla f(\vec{r}) \cdot d\vec{A} = \nabla f(\vec{r}) \cdot \vec{N}dA = \frac{\partial f}{\partial r} \cos \left(\hat{N}, \hat{r} \right) dA. \quad (2.21)$$

Astfel, putem scrie

$$\begin{aligned} \nabla \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \cdot d\vec{A} &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \cos \left(\hat{N}, \hat{r} \right) dA = \\ &= \left(\frac{ik}{r} - \frac{1}{r^2} \right) e^{ikr} \cos \left(\hat{N}, \hat{r} \right) dA \approx ik \frac{e^{ikr}}{r} \cos \left(\hat{N}, \hat{r} \right) dA, \end{aligned} \quad (2.22)$$

unde am folosit *aproximația difracției la distanță mare*

$$\frac{1}{r} \ll k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad r \gg \lambda \left(\approx (4-7) \cdot 10^{-7} \text{ m} \right), \quad (2.23)$$

corespunzătoare *situațiilor practice* întâlnite în experiențele uzuale de difracție luminoasă.

În mod similar, în limita $s \gg \lambda$ obținem

$$\nabla \left(\frac{e^{iks}}{s} \right) \cdot d\vec{A} \approx ik \frac{e^{iks}}{s} \cos \left(\hat{N}, \hat{s} \right) dA. \quad (2.24)$$

Revenind în teorema integrală (2.20) obținem *formula fundamentală a difracției*

$$E(P) = \frac{ikE_0 \exp(-i\omega t)}{4\pi} \iint_A \frac{e^{ik(s+r)}}{sr} \left[\cos \left(\hat{N}, \hat{s} \right) - \cos \left(\hat{N}, \hat{r} \right) \right] dA, \quad (2.25)$$

dedusă de Kirchhoff (1883). Această relație, cunoscută și sub denumirea de *formula Fresnel-Kirchhoff*, reprezintă expresia matematică a *principiului Huygens-Fresnel* aplicat la difracție.

Suntem datori să precizăm că, în primele decenii ale secolului trecut, elaborând prima teorie ondulatorie a difracției (undelor elastice), Fresnel scrisese următoarea formulă

$$E(P) = E_0 \exp(-i\omega t) \iint_A K \frac{e^{ik(s+r)}}{sr} dA, \quad (2.26)$$

unde, așa cum rezultă din relația (2.25), *factorul de înclinare (oblicitate)* K are expresia

$$K = \frac{ik}{4\pi} \left[\cos(\hat{\vec{N}}, \hat{\vec{s}}) - \cos(\hat{\vec{N}}, \hat{\vec{r}}) \right]. \quad (2.27)$$

Acesta este motivul pentru care formula (2.25) - dedusă de Kirchhoff în 1883, se mai numește și formula Fresnel - Kirchhoff.

Să argumentăm de ce formula (2.25) (sau (2.26) cu K dat de (2.27)) reprezintă expresia matematică a principiului Huygens-Fresnel. Pentru aceasta, să ne referim concret la o situație particulară: cea a unei aperturi circulare și a unei surse punctiforme S , monocromatice, plasată chiar pe axul de simetrie (vezi fig.2.6). Cum am arătat, integrala pe apertură se poate face pe orice suprafață deschisă care se sprijină pe marginile sale. Să considerăm suprafața de integrare chiar calota sferică corespunzătoare din suprafața unei din dreptul aperturii. În acest caz, s este constant iar $\cos(\hat{\vec{N}}, \hat{\vec{s}}) = \cos 180^\circ = -1$, astfel că formula difracției devine

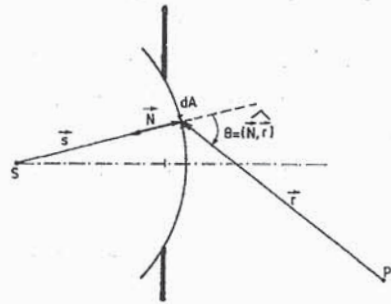


Fig.2.6. Difracția luminii pe o apertură circulară (sursa punctiformă S se află pe axul de simetrie al aperturii).

$$\begin{aligned} E(P) &= -\frac{ik}{4\pi} E_0 \frac{e^{i(ks-\omega t)}}{s} \cdot \iint_A \frac{e^{ikr}}{r} (1 + \cos\theta) dA = \\ &= E_{\text{prim}} \cdot \iint_A K(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} dA = \iint_A \frac{e^{ikr}}{r} dE_{\text{sec}} = \iint_A dE(P). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Aici am introdus *unghiul de difracție* $\theta = (\hat{\vec{N}}, \hat{\vec{r}})$, *câmpul optic al undei primare la apertură*

$$E_{\text{prim}} = E_0 \frac{e^{i(ks-\omega t)}}{s}, \quad (2.29)$$

factorul de înclinare (oblicitate) Fresnel

$$K(\theta) = -\frac{ik}{4\pi} (1 + \cos\theta), \quad (2.30)$$

și *câmpul optic al surselor punctuale, secundare, huygensiene*, de pe elementul de arie dA

$$dE_{\text{sec}} = K(\theta) E_{\text{prim}} dA. \quad (2.31)$$

Câmpul optic total, în P, rezultă astfel ca *superpoziția* (interferența, suma - aici integrala) undelor sferice secundare Huygens

$$dE(P) = dE_{\text{sec}} \frac{e^{ikr}}{r}. \quad (2.32)$$

Prin teoria scalară a difracției, elaborată de Kirchhoff, principiul Huygens-Fresnel capătă o *exprimare cantitativă "riguroasă"* și este eliberat de dificultatea legată de neargumentarea anulării radiației undelor secundare înapoi, spre sursa de lumină (S). Astfel, factorul de înclinare $K(\theta)$, introdus *formal* de către Fresnel, apare în mod natural în teoria lui Kirchhoff. El reprezintă dependența amplitudinii undelor secundare de unghiul de difracție, scăzând monoton cu creșterea lui θ , de la valoarea maximă $K'_{\text{max}} = K'(0^\circ) = 2$ (radiația emisă *înainte* este maximă) până la valoarea minimă $K'_{\text{min}} = K'(180^\circ) = 0$ (radiația emisă *înapoi* - "retro-radiația" - este nulă)*.

O altă precizare pe care o face teoria lui Kirchhoff este cea a existenței unui *defazaj* de $\pi/2$ radiani între undele secundare și câmpul undei primare. Într-adevăr, factorul (-i) din expresia factorului de înclinare se poate scrie sub forma $\exp(-i\frac{\pi}{2})$.

Aceste proprietăți bizare ale undelor secundare Huygens nu trebuie să ne mire. În fond, ele reflectă modul în care teoria scalară a difracției permite calculul perturbației optice $E(P)$, într-o manieră mult mai simplă decât cea care ar avea ca punct de plecare principiul suprapunerii undelor electromagnetice $E(P) = E_S + E_{\text{ecran}} \approx -E_{\text{dop}}$ (vezi experiența discutată în primul paragraf al acestui capitol).

Revenind la formula fundamentală a difracției, în forma ei generală, observăm simetria sa remarcabilă în raport cu sursa și punctul de observație. Aceasta înseamnă că efectul produs de sursa S în punctul P este același cu cel pe care, o sursă de egală intensitate, plasată în P, l-ar produce în S - rezultat cunoscut sub denumirea de *teorema de reciprocitate a lui Helmholtz*.

Observații: a) Înainte de precizarea celei de-a treia presupuneri făcute de Kirchhoff am atras atenția asupra faptului că ea nu a fost fundamentată prea riguros, la început. Acest lucru a fost făcut ceva mai târziu, în anul 1912, de către Sommerfeld, care a arătat că dacă

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left[R \left(\frac{\partial E}{\partial N} - ikE \right) \right] = 0, \quad (2.33)$$

atunci integrala pe suprafața sferică C este într-adevăr nulă. Justificarea acestei condiții - *condiția de radiație a lui Sommerfeld* - este următoarea. Pe suprafața C, a sferei cu centrul în P (vezi fig.2.5), putem scrie

$$G = \frac{1}{R} \exp(ikR)$$

și

$$\frac{\partial G}{\partial N} = \left(ik - \frac{1}{R} \right) \frac{\exp(ikR)}{R} \cong ikG,$$

* Ne referim numai la partea $K'(\theta) = 1 + \cos \theta$ din expresia factorului de înclinare.

dacă, în cele din urmă, admitem că R este suficient de mare. Atunci termenul de pe suprafața C din integrala (2.11) are forma

$$\iint_C \left[G \frac{\partial E}{\partial N} - E \frac{\partial G}{\partial N} \right] dA \cong \int_{\Omega} G \left(\frac{\partial E}{\partial N} - ikE \right) \cdot R^2 d\Omega,$$

unde Ω este unghiul solid sub care se vede suprafața C din P . Cum cantitatea $|RG|$ este uniform mărginită pe suprafața C , rezultă că ultima integrală tinde la zero când condiția lui Sommerfeld este îndeplinită.

b) Putem da și o altă demonstrație, mai generală și mai sofisticată, aceleiași afirmații, considerând situația în care avem de-a face cu mai multe surse luminoase, S_1, S_2, S_3, \dots , plasate într-o regiune spațial-finită (vezi fig.2.7). Să înconjurăm această regiune cu o suprafață închisă Λ și să presupunem că punctul de observație P rămâne în exteriorul acesteia. Desenăm cu centrul în P o suprafață sferică C , cu rază suficient de mare, care înglobează în interior și suprafața Λ . Având în vedere că în domeniul spațial cuprins între Λ și C nu există surse luminoase se poate utiliza formula (2.13) cu $\Sigma = \Lambda + C$. Să demonstrăm că integrala pe sfera C tinde spre zero când raza sferei tinde la infinit.

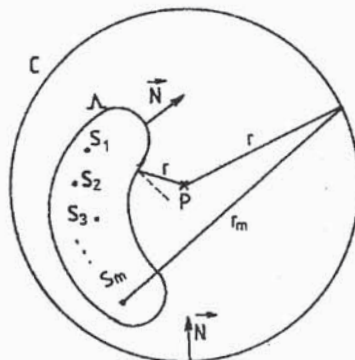


Fig.2.7. O suprafață sferică C , cu rază suficient de mare, care înconjoară sursele $S_j, j=1, \dots, m$, situate în domeniul finit Λ .

Câmpul surselor S_1, S_2, S_3, \dots pe suprafața C are forma

$$E = \sum_m A_m \frac{\exp(ikr_m)}{r_m},$$

unde A_m sunt niște coeficienți constanți. Deoarece atunci când r tinde spre infinit și distanțele r_m tind spre infinit putem scrie $r_m = r + a_m$, unde "distanțele" a_m rămân finite. Astfel avem

$$E = \sum_m A_m \frac{\exp ik(r+a_m)}{r+a_m} = \frac{\exp(ikr)}{r} \sum_m \frac{A_m \exp(ik a_m)}{1 + \frac{a_m}{r}}.$$

Putem nota $A_m \exp(ik a_m) \equiv B_m$ și dezvoltând în serie Taylor expresia $(1 + \frac{a_m}{r})^{-1}$ obținem

$$E = \frac{\exp(ikr)}{r} \left\{ \sum_m B_m - \frac{1}{r} \sum_m B_m a_m + O\left(\frac{1}{r^2}\right) \right\},$$

sau

$$E = \frac{e^{ikr}}{r} (D + F(r)) = G(r)(D + F(r)),$$

unde $G(r)$ este funcția Green în alegerea lui Kirchhoff, $D = \sum_m B_m$ iar $F(r)$ - restul seriei din interiorul acoladei. Când r tinde la infinit, funcția F tinde spre zero cel puțin ca $1/r$.

Integrala pe C din formula (2.13) are acum forma

$$\iint_C \left[G \frac{\partial E}{\partial N} - E \frac{\partial G}{\partial N} \right] dA = \iint_C G^2 \frac{\partial F}{\partial N} dA = \int_{\Omega} (Gr)^2 \frac{\partial F}{\partial N} d\Omega.$$

Deoarece derivata $\frac{\partial F}{\partial N}$ tinde spre zero, când $r \rightarrow \infty$, cel puțin ca $1/r^2$, în timp ce $|Gr|$ rămâne mărginită, rezultă că, într-adevăr, ultima integrală tinde spre zero. Prin urmare, pentru evaluarea lui $E(P)$, integrala (2.13) se poate lua numai pe suprafața Λ . Dacă o anumită porțiune a acestei suprafețe Λ se prelungește spre infinit, contribuția corespunzătoare la integrala (2.13) este evident nulă. Aceasta înseamnă că dacă, pentru situația reprezentată în fig.2.8, $\Lambda = A + B + \Lambda_{\infty}$, unde Λ_{∞} este o sferă infinit de mare cu centrul în O (centrul aperturii A), contribuția suprafeței Λ_{∞} la integrala (2.13) este nulă. Contribuția porțiunii B se elimină prin presupunerea 2) a lui Kirchhoff și rămâne, ca și în tratarea anterioară, numai contribuția de la apertura difractantă A .

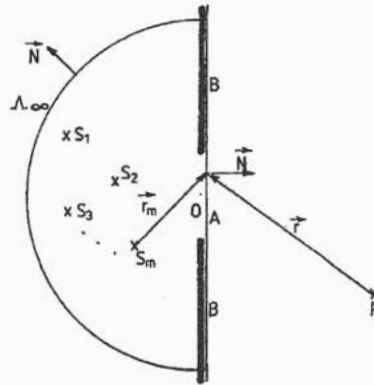


Fig.2.8. O alegere particulară a suprafeței închise $\Lambda (= A+B+\Lambda_{\infty})$.

c) Suntem datori să mai precizăm încă un lucru, nu chiar lipsit de importanță. Deși noi am afirmat că ne ocupăm de cazul undelor monocromatice, din punct de vedere practic așa ceva nu există. După cum se va arăta ulterior, o undă riguros monocromatică ar fi aceea ce ar corespunde unui act de emisie infinit din punct de vedere temporal. În practică, noi ne întâlnim cu unde cvasimonocromatice, formate din trenuri de unde, emise în intervale de timp de ordinul $\tau_c \approx 10^{-8}$ secunde, adică de lungime $l_c = c \cdot \tau_c \approx 3$ metri. Condiția ca raza R a sferei C să fie infinită poate fi înlocuită cu condiția fizică $R > l_c$, mult mai puțin restrictivă decât cea matematică. Anularea integralei despre care am vorbit, pe suprafața C , poate fi interpretată acum zicând că trenul *finit* al undei (cvasi) monocromatice, care trece prin apertură, nu a ajuns încă la suprafața C .

§. 2. 4. Teorema (principiul) lui Babinet

Fie S și P un punct sursă luminoasă, respectiv un punct de observație, ambele date, în poziții fixe. Să plasăm într-o poziție bine determinată, între S și P , un ecran opac infinit cu mai multe aperturi difractante A_1, A_2, \dots, A_n . Să notăm prin $E'(P)$ perturbația optică sosită în P , în urma difracției pe aperturile A_1, A_2, \dots, A_n .

Plasăm acum, în locul ecranului cu aperturi folosit anterior, în aceeași poziție, un ecran *complementar*, care este perfect opac în zonele A_1, A_2, \dots, A_n și perfect transmițător (difractant) în zonele care erau opace pe primul ecran utilizat. Fie $E''(P)$ perturbația optică sosită în P în urma difracției ce se produce în aceste condiții. Să notăm prin $E(P)$ perturbația optică ce ar sosi în punctul de observație P dacă între S și P nu ar fi interpus nici-un obstacol, adică dacă propagarea undelor s-ar face liber, fără nici-o obstrucție. Având în vedere că $E'(P)$ și $E''(P)$ sunt date de integralele lui Kirchhoff - de

forma (2.55) - luate pe arii complementare, a căror reuniune formează un plan infinit (apertură infinită), putem scrie

$$E'(P) + E''(P) = E(P). \quad (2.34)$$

Acest rezultat este cunoscut sub denumirea de *teorema (sau principiul) lui Babinet*.^{*} El rămâne valabil și în



Fig.2.9. Configurații pentru înțelegerea principiului lui Babinet.

cazul în care $E(P)$ se referă la câmpul optic din punctul P rezultat în urma difracției pe o deschidere oarecare \mathcal{D} dintr-un ecran opac - fig.2.9.a, iar $E'(P)$ și $E''(P)$ la câmpurile obținute prin difracție pe aperturile complementare reprezentate în fig.2.9.b și c. În ipoteza că domeniul \mathcal{D} este *destul de mare*, în așa fel încât difracția pe conturul acestei deschideri să fie neglijabilă, urmează că $E(P)$ reprezintă tocmai câmpul unei primare care, pornind din S , ajunge în P . În aceste condiții, dacă punctul P se află în zona de umbră geometrică a montajului, unda primară pornită din S nu ajunge în P și putem scrie $E(P) = 0$. Aceasta ne conduce la relația $E'(P) = -E''(P)$, respectiv la concluzia că $I'(P) = I''(P)$, prin I' și I'' înțelegând intensitățile luminoase corespunzătoare: $I' = |E'|^2$, $I'' = |E''|^2$.

Ca o consecință a principiului lui Babinet putem spune că, *excluzând iluminarea directă, figura de difracție rămâne neschimbată la înlocuirea deschiderilor (aperturilor) prin ecrane opace identice și reciproc*. De pildă, evitând iluminarea directă, difracția produsă de o fantă lungă și îngustă este identică (în distribuția de intensitate luminoasă) cu cea produsă de un fir opac lung și îngust, de aceeași grosime și lungime.

Cunoașterea relației (2.34) este importantă și în cazurile în care $E(P) \neq 0$. Într-adevăr, dacă doi termeni oarecare din această relație sunt cunoscuți, nu mai este necesară calcularea integralei Kirchhoff pentru aflarea celui de-al treilea termen: este suficient să realizăm doar adunarea sau scăderea a două numere complexe pentru aflarea acestui al treilea termen. Acest rezultat are aplicații practice deosebit de importante mai ales în cazul așa-numitei difracții Fraunhofer.

Prezentăm acum o altă consecință interesantă a principiului Babinet. Să considerăm un *corp negru* oarecare, adică un corp ce este capabil să absoarbă în întregime lumina ce cade asupra lui. Conform opticii geometrice, la iluminarea unui astfel de corp cu un fascicul paralel, dincolo de el ar trebui să se formeze o umbră geometrică cu o secțiune a cărei arie ar trebui să fie egală cu aria secțiunii în direcție perpendiculară pe direcția luminii incidente. Dacă dimensiunile corpului sunt mici, difracția conduce însă la devierea parțială a luminii de la direcția inițială și, în consecință, la distanțe mari în spatele corpului, nu va fi umbră. Mai mult, în afară de lumina care se propagă în direcția inițială, o anumită cantitate de lumină se va propaga sub unghiuri mici, de o parte și de alta a direcției inițiale. Cum se poate determina intensitatea acestei lumini difuzate?

Conform principiului lui Babinet, cantitatea de lumină deviată din cauza difracției pe corpul considerat este egală cu cantitatea de lumină deviată prin difracție pe un orificiu tăiat într-un ecran netransparent, a cărui formă și arie coincid cu forma și aria secțiunii transversale a corpului negru. Însă, la așa-numita difracție Fraunhofer (vezi mai departe) pe un orificiu, are loc devierea întregii lumini care trece prin orificiu. De aici, rezultă că putem pune semn de egalitate între cantitatea de lumină difuzată de corpul negru și cantitatea de lumină care cade pe suprafața sa și este absorbită de el.

* Jacques Babinet (1794-1872), fizician francez.

§. 2. 5. Formularea Rayleigh - Sommerfeld a problemei difracției pe un ecran opac plan, cu apertură

Deși teoria scalară a difracției dată de Kirchhoff dă rezultate în bună concordanță cu experiența, ea prezintă inconsecvențe matematice fundamentale. Ele au fost sesizate încă de la sfârșitul secolului de către Poincaré, Rayleigh și Sommerfeld, care au încercat diferite metode pentru depășirea lor. În acest paragraf ne propunem să prezentăm inconsistențele teoriei lui Kirchhoff și să arătăm în ce mod s-a reușit depășirea lor.

În analiza matematică se demonstrează că dacă o funcție *analitică* $E(x, y)$ și derivata ei normală $\partial E / \partial N$ se anulează identic pe un segment de curbă plană, atunci funcția respectivă va fi identic nulă în întregul plan (x, y) . Motivul este acela că, prin prelungire analitică de pe segmentul de curbă pe un întreg contur ea va fi egală cu zero pe întregul contur, deoarece, se știe, funcțiile analitice își realizează maximum și minimum pe contur. Extinzând această teoremă la funcții $E(x, y, z)$ de trei variabile, cum este cazul perturbației optice scalare din situația fizică pe care o avem în vedere, rezultă că din

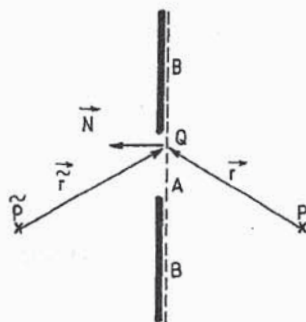


Fig.2.10. Alegerea lui Sommerfeld pentru funcția Green.

anularea pe porțiunea B a suprafeței închise Σ a funcției E și a gradientului ∇E (vezi condiția 2-Kirchhoff) ar urma, în mod obligatoriu, anularea lui E în întregul spațiu, ceea ce este contrar situației fizice reale. Înseamnă că în teorie ceva nu corespunde realității: fie funcția E nu este analitică - ceea ce nu e cazul, fie ipotezele lui Kirchhoff (1 și 2) sunt prea restrictive. S-a ajuns la concluzia că nu este justificat să pretindem ca funcțiile E și ∇E să se anuleze simultan pe porțiunea B (din spatele ecranului "opac" - vezi fig.2.10).

Sommerfeld a reușit să evite necesitatea anulării simultane a funcțiilor E și ∇E , prin alte alegeri, mai convenabile ale funcției Green, "de sondare", G . De exemplu, dacă în locul unei funcții G de forma (2.12) alegem o funcție de forma (vezi fig.2.10)

$$G_{-}(Q) = \frac{1}{r} \exp(ikr) - \frac{1}{\tilde{r}} \exp(ik\tilde{r}), \quad (2.35)$$

putem obține anularea $G_{-}(Q) = 0$ pentru orice punct Q de pe suprafața $A+B$. Această alegere a funcției Green presupune că pe lângă unda sferică divergentă emisă de sursa punctiformă P , mai există și o a doua undă, emisă de o sursă punctiformă \tilde{P} (un fel de imagine virtuală a lui P în "oglină" paravanului plan cu apertură) care emite aceeași lungime de undă, însă defazată cu π radiani față de prima.

Derivata după normală a funcției G_{-} are expresia

$$\frac{\partial G_{-}}{\partial N} = \cos\left(\hat{N}, \vec{r}\right) \left[ik - \frac{1}{r} \right] \frac{\exp(ikr)}{r} - \cos\left(\hat{N}, \vec{\tilde{r}}\right) \left[ik - \frac{1}{\tilde{r}} \right] \frac{\exp(ik\tilde{r})}{\tilde{r}}. \quad (2.36)$$

Când punctul Q este pe suprafața A sau B avem $r = \tilde{r}$ și $\cos\left(\hat{\vec{N}}, \vec{r}\right) = -\cos\left(\hat{\vec{N}}, \tilde{\vec{r}}\right)$. Prin urmare, *oriunde* s-ar afla punctul Q pe suprafața A + B, avem

$$G_-(Q) = 0, \quad (2.37)$$

respectiv

$$\frac{\partial G_-}{\partial N} \Big|_Q = 2 \cos\left(\hat{\vec{N}}, \vec{r}\right) \left(ik - \frac{1}{r}\right) \cdot \frac{\exp(ikr)}{r}. \quad (2.38)$$

O altă alegere pentru funcția Green, la fel de utilă, poate fi și următoarea

$$G_+(Q) = \frac{\exp(ikr)}{r} + \frac{\exp(ik\tilde{r})}{\tilde{r}}. \quad (2.39)$$

Situația fizică este identică celei anterioare, numai că, de data aceasta, sursele punctiforme P și \tilde{P} (vezi fig.2.10) oscilează în fază. Cu această alegere obținem

$$G_+(Q) = 2 \cdot \frac{\exp(ikr)}{r}, \quad (2.40)$$

și

$$\frac{\partial G_+}{\partial N} \Big|_Q = 0, \quad (2.41)$$

când punctul Q se află pe suprafața A + B, în *orice* poziție.

Să introducem acum funcția G_- dată prin (2.35) în formula generală

$$E(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left[G \frac{\partial E}{\partial N} - E \frac{\partial G}{\partial N} \right] \cdot dA,$$

în locul funcției G - de tip "sondă virtuală". Presupunând că $r \gg \lambda$, obținem ușor

$$E(P) = \frac{1}{i\lambda} \iint_A E(Q) \frac{\exp(ikr)}{r} \cos\left(\hat{\vec{N}}, \vec{r}\right) dA, \quad (2.42)$$

o formulă ce permite determinarea lui $E(P)$ numai din cunoașterea perturbației $E(Q)$ la nivelul aperturii. Păstrând prima supoziție a lui Kirchhoff, cea de-a doua a fost relaxată în mod esențial fără ca prin aceasta să apară inconsecvențe matematice.

Pentru a compara prezicerile teoriei Rayleigh - Sommerfeld (formula (2.42)) cu cele ale teoriei Kirchhoff*, să ne referim la situația simplă reprezentată în fig.2.5, în care sursa punctiformă, reală, S trimite spre apertura difractantă o undă sferică divergentă .Ne

* Pentru detalii vezi și E. Wolf, E.W. Marchand, *Comparison of the Kirchhoff and Rayleigh - Sommerfeld Theories of Diffraction at an Aperture*, în Journal of the Optical Society of America, vol. 54 (5), pag. 587 - 594, 1964.

interesează perturbația optică ce ajunge în P. Acum, conform primei supoziții Kirchhoff putem scrie

$$E(Q) = E_0 \frac{\exp[i(ks - \omega t)]}{s} \quad (2.43)$$

și din (2.42) rezultă

$$E(P) = \frac{E_0 \exp(-i\omega t)}{i\lambda} \iint_A \frac{\exp[ik(s+r)]}{sr} \cos\left(\hat{\vec{N}}, \hat{\vec{r}}\right) dA. \quad (2.44)$$

Comparând această formulă, a lui Rayleigh - Sommerfeld, cu formula (2.25), a lui Kirchhoff, constatăm următoarea diferență

$$\left[\cos\left(\hat{\vec{N}}, \hat{\vec{r}}\right) \right]_{RS} = \frac{1}{2} \left[\cos\left(\hat{\vec{N}}, \hat{\vec{r}}\right) - \cos\left(\hat{\vec{N}}, \hat{\vec{s}}\right) \right]_K, \quad (2.45)$$

ce se referă numai la semnificația geometrică a factorului de înclinare.

Lăsăm deducerea formulei Rayleigh - Sommerfeld pentru cazul alegerii funcției Green $G_+(Q)$ pe seama cititorului - ca un exercițiu de calcul. Obținem în final

$$E(P) = -\frac{E_0 \exp(-i\omega t)}{i\lambda} \iint_A \frac{\exp[ik(s+r)]}{sr} \cos\left(\hat{\vec{N}}, \hat{\vec{s}}\right) dA, \quad (2.46)$$

cu corespondența

$$\left[\cos\left(\hat{\vec{N}}, \hat{\vec{s}}\right) \right]_{RS} = \frac{1}{2} \left[\cos\left(\hat{\vec{N}}, \hat{\vec{s}}\right) - \cos\left(\hat{\vec{N}}, \hat{\vec{r}}\right) \right]_K. \quad (2.47)$$

Să extindem discuția de până acum la cazul în care undele luminoase sunt *nemonocromatice*. Fie $e(P, t)$ perturbația optică scalară din punctul de observație P și $e(Q, t)$ perturbația optică scalară incidentă în punctul Q al aperturii difractante. Aceste funcții pot fi reprezentate Fourier sub forma

$$e(P, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(P, \nu) \exp(2\pi i \nu t) d\nu, \quad (2.48)$$

$$e(Q, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(Q, \nu) \exp(2\pi i \nu t) d\nu, \quad (2.49)$$

unde $E(P, \nu)$ și $E(Q, \nu)$ sunt așa-numitele *spectre - Fourier* (ν reprezintă frecvența optică).

Dacă în aceste relații facem schimbarea de variabilă $\nu' = -\nu$ obținem

$$e(P, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(P, -\nu') \exp(-2\pi i \nu' t) d\nu', \quad (2.50)$$

$$e(Q, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(Q, -\nu') \exp(-2\pi i \nu' t) d\nu', \quad (2.51)$$

și aceste relații pot fi privite ca exprimând funcțiile nemonocromatice, de timp, $e(P, t)$ și $e(Q, t)$ sub forma unor combinații liniare de funcții monocromatice de tipul discutat până acum. Funcțiile monocromatice elementare corespund la diferite frecvențe ν' și au

amplitudinile complexe $E(P, -v')$, respectiv $E(Q, -v')$. Având în vedere liniaritatea fenomenului de propagare a undelor putem scrie formule de tip Rayleigh - Sommerfeld (vezi (2.44) și (2.46)) pentru fiecare amplitudine complexă elementară monocromatică, după care sumăm conform relațiilor (2.50) și (2.51).

Conform ecuației (2.44), de exemplu, avem

$$E(P, -v') = -i \frac{v'}{c} \iint_A E(Q, -v') \frac{1}{r} \exp(2\pi i v' \frac{r}{c}) \cos\left(\hat{\vec{N}}, \hat{\vec{r}}\right) dA, \quad (2.52)$$

unde $\lambda' v' = c$. Revenind acum în ecuația (2.50) și intervertind ordinea de integrare obținem

$$e(P, t) = \iint_A \frac{\cos\left(\hat{\vec{N}}, \hat{\vec{r}}\right)}{2\pi c r} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} (-2\pi i v') E(Q, -v') e^{-2\pi i v' \left(t - \frac{r}{c}\right)} dv' \right] dA. \quad (2.53)$$

Având în vedere identitatea (ce rezultă direct din (2.51))

$$\frac{d}{dt} [e(Q, t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} (-2\pi i v') E(Q, -v') \exp(-2\pi i v' t) dv', \quad (2.54)$$

putem transcrie rezultatul anterior sub forma

$$e(P, t) = \frac{1}{2\pi c} \iint_A \frac{\cos\left(\hat{\vec{N}}, \hat{\vec{r}}\right)}{r} \frac{d}{dt} \left[e(Q, t - \frac{r}{c}) \right] dA. \quad (2.55)$$

Conchidem că perturbația optică în punctul P este proporțională cu derivata temporală a perturbației din fiecare punct Q al aperturii luată la un moment de timp anterior cu r/c timpului din punctul de observație. Timpul r/c este necesar perturbației optice pentru a se propaga de la Q la P și prezența sa în expresia anterioară reflectă matematic *principiul cauzalității* (efectul în P este ulterior cauzei din Q).

Din cele prezentate aici putem trage concluzia că studiul difracției undelor perfect monocromatice nu este important numai din punct de vedere academic, ci și din punct de vedere practic. Într-adevăr, abordarea problemei difracției undelor reale, nemonocromatice, se poate face prin sinteza rezultatelor obținute în cazul difracției celor perfect monocromatice. Pe de altă parte, după apariția surselor laser, studiul direct al difracției undelor monocromatice este important și prin el însuși, nu numai ca un auxiliar necesar pentru abordarea cazului undelor nemonocromatice.

§. 2. 6. Difracția Fraunhofer și difracția Fresnel

În mod tradițional, în studiul practic, detaliat, al problemelor de difracție se face distincție netă între două cazuri extreme: difracția de tip Fraunhofer și difracția de tip Fresnel. Calitativ, spunem că avem de-a face cu difracție Fraunhofer atunci când atât unda

incidentă, cât și unele difractate pot fi considerate unde plane. Acest lucru este adevărat atunci când atât sursa S cât și punctul receptor (de observație) P se află la distanțe foarte mari de apertura difractantă, în așa fel încât curbura fronturilor de undă la nivelul aperturii să poată fi neglijată. Dimpotrivă, dacă punctele S și P sunt relativ apropiate de apertura difractantă (dar, totuși, relativ depărtate de apertură, pentru ca aproximațiile $s, r \gg \lambda$ utilizate deja la deducerea formulei (2.25) să fie adevărate), în așa fel încât curbura fronturilor de undă să nu mai poată fi neglijată, se spune că avem de-a face cu difracție Fresnel. Cu toate acestea, așa cum ne vom convinge mai departe, nu se poate spune că există o distincție netă între cele două tipuri de difracție. Dacă distincția se face totuși - și vom stabili în acest sens și criterii cantitative - aceasta este motivată de posibilitatea simplificării adecvate a formulei generale (2.25), respectiv a înlesnirii calculului matematic al perturbației optice din punctul de observație.

După cum rezultă din formula (2.26), perturbația optică $E(P)$ depinde de mai mulți factori: a) de geometria concretă a problemei, caracterizată de suma $s+r$ și de produsul $s \cdot r$, b) de factorul de înclinare K - legat la rândul său și de geometria problemei și c) de forma aperturii difractante, respectiv a conturului care o delimitează în planul ecranului opac. Să analizăm acum ce simplificări putem opera în formula (2.26), adică în factorii a) - c) menționați, pentru a înlesni utilizarea ei în situațiile practice uzuale. Înainte de aceasta, vom reaminti că la deducerea formulei (2.25), adică, până la urmă, a formulei (2.26), am presupus îndeplinită inegalitatea dublă $s, r \gg D \gg \lambda$, unde D este dimensiunea caracteristică, în plan transversal, a aperturii difractante. Din cauză că $s, r \gg D$, pentru orice poziție a punctului Q în planul aperturii, se poate admite că factorul de înclinare K are o variație nesemnificativă, fiind practic constant. Pentru deschideri D relativ mici, același lucru se poate spune și despre produsul $s \cdot r$ care apare la numitor în integrandul formulei Kirchhoff - Fresnel. În aceste condiții, cantitatea $K/s \cdot r$ fiind practic constantă se poate scoate în fața integralei și obținem

$$E(P) = \frac{E_0 K}{sr} \exp(-i\omega t) \iint_A \exp[ik(r+s)] dA. \quad (2.56)$$

Valoarea raportului K/sr din fața integralei se poate evalua pentru o anumită poziție "mediană" a punctului Q în planul aperturii pe care, în mod convențional, o putem considera ca origine O în acest plan. Dacă notăm prin C întreaga expresie complexă din fața integralei ($|C| = E_0 K_0 / s_0 r_0$) avem

$$E(P) = C \iint_A \exp[ik(r+s)] dA, \quad (2.57)$$

o formulă fundamentală a difracției, mult simplificată față de formula originală (2.25).

Sub integrală a rămas numai factorul de fază

$$e^{i\phi} \equiv e^{ik(s+r)} = \exp\left(\frac{2\pi i}{\lambda}(s+r)\right), \quad (2.58)$$

care este o funcție rapid oscilantă pe suprafața aperturii, căci $s, r(\gg D) \gg \lambda$.

În aproximația aperturii mici considerate, distanțele s și r sunt atât de mari față de D încât este util să le dezvoltăm în serie în jurul valorilor s_0 și r_0 din origine

(vezi fig.2.11). Avem evident $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\rho}$, respectiv $\vec{s} = \vec{s}_0 + \vec{\rho}$, adică

$$r^2 = r_0^2 + \rho^2 + 2\vec{r}_0 \cdot \vec{\rho}, \quad r = r_0 \left(1 + \frac{\rho^2 + 2\vec{r}_0 \cdot \vec{\rho}}{r_0^2} \right)^{1/2}. \quad (2.59)$$

$$s^2 = s_0^2 + \rho^2 + 2\vec{s}_0 \cdot \vec{\rho}, \quad s = s_0 \left(1 + \frac{\rho^2 + 2\vec{s}_0 \cdot \vec{\rho}}{s_0^2} \right)^{1/2}. \quad (2.60)$$

Utilizând formula generală $(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \dots$, ($|x| < 1$), și oprind dezvoltarea la termeni de ordinul al doilea în ρ , avem

$$r = r_0 + \frac{1}{r_0}(\vec{r}_0 \cdot \vec{\rho}) + \frac{1}{2r_0} \left[\rho^2 - \frac{1}{2}(\vec{r}_0 \cdot \vec{\rho})^2 \right] \equiv r_0 + \Delta r, \quad (2.61)$$

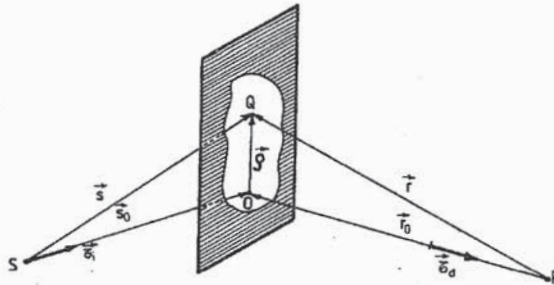


Fig.2.11. Configurație geometrică generală pentru problema difracției.

respectiv

$$s = s_0 + \frac{1}{s_0}(\vec{s}_0 \cdot \vec{\rho}) + \frac{1}{2s_0} \left[\rho^2 - \frac{1}{2}(\vec{s}_0 \cdot \vec{\rho})^2 \right] \equiv s_0 + \Delta s. \quad (2.62)$$

Introducând versorii $\vec{\tau}_i = \vec{s}_0/s_0$ (pentru raza de lumină incidentă în originea O) și $\vec{\tau}_d = -\vec{r}_0/r_0$ (pentru raza de lumină difractată din originea O spre punctul P) putem scrie următoarele expresii pentru *diferențele de drum* Δr și Δs :

$$\Delta r = -(\vec{\rho} \cdot \vec{\tau}_d) + \frac{1}{2r_0} \left[\rho^2 - (\vec{\rho} \cdot \vec{\tau}_d)^2 \right], \quad (2.63)$$

* În optica ondulatorie, prin rază de lumină înțelegem vectorul de propagare \vec{k} . Această afirmație este adevărată în cazul mediilor izotrope. În cazul mediilor anizotrope, raza de lumină corespunde vectorului Poynting \vec{S} (care, în general, nu are același suport cu vectorul de undă \vec{k}) - vezi vol.II, al cărții noastre.

$$\Delta s = +(\vec{\rho} \cdot \vec{\tau}_i) + \frac{1}{2s_0} \left[\rho^2 - (\vec{\rho} \cdot \vec{\tau}_i)^2 \right]. \quad (2.64)$$

În toate cazurile practice, razele de lumină incidente și difractate sunt *aproape perpendiculare* pe planul aperturii, astfel că termenii $(\vec{\rho} \cdot \vec{\tau}_d)^2$ și $(\vec{\rho} \cdot \vec{\tau}_i)^2$ pot fi neglijați față de ρ^2 în interiorul parantezelor drepte. Avem aproximativ

$$r = r_0 + \Delta r = r_0 - (\vec{\rho} \cdot \vec{\tau}_d) + \frac{\rho^2}{2r_0}, \quad (2.65)$$

$$s = s_0 + \Delta s = s_0 + (\vec{\rho} \cdot \vec{\tau}_i) + \frac{\rho^2}{2s_0} \quad (2.66)$$

și formula fundamentală a difracției devine

$$E(P) = C \iint_A e^{i\varphi} dA = C' \iint_A e^{ik(\Delta s + \Delta r)} dA = C' \iint_A e^{i\Delta\varphi} dA, \quad (2.67)$$

unde factorul constant de fază $\exp[ik(s_0 + r_0)]$, corespunzător originii O, a fost înglobat în constanta complexă C' din fața integralei iar

$$\Delta\varphi = k(\Delta s + \Delta r) = k \left[\vec{\rho} \cdot (\vec{\tau}_i - \vec{\tau}_d) + \frac{\rho^2}{2} \left(\frac{1}{s_0} + \frac{1}{r_0} \right) \right], \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (2.68)$$

este *diferența de fază* corespunzătoare diferenței de drum $\Delta s + \Delta r$.

Cazul cel mai simplu de difracție, și din fericire și cel mai important în practică, denumit *difracție Fraunhofer*, corespunde situațiilor în care r_0 și s_0 sunt atât de mari încât termenul proporțional cu ρ^2 în expresia lui $\Delta\varphi$ devine neglijabil față de termenul liniar. Există mai multe criterii de descriere cantitativă a posibilității neglijarii termenului pătratic în ρ . De cele mai multe ori, se consideră că acest termen poate fi neglijat atunci când contribuția sa la fază este mult mai mică decât $\pi/2$ * adică dacă

$$\frac{k}{2} \rho^2 \left(\frac{1}{s_0} + \frac{1}{r_0} \right) \ll \frac{\pi}{2}. \quad (2.69)$$

Notând dimensiunea liniară maximă a aperturii prin D, adică $\rho_{\max} = D$ și introducând dimensiunea caracteristică L prin relația de definiție

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{s_0} + \frac{1}{r_0}, \quad (2.70)$$

condiția de difracție Fraunhofer se scrie sub forma

* Se are în vedere că o variație $\Delta\varphi = \pi/2$ conduce la variații mari ale lui $\sin(\Delta\varphi)$ și $\cos(\Delta\varphi)$, adică ale lui $\exp(i\Delta\varphi)$. În unele lucrări se adoptă criteriul mai restrictiv ca $\Delta\varphi \ll 1$ radian.

$$\frac{2D^2}{\lambda L} \ll 1. \quad (2.71)$$

Dimpotrivă, dacă s_0 și/sau r_0 (adică până la urmă L) nu sunt prea mari, termenul pătratic în ρ nu mai poate fi neglijat și avem *condiția de difracție Fresnel*

$$\frac{2D^2}{\lambda L} \gg 1. \quad (2.72)$$

Exemplificăm aceste condiții considerând, de exemplu, $D = 1 \text{ mm}$ și $\lambda = 500 \text{ nm}$. Avem difracție Fraunhofer dacă $L \gg 4 \text{ m}$, și difracție Fresnel dacă $L \ll 4 \text{ m}$. Dacă $s_0 = r_0$ avem $s_0 = r_0 = 2L$, ceea ce înseamnă difracție Fresnel pentru distanțe s_0 și r_0 mult mai mici decât 8 m și difracție Fraunhofer pentru aceleași distanțe mult mai mari decât 8 m .

Un alt criteriu, mai puțin corect, care se utilizează (totuși) uneori, afirmă că difracția este de tip Fraunhofer dacă diferența de drum corespunzătoare termenului pătratic în ρ este mult mai mică decât λ . Pentru exemplul numeric dat mai sus ar rezulta $L \gg 1 \text{ m}$ sau $s_0 = r_0 \gg 2 \text{ m}$. Noi preferăm să-l utilizăm pe cel precizat inițial (sau unul ceva mai restrictiv, care cere defazaj maximal de $1,00$ radiani în loc de $\pi/2 = 1,57$ radiani).

Criteriul adoptat de noi în acest capitol poate fi interpretat și geometric. Într-adevăr, termenul pătratic în ρ din diferența de drum este o măsură a curburii frontului unei incidente și difractate, așa cum se arată în fig.2.12. Avem difracție Fraunhofer, adică fronturile de undă sunt efectiv plane, dacă termenul pătratic din diferența de drum este neglijabil față de $\lambda/4$, adică dacă $D^2/2L \ll \lambda/4$, ceea ce coincide cu relația (2.71). Din contră, atunci când $D^2/2L \gg \lambda/4$, curbura fronturilor de undă este importantă și difracția este de tip Fresnel.

Această scurtă analiză ne permite să înțelegem de ce, în limbaj uzual, difracția de tip Fraunhofer se mai numește *difracție în fascicul paralel* iar difracția de tip Fresnel - *difracție în fascicul divergent*.

Criteriul adoptat mai sus nu trebuie interpretat ca o demarcație *netă* deoarece trecerea de la difracția Fraunhofer la difracția Fresnel are loc în mod continuu, prin domeniul intermediar în care $2D^2/\lambda L \approx 1$. De aceea, în locul semnelor de "mult mai mare" sau "mult mai mic" în relațiile (2.71) și (2.72) se pot utiliza, la fel de bine, semnele "mai mare" și respectiv "mai mic".

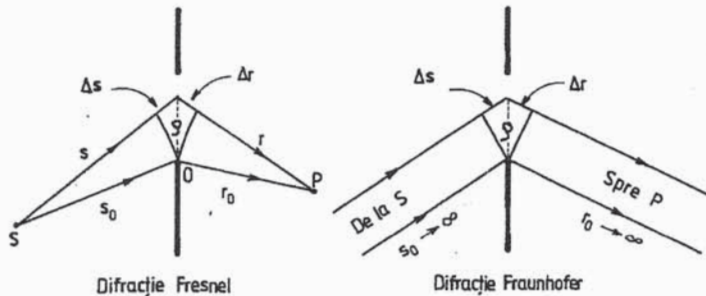


Fig.2.12. Curbura frontului de undă la nivelul aperturii difractante în cazurile de difracție Fresnel, respectiv Fraunhofer.

Evident, în aproximația opticii geometrice, când $\lambda \rightarrow 0$, avem $2D^2/\lambda L \rightarrow \infty$, și lumina se propagă rectiliniu, fără difracție.

Anticipând rezultatele aplicațiilor care urmează, în fig.2.13 reprezentăm calitativ distribuția intensității luminoase $I = E^*E = |E|^2$ pe un ecran de observație paralel cu ecranul opac în care este practică o apertură difractantă sub formă de fantă rectangulară infinit de lungă. La distanțe r_0 "mici", la dreapta ecranului cu apertură, avem difracție de tip Fresnel iar la distanțe "mari" figura de difracție este de tip Fraunhofer. În domeniul de tranziție $r_0 \approx 2D^2/\lambda$, figura de difracție este complicată și avem de-a face cu difracția "hibridă" Fresnel - Fraunhofer. Optica geometrică este aproximativ valabilă pentru $r_0 \ll 2D^2/\lambda$ (cu $\lambda \rightarrow 0$), adică în apropierea imediată a ecranului cu apertură.

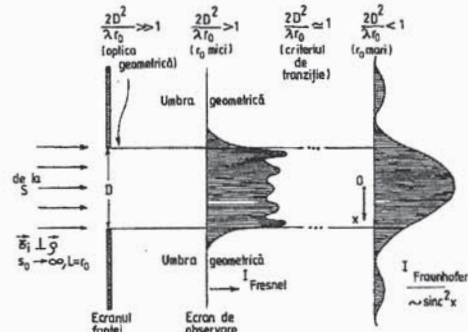


Fig.2.13. Tipuri de aproximații, în funcție de distanță, la difracția unei unde plane, incidentă normal, pe o fantă rectangulară.

În continuare, vom da expresiile generale ale integralelor de difracție Fresnel și Fraunhofer, pe baza cărora, în paragrafele următoare, vom trece la studiul unor cazuri concrete.

Să considerăm mai întâi *difracția Fresnel*. Așa cum am văzut, în acest caz, curbura fronturilor undei incidente și/sau a celor difractate, respectiv termenii în ρ^2 din diferența de drum (fază) nu pot fi neglijați. Cel puțin una din cele două condiții $s_0 \rightarrow \infty$, $r_0 \rightarrow \infty$ nu este îndeplinită. Calculul integralei de difracție Fresnel este mult ușurat prin alegerea originii O în punctul de intersecție al dreptei SP (din fig.2.11) cu planul aperturii, astfel că $\vec{r}_i = \vec{r}_d$. În aceste condiții, termenul liniar (Fraunhofer) din formula (2.68) se anulează și avem

$$\Delta s + \Delta r = \frac{1}{2}\rho^2 \left(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{s_0} \right) = \frac{\rho^2}{2L}, \tag{2.73}$$

integrala de difracție Fresnel devenind

$$E(P) = C \iint_A \exp \left[i \frac{k\rho^2}{2L} \right] dA. \tag{2.74}$$

Alegând, de exemplu, sistemul cartezian de coordonate xOy în planul aperturii putem scrie $\rho^2 = x^2 + y^2$ și $dA = dx dy$, astfel că integrala de difracție factorizează într-un produs de *integrale Fresnel complexe*

$$E(P) = C \int_{x_1}^{x_2} \exp \left[\frac{ikx^2}{2L} \right] dx \cdot \int_{y_1}^{y_2} \exp \left[\frac{iky^2}{2L} \right] dy, \tag{2.75}$$

limitele x_1, x_2 și y_1, y_2 corespunzând gabariturii și formei aperturii.

În cazul *difracției Fraunhofer* (practic $s_0 \rightarrow \infty$ și $r_0 \rightarrow \infty$), termenul pătratic (Fresnel) din expresia diferenței de drum (fază) se anulează, adică fronturile de undă incident și difractat sunt plane. Avem

$$\Delta r + \Delta s = (\vec{r}_i - \vec{r}_d) \cdot \vec{\rho}, \quad (2.76)$$

$$\Delta \varphi = k(\Delta r + \Delta s) = (\vec{k}_i - \vec{k}_d) \cdot \vec{\rho}. \quad (2.77)$$

Corespunzător

$$E(P) = C \iint_A e^{i\Delta\varphi} dA = C \iint_A e^{-i\vec{\rho} \cdot (\vec{k}_d - \vec{k}_i)} dA. \quad (2.78)$$

Observăm că difracția (adică interacția luminii cu ecranul cu apertură) conduce în general la o schimbare a direcției de propagare dar nu și la o schimbare a lungimii de undă căci

$$|\vec{k}_i| = |\vec{k}_d| = k = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (2.79)$$

Să considerăm cazul simplu (și important pentru practică) al incidenței normale, adică $\vec{\rho} \cdot \vec{k}_i = 0$, respectiv $\Delta s = 0$. Alegând sistemul de coordonate xOy în planul aperturii putem scrie $\vec{k}_i(0, 0, k_z)$, $\vec{k}_d(k_x, k_y, k_z)$, $\vec{\rho}(x, y, 0)$ și corespunzător

$$\Delta \varphi = -\vec{\rho} \cdot \vec{k}_d = -(xk_x + yk_y) = -2\pi(xv_x + yv_y), \quad (2.80)$$

unde $v_x = k_x/2\pi$, $v_y = k_y/2\pi$ sunt *frecvențele spațiale*, analoge frecvenței temporale $v = \omega/2\pi$. Integrala de difracție Fraunhofer se scrie acum sub forma

$$E(P) = C \iint_A e^{-2\pi i(xv_x + yv_y)} dx dy. \quad (2.81)$$

Introducând *cosinuşii directori* $\vec{k}_d(k_x, k_y, k_z) = k_d(k \cos \alpha, k \cos \beta, k \cos \gamma)$, unde $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2$ sau $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$, direcția de observație \overline{OP} este determinată numai de doi cosinuşii directori (al treilea fiind fixat de condiția geometrică). Putem scrie simbolic $\overline{OP}(\alpha, \beta) = \overline{OP}(k_x, k_y) = \overline{OP}(v_x, v_y)$ iar în formula difracției putem nota simplu

$$E(P) = \tilde{E}(v_x, v_y). \quad (2.82)$$

Conchidem că expresia câmpului optic rezultă din interferența (însurarea, integrarea) undelor plane Huygensiene care se propagă *în aceeași direcție* de observație $\overline{OP}(v_x, v_y)$ dar cu diferențe de fază $\Delta \varphi = -2\pi(xv_x + yv_y)$ diferite.

Este de remarcat faptul că integrala de difracție Fraunhofer se poate scrie în formă standard de *transformată Fourier bidimensională*

$$\tilde{E}(v_x, v_y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} E(x, y) e^{-2\pi i(xv_x + yv_y)} dx dy, \quad (2.83)$$

unde amplitudinea complexă $E(x, y)$ mai poartă numele de *funcție de apertură*. În cazul simplu considerat până acum, al "aperturii constante",

$$E(x, y) = \begin{cases} C & \text{pe aria aperturii,} \\ 0 & \text{în rest.} \end{cases} \quad (2.84)$$

Astfel, deși formal am pus limitele de integrare $(-\infty, +\infty)$, integrala se efectuează de fapt *numai* pe domeniul aperturii, fixat de funcția de apertură.

Observație: Formula difracției Fraunhofer este valabilă și în cazul general, când amplitudinea complexă $E(x, y) = E_0(x, y) \exp[i\phi_0(x, y)]$ modulează spațial efectiv amplitudinea reală și/sau faza undelor plane Huygensiene care provin din diversele puncte ale aperturii. Practic, aceasta se realizează prin acoperirea aperturii cu o peliculă (film) transparentă de indice de refracție complex (există și atenuare prin absorbție) sau real (nu există absorbție, ci numai defazare), care modulează spațial (în amplitudine și fază sau numai în amplitudine) câmpul optic primar, provenit de la sursa S.

Nu vom dezvolta acum domeniul, deosebit de dinamic în ultimii ani, al tehnologiei modulatorilor spațiale de lumină, în amplitudine și/sau fază*. Precizăm, totuși, că există o mare diversitate de fenomene fizice, respectiv de principii, utilizate pentru realizarea lor. Cel mai simplu și cel mai cunoscut exemplu constă în folosirea plăcilor sau filmelor fotografice cu ajutorul cărora se modulează amplitudinea.

De o importanță deosebită pentru calculatoarele optice coerente sunt modulatorii optice care pot fi controlate prin semnal electric. Pentru ilustrare, vom da aici numai exemplul modulatorilor electrooptice. În acest caz, semnalul electric excită unde acustice în pelicula transparentă (solidă sau lichidă) care reprezintă apertura. Tensiunile elastice induse în mediu de unda sonoră cauzează variații corespunzătoare ale indicelui de refracție real (ale constantei dielectrice), deci modulația spațială a fazei luminii incidente.

Schema de principiu a unui calculator optic coerent pentru analiză spectrală Fourier bidimensională este dată în fig.2.14. Pentru comparație dăm în fig.2.15 și schema aranjamentului experimental obișnuit pentru observarea difracției Fraunhofer. Punctele S și P "se aduc de la infinit" la distanțe convenabile pe baza unui același principiu general: S se aduce cu un sistem (lentilă) de colimare iar P cu un sistem (lentilă) de focalizare.

Problemelor teoretice și practic-aplicative ale opticii Fourier le este dedicat, în întregime, Capitolul III al acestei cărți.

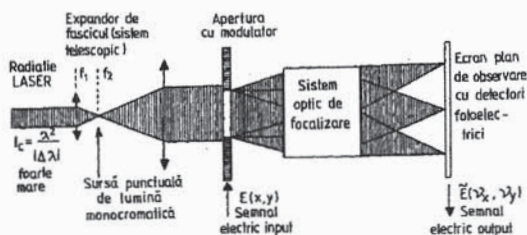


Fig.2.14. Schema de principiu a unui calculator optic coerent, pentru analiză spectrală Fourier bidimensională.

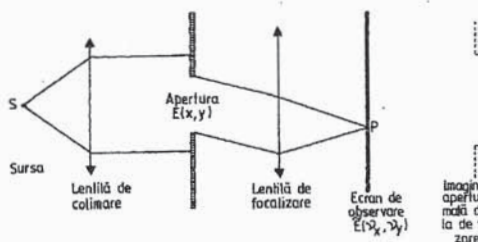


Fig.2.15. Schema unui montaj tipic pentru observarea difracției de tip Fraunhofer.

* Vezi, de exemplu, cartea lui K.Preston, *Coherent Optical Computers*, capitolul 5 (Spatial Light Modulators), Mc Graw - Hill Book Company, New York, 1972.

§. 2. 7. Aplicații ale difracției Fresnel

În paragraful 2.6 am demonstrat formula fundamentală a difracției

$$E(P) = C \iint_A e^{ik(\Delta s + \Delta r)} dA, \quad (2.67)$$

unde

$$\Delta s + \Delta r = \vec{\rho} \cdot (\vec{\tau}_i - \vec{\tau}_d) + \frac{1}{2} \rho^2 \left(\frac{1}{s_0} + \frac{1}{r_0} \right), \quad (2.85)$$

este diferența de drum a punctului curent (Q) din planul aperturii față de originea de integrare O. Dacă cel puțin una din condițiile $r_0 \rightarrow \infty$, $s_0 \rightarrow \infty$, nu este îndeplinită, termenul pătratic nu poate fi neglijat și avem de-a face cu o *difracție de tip Fresnel*.

În continuare, pentru simplificarea calculului, vom alege originea de integrare O în punctul de intersecție al dreptei SP (S - sursa, P - punctul de observație) cu planul aperturii, adică S, O și P sunt luate ca puncte coliniare. În această situație $\vec{\tau}_i = \vec{\tau}_d$, termenul linear în $\vec{\rho}$ (Fraunhofer) se anulează și integrala de difracție devine

$$E(P) = C \iint_A e^{\frac{ik}{2L} \rho^2} dA, \quad \frac{1}{L} = \frac{1}{s_0} + \frac{1}{r_0}. \quad (2.86)$$

În cele ce urmează, vom trece la studiul efectiv al câtorva situații (forme de aperturi) concrete.

2. 7. 1. Apertura rectangulară

În acest caz, este convenabil să alegem sistemul de coordonate xOy din planul aperturii cu axele paralele cu laturile aperturii, astfel că $\rho^2 = x^2 + y^2$, $dA = dx dy$ (vezi fig.2.16). Funcția de integrat se factorizează și formula difracției Fresnel devine

$$E(P) = C \int_{x_1}^{x_2} e^{\frac{ikx^2}{2L}} dx \cdot \int_{y_1}^{y_2} e^{\frac{iky^2}{2L}} dy. \quad (2.87)$$

Introducând variabilele adimensionale

$$u = x \sqrt{\frac{k}{\pi L}}, \quad v = y \sqrt{\frac{k}{\pi L}}, \quad (2.88)$$

putem transcrie integrala de mai sus sub forma

$$E(P) = K \int_{u_1}^{u_2} e^{\frac{i\pi}{2} u^2} du \cdot \int_{v_1}^{v_2} e^{\frac{i\pi}{2} v^2} dv, \quad (2.87')$$

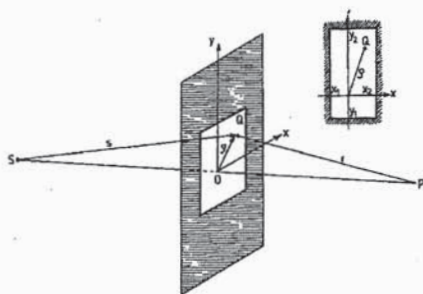


Fig.2.16. Difracție Fresnel pe o apertură dreptunghiulară.

unde $K = C\left(\frac{\pi L}{k}\right)$ este o nouă constantă. Integrala de difracție se prezintă acum sub forma unui produs de două *integrale Fresnel complexe*.

Înainte de a discuta consecințele fizice ale ultimei relații, să deschidem o paranteză în care să analizăm câteva aspecte matematice ale integralelor complexe de forma

$$F(w) = \int_0^w e^{i\frac{\pi}{2}t^2} dt = C(w) + iS(w), \quad (2.89)$$

unde

$$C(w) = \int_0^w \cos\left(\frac{\pi}{2}t^2\right) dt, \quad (2.90)$$

$$S(w) = \int_0^w \sin\left(\frac{\pi}{2}t^2\right) dt, \quad (2.91)$$

sunt *integralele reale ale lui Fresnel*. Ele nu pot fi calculate prin metode elementare, dar se găsesc tabelate în lucrări de funcții speciale (vezi, de exemplu, T. Pearcey, *Tables of Fresnel Integrals to Six Decimal Places*, Cambridge Univ. Press, 1956 și Anexa de la sfârșitul capitolului.)

Observăm că integralele reale ale lui Fresnel sunt impare, adică

$$C(-w) = -C(w), \quad S(-w) = -S(w), \quad (2.92)$$

astfel că, pentru ilustrare, prezentăm în figura alăturată (fig.2.17) numai ramura lor pozitivă. Remarcăm, în mod special, valorile din origine

$$C(0) = S(0) = 0 \quad (2.93)$$

și de la infinit

$$C(+\infty) = S(+\infty) = +\frac{1}{2}, \quad C(-\infty) = S(-\infty) = -\frac{1}{2}. \quad (2.94)$$

Integrala Fresnel complexă

$$F(w) = C(w) + iS(w), \quad (2.89)$$

este reprezentată în planul complex $C = \text{Re}F$, $S = \text{Im}F$ prin punctul de abscisă $C(w)$ și de ordonată $S(w)$. Pe măsură ce w variază, punctul F_w descrie o curbă, denumită *spirală lui Cornu* (1874)*, nomogramă care este deosebit de utilă în determinarea grafică a integralei Fresnel (vezi fig.2.18).

Spirala Cornu are două ramuri și două puncte asimptotice $F_{+\infty}$ - corespunzând lui $w = +\infty$ și $F_{-\infty}$ - corespunzând lui $w = -\infty$.

În formula difracției Fresnel apar integrale de tipul

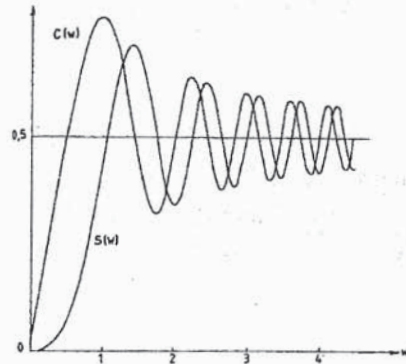


Fig.2.17. Dependența de w a integralelor Fresnel reale $C(w)$ și $S(w)$.

* Marie Alfred Cornu (1841-1902), fizician francez.

$$\int_{w_1}^{w_2} e^{\frac{i\pi w^2}{2}} dw = F(w_2) - F(w_1) =$$

$$= C(w_2) + iS(w_2) - (C(w_1) + iS(w_1)) =$$

$$= C(w_2) - C(w_1) + i(S(w_2) - S(w_1)). \quad (2.95)$$

Pentru a evalua intensitatea luminoasă $I = E^* \cdot E = |E|^2$ ne va interesa pătratul modului segmentului $\overline{F_1 F_2} = \overline{F_{w_1} F_{w_2}}$, adică

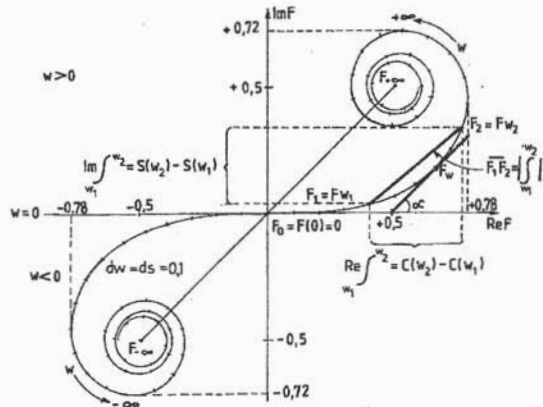


Fig.2.18. Spirala lui Cornu.

$$\overline{F_{w_1} F_{w_2}}^2 = \left| \int_{w_1}^{w_2} e^{\frac{i\pi w^2}{2}} dw \right|^2 = (C_2 - C_1)^2 + (S_2 - S_1)^2. \quad (2.96)$$

Lungimea arcului elementar ds de pe spirala Cornu, corespunzătoare variației infinitesimale dw este

$$ds \equiv d\overline{F} = (dC^2 + dS^2)^{1/2} = \left[\cos^2\left(\frac{\pi w^2}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi w^2}{2}\right) \right]^{1/2} dw = dw, \quad (2.97)$$

sau, luând originea arcelor $s = 0$ în centrul O al spiralei ($w = 0$), avem pur și simplu $s = w$.

Notând cu α unghiul tangentei la spirală cu axa reală, avem

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dS}{dC} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi w^2}{2}\right), \quad (2.98)$$

sau, deoarece $\alpha = 0$ la $w = 0$,

$$\alpha = \frac{\pi}{2} w^2 = \frac{\pi}{2} s^2, \quad (2.99)$$

relație care poate fi considerată ca *ecuație a spiralei Cornu*.

Pentru $w^2 = 1$ ($w = \pm 1$) avem $\alpha = \pi/2$, adică tangenta la spirală este verticală (paralelă cu axa S). Valorile $w = \pm 1$ corespund valorilor maximă și minimă ale funcției $C(w)$ - anume $C(-1) = -0,78$ este valoarea minimă iar $C(+1) = +0,78$ este valoarea maximă.

Pentru $w^2 = 2$ ($w = \pm\sqrt{2}$) obținem $\alpha = \pi$, adică tangenta la spirală este orizontală (paralelă cu axa C , dar de sens opus). Valorile $w = \pm\sqrt{2}$ corespund valorilor maximă și minimă ale funcției $S(w)$ - de aproximativ $\pm 0,72$.

Curbura $1/\rho$ a spiralei se calculează ușor cu formula $1/\rho = d\alpha/ds$. Obținem imediat

$$\rho = \frac{1}{\pi s} = \frac{1}{\pi w} \quad \text{sau} \quad \frac{1}{\rho} = \pi s = \pi w, \quad (2.100)$$

adică raza de curbură scade invers proporțional cu creșterea lungimii de arc, măsurată de la origine.

Să calculăm lungimea segmentului $\overline{F_{-\infty}F_{+\infty}}$ care unește cei doi poli ai spiralei. Analitic avem

$$\begin{aligned} \overline{F_{-\infty}F_{+\infty}}^2 &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \right|^2 = [C(+\infty) - C(-\infty)]^2 + [S(+\infty) - S(-\infty)]^2 = \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 = 2, \end{aligned}$$

adică

$$\overline{F_{-\infty}F_{+\infty}} = +\sqrt{2}. \quad (2.101)$$

Acest rezultat se poate obține și direct din graficul spiralei Cornu.

În mod similar, obținem

$$\overline{F_{-\infty}F_0} = \overline{F_0F_{+\infty}} = \frac{1}{2} \overline{F_{-\infty}F_{+\infty}} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (2.102)$$

Pentru diversele aplicații practice este utilă cunoașterea următoarelor dezvoltări în serie a integralei Fresnel complexe

$$F(w) = w \left[1 + \frac{i}{113} \left(\frac{\pi w^2}{2}\right) - \frac{1}{2!5} \left(\frac{\pi w^2}{2}\right)^2 - \frac{i}{3!7} \left(\frac{\pi w^2}{2}\right)^3 + \frac{1}{4!9} \left(\frac{\pi w^2}{2}\right)^4 - \dots \right], \quad (2.103)$$

sau

$$F(w) = F(\infty) + \frac{e^{\frac{i\pi w^2}{2}}}{i\pi w} \left(1 + \frac{1}{i\pi w^2} + \frac{1 \cdot 3}{(i\pi w^2)^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{(i\pi w^2)^3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{(i\pi w^2)^4} + \dots \right), \quad (2.104)$$

unde

$$F(\infty) = \frac{1+i}{2}. \quad (2.105)$$

Din aceste relații se pot scrie, apoi, separat, dezvoltările funcțiilor $C(w)$ și $S(w)$

$$C(w) = w \left[1 - \frac{1}{2!5} \left(\frac{\pi w^2}{2}\right)^2 + \frac{1}{4!9} \left(\frac{\pi w^2}{2}\right)^4 - \dots \right], \quad (2.106)$$

$$S(w) = w \left[\frac{1}{1!3} \left(\frac{\pi w^2}{2}\right) - \frac{1}{3!7} \left(\frac{\pi w^2}{2}\right)^3 + \frac{1}{5!11} \left(\frac{\pi w^2}{2}\right)^5 - \dots \right]. \quad (2.107)$$

Cu acestea putem considera încheiată paranteza referitoare la integralele lui Fresnel și putem trece la discutarea difracției Fresnel pe apertură dreptunghiulară. Transcriem formula (2.87) sub forma

$$E(P) = K \left[F(u_2) - F(u_1) \right] \cdot \left[F(v_2) - F(v_1) \right] = K \overline{F_{u_1} F_{u_2}} \cdot \overline{F_{v_1} F_{v_2}}, \quad (2.108)$$

astfel că intensitatea luminoasă în P devine

$$I(P) = |E(P)|^2 = |K|^2 \cdot |F(u_2) - F(u_1)|^2 \cdot |F(v_2) - F(v_1)|^2 = \\ = |K|^2 \overline{F_{u_1} F_{u_2}}^2 \cdot \overline{F_{v_1} F_{v_2}}^2. \quad (2.109)$$

În cazul aperturii infinite, adică al lipsei ecranului între sursă și receptor, avem intensitatea neperturbată I_0 dată de $u_1 = v_1 = -\infty$ și $u_2 = v_2 = +\infty$, adică

$$I_0 = |K|^2 \cdot |F(+\infty) - F(-\infty)|^2 \cdot |F(+\infty) - F(-\infty)|^2 = 4|K|^2. \quad (2.110)$$

Revenind în formula generală cu $|K|^2 = (1/4)I_0$ avem

$$I(P) = \frac{1}{4}I_0 \overline{F_{u_1} F_{u_2}}^2 \cdot \overline{F_{v_1} F_{v_2}}^2 = \frac{I_0}{4} \left\{ [C(u_2) - C(u_1)]^2 + \right. \\ \left. + [S(u_2) - S(u_1)]^2 \right\} \cdot \left\{ [C(v_2) - C(v_1)]^2 + [S(v_2) - S(v_1)]^2 \right\}, \quad (2.111)$$

unde cele patru limite de integrare sunt date de limitele aperturii dreptunghiulare prin relațiile

$$u_{1,2} = x_{1,2} \left(\frac{k}{\pi L} \right)^{1/2}, \quad v_{1,2} = y_{1,2} \left(\frac{k}{\pi L} \right)^{1/2}. \quad (2.112)$$

Interpretarea grafică a acestui rezultat este simplă: intensitatea luminii difractate în punctul P este dată de produsul pătratului modulelor a doi vectori care leagă punctele (u_1, u_2) , respectiv (v_1, v_2) de pe spirala Cornu. Evident, la variația dimensiunilor $x_{1,2}$, $y_{1,2}$ ale aperturii sau la deplasarea punctului de observație $P(r_0)$ sau/și a sursei $S(s_0)$, adică în general la variația lui L , variază și intensitatea luminoasă $I(P)$. Există, de asemenea, și o variație de intensitate datorată lungimii de undă a radiației utilizate, căci $k = 2\pi/\lambda$.

În continuare, vom considera unda incidentă plană, adică vom pune $s_0 \rightarrow \infty$, ceea ce înseamnă $L = r_0$, și vom aplica formula generală, obținută mai sus, la trei cazuri particulare: fanta, muchia dreaptă și firul opac.

2. 7. 2. Fanta foarte lungă

Fie o fantă foarte (infinit de) lungă, paralelă cu axa Oy (vezi fig.2.19), astfel că limitele $y_1 \rightarrow -\infty$, $y_2 \rightarrow +\infty$ ne conduc la $v_1 \rightarrow -\infty$, $v_2 \rightarrow +\infty$. Intensitatea luminii difractate pe fantă are astfel expresia

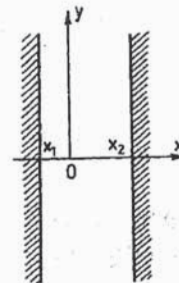


Fig.2.19. Fanta foarte lungă, de lărgime $x_2 - x_1$.

$$I(P) = \frac{I_0}{2} \overline{F_{u_1} F_{u_2}}^2 = \frac{I_0}{2} \left\{ [C(u_2) - C(u_1)]^2 + [S(u_2) - S(u_1)]^2 \right\}, \quad (2.113)$$

care depinde de doi parametri, $u_{1,2} = x_{1,2} \left(\frac{k}{\pi r_0} \right)^{1/2}$.

Să considerăm mai întâi comportarea intensității luminoase în punctul de observație P_0 , egal depărtat de marginile fantei, în funcție de lățimea fantei (fig.2.20). Translatând

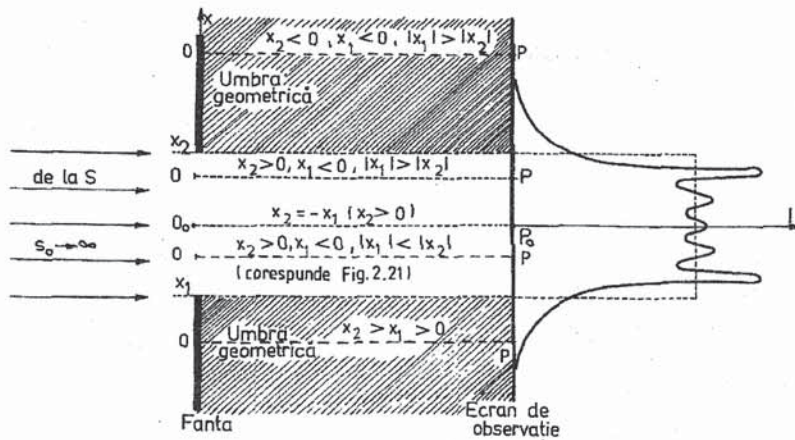


Fig.2.20. Distribuția de intensitate luminoasă în spatele fantei liniare, la difracția Fresnel, în cazul S_0 infinit de mare.

originea din O în O_0 (pentru ca S, O_0 și P_0 să fie coliniare) avem $x_2 = -x_1 > 0$, $u_2 = -u_1 = u > 0$ și corespunzător

$$I(P_0) = \frac{I_0}{2} \overline{F_{-u} F_{+u}}^2 = 2I_0 (C^2(u) + S^2(u)), \quad (2.114)$$

unde F_{-u} și F_{+u} sunt puncte simetrice ale spiralei lui Cornu, față de centrul său O (corespunzând lui $u = 0$). Lățimea fantei este

$$a = x_2 - x_1 = 2x_2 = 2u \left(\frac{\pi r_0}{k} \right)^{1/2}, \quad (2.115)$$

și putem scrie

$$I(P_0) = 2I_0 \left\{ \left[C \left(\frac{a}{2} \sqrt{\frac{k}{\pi r_0}} \right) \right]^2 + \left[S \left(\frac{a}{2} \sqrt{\frac{k}{\pi r_0}} \right) \right]^2 \right\}. \quad (2.116)$$

Variind lățimea fantei, parametrul a , adică variind u , de la zero la infinit, intensitatea $I(P_0)$ va crește de la valoarea zero (când F_{-u} și F_{+u} se confundă cu 0) până la o valoare maximă, corespunzătoare lungimii $\overline{F_{-u} F_{+u}}$ maxime între două puncte de pe spirala Cornu, după care

va oscila, cu o amplitudine descrescătoare în jurul valorii $(I_0/2) \overline{F_{-\infty} F_{+\infty}}^2 = I_0$. Valoarea neperturbată I_0 este atinsă în limita a, $u \rightarrow +\infty$.

Păstrând r_0 fixat, precum și lățimea fantei (a) constantă, să considerăm acum cazul în care deplasăm lateral punctul de observație din poziția simetrică P_0 , în poziția asimetrică P (vezi fig.2.20). Aceasta înseamnă că lungimea totală a arcului pe spirala Cornu, corespunzătoare lățimii fantei, rămâne constantă, adică

$$u_2 - u_1 = \left(\frac{k}{\pi r_0}\right)^{1/2} \cdot (x_2 - x_1) = \left(\frac{k}{\pi r_0}\right)^{1/2} \cdot a = \text{constant}, \quad (2.117)$$

indiferent de poziția punctului P. Intensitatea luminii în P va avea însă, în general, altă valoare

$$I(P) = \frac{I_0}{2} \overline{F_{u_1} F_{u_2}}^2, \quad (2.118)$$

unde punctele F_{u_1}, F_{u_2} , de pe spirala Cornu nu mai sunt simetrice (odată cu deplasarea lui P se deplasează și originea de integrare O pe fantă, astfel ca punctele S, O și P să rămână coliniare!). Astfel, punctele F_{-u} și F_{+u} de pe spirală, corespunzătoare limitelor pentru aflarea lui $I(P_0)$, alunecă cu *aceeași* lungime de arc Δs , în punctele F_{u_1} și respectiv F_{u_2} , corespunzătoare limitelor pentru aflarea lui $I(P)$. Din fig.2.21 este evident că pe măsură ce deplasăm punctul de observație P, lungimea segmentului $\overline{F_{u_1} F_{u_2}}$, deci intensitatea $I(P)$, va trece prin maxime și minime, scăzând apoi rapid și monoton în zona umbrei geometrice (vezi fig.2.20). Trecerea de la lumină la umbră va fi analizată mai detaliat în exemplul care urmează, cel al muchiei rectilinii.

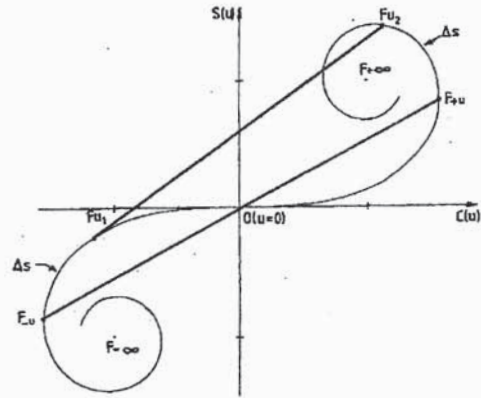


Fig.2.21. Utilizarea spiralei Cornu pentru calcularea intensității $I(P)$ la difracția Fresnel pe fantă.

2. 7. 3. Muchia rectilinie

Să considerăm un ecran opac, cu muchia dreaptă, paralelă cu axa Oy, astfel că, acum, limitele de integrare infinite sunt $y_1, v_1 \rightarrow -\infty, y_2, v_2 \rightarrow +\infty,$
 $x_1, u_1 \rightarrow -\infty,$ iar $x_2,$ respectiv $u_2,$ este variabil în funcție de poziția muchiei difractante (vezi fig.2.22).

Intensitatea luminii

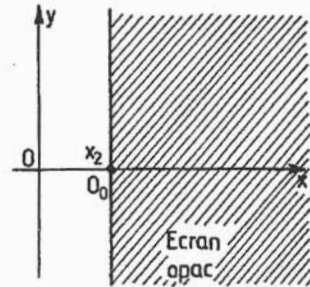


Fig.2.22. Muchie rectilinie și paravan opac în domeniul $x_2 > 0$.

difractate este

$$I(P) = \frac{I_0}{2} \overline{F_{-\infty} F u_2}^2 = \frac{I_0}{2} \left\{ \left[C(u_2) + \frac{1}{2} \right]^2 + \left[S(u_2) + \frac{1}{2} \right]^2 \right\} \quad (2.119)$$

și depinde de un singur parametru

$$u_2 = x_2 \sqrt{\frac{k}{\pi r_0}} \quad (2.120)$$

Să notăm cu P_0 punctul de observație care corespunde marginii O_0 a umbrei geometrice (fig.2.23). Din acest punct se vede jumătate din suprafața unde incidente iar intensitatea luminii este (vezi fig.2.24)

$$I(P_0) = \frac{I_0}{2} \overline{F_{-\infty} F_0^2} = \frac{I_0}{2} \left\{ \left[0 + \frac{1}{2} \right]^2 + \left[0 + \frac{1}{2} \right]^2 \right\} = \frac{I_0}{4}, \quad (2.121)$$

adică un sfert din intensitatea neperturbată.

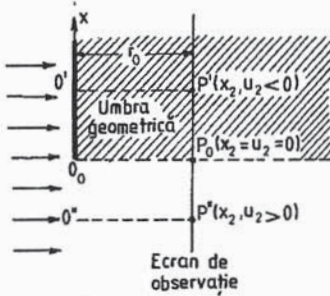


Fig.2.23. Difracția Fresnel pe muchia rectilinie (s_0 infinit de mare).

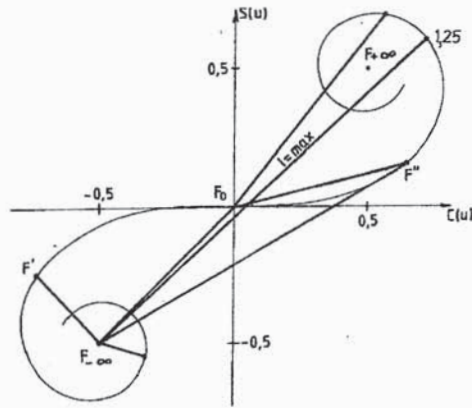


Fig.2.24. Utilizarea spiralei Cornu pentru determinarea intensității luminoase $I(P)$ la difracția Fresnel pe muchia rectilinie.

Să pătrundem acum cu punctul de observație P în zona umbrei geometrice, translătând desigur și originea în O' (pentru ca S , O' și P' să fie puncte coliniare). În raport cu originea O' , parametrul x_2 (și u_2), ce desemnează muchia ecranului opac, este negativ, din ce în ce mai mare în valoare absolută pe măsură ce punctul P' este mai în adâncimea umbrei geometrice. Pentru aflarea lui $I(P')$, conform formulei (2.119), vom calcula lungimile segmentelor de tipul $\overline{F_{-\infty} F'}$ care, după cum se vede, sunt din ce în ce mai scurte ($I(P')$ din ce în ce mai mic) pe măsură ce F' se apropie pe spirală, din ce în ce mai mult, de $F_{-\infty}$ (adică $x_2, u_2 \rightarrow -\infty$). Rezultă că în zona umbrei geometrice $I(P)$ scade monoton de la valoarea $I_0/4$ spre zero. Invers, când pătrundem cu punctul de observație P în zona iluminată, originea se translatează corespunzător (S , O'' și P'' coliniare), și, în raport cu noua origine (O''), parametrul x_2 (și u_2) care precizează poziția muchiei ecranului opac este

pozitiv. Acum intensitatea luminoasă este determinată de lungimea unor segmente de tipul $\overline{F_{-\infty}F''}$, cu F'' alunecând pe spirală în primul cadran. Intensitatea atinge o valoare maximă de aproximativ $1,37 I_0$ (care se vede ca o franjă strălucitoare imediat lângă umbra geometrică) pentru $u_2 = 1,25$, după care ea oscilează cu amplitudini descrescătoare în jurul valorii intensității neperturbate

$$\frac{I_0}{2} \overline{F_{-\infty}F_{+\infty}}^2 = I_0, \quad (2.122)$$

așa cum se vede în fig.2.25.

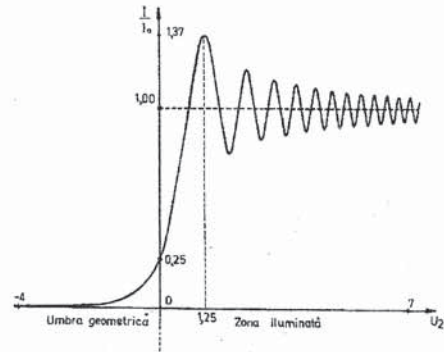


Fig.2.25. Distribuția de intensitate luminoasă la difracția Fresnel pe muchia rectilinie.

2. 7. 4. Firul rectiliniu opac

Într-un anume sens, problema difracției Fresnel pe firul rectiliniu opac este complementară celei a difracției Fresnel pe fanta foarte lungă tratată anterior. Să considerăm că firul rectiliniu este paralel cu axa Oy , astfel că limitele infinite de integrare sunt, ca și la fantă (vezi fig.2.26) $y_1, v_1 \rightarrow -\infty$, $y_2, v_2 \rightarrow +\infty$. Firul propriuzis este cuprins între x_1 și x_2 , astfel că intensitatea luminii difractate de fir are expresia

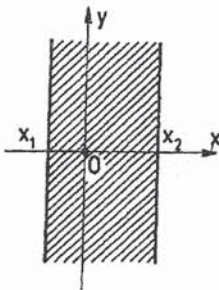


Fig.2.26. Fir rectiliniu opac, foarte lung, de grosime $x_2 - x_1$.

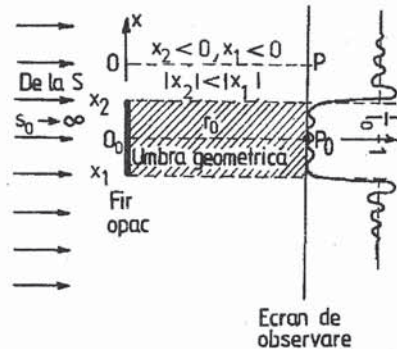


Fig.2.27. Difracție Fresnel (s_0 infinit de mare) pe firul opac rectiliniu, foarte lung.

$$I(P) = \frac{I_0}{2} \left| \int_{-\infty}^{u_1} e^{\frac{i\pi u^2}{2}} du + \int_{u_2}^{+\infty} e^{\frac{i\pi u^2}{2}} du \right|^2 = \frac{I_0}{2} \left| \overline{F_{-\infty}F_{u_1}} + \overline{F_{u_2}F_{+\infty}} \right|^2. \quad (2.123)$$

Să considerăm mai întâi intensitatea luminoasă în punctul P_0 situat în centrul umbrei geometrice (vezi fig.2.27). Cu translatarea originii în O_0 avem $x_2 = -x_1 > 0$, $u_2 = -u_1 \equiv u > 0$ și intensitatea $I(P_0)$ are expresia

$$I(P_0) = \frac{I_0}{2} \left| \int_{-\infty}^{-u} + \int_{+u}^{+\infty} \right|^2 = \frac{I_0}{2} \left| \overline{F_{-\infty}F_{-u}} + \overline{F_{+u}F_{+\infty}} \right|^2, \quad (2.124)$$

unde F_{-u} și F_{+u} sunt puncte simetrice ale spiralei Cornu față de centrul ei iar segmentele $\overline{F_{-\infty}F_{-u}}$ și $\overline{F_{+u}F_{+\infty}}$ sunt paralele (vezi fig.2.28). Ca și în cazul fantei, grosimea firului este $a = x_2 - x_1 = 2x_2$, adică

$$u = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{k}{\pi r_0}} \quad \text{sau invers} \quad a = 2u \sqrt{\frac{\pi r_0}{k}}. \quad (2.125)$$

Cu cât firul este mai subțire (a , u din ce în ce mai mici), punctele F_{-u} și F_{+u} , alunecând pe spirală, se apropie mai mult de origine; segmentele $\overline{F_{-\infty}F_{-u}}$, $\overline{F_{+u}F_{+\infty}}$ se alungesc, adică în punctul P_0 intensitatea luminoasă este din ce în ce mai mare. Invers, când firul este mai gros, segmentele menționate sunt scurte și intensitatea luminoasă este mai mică (punctele $F_{\pm u}$ alunecă spre punctele asimptotice $F_{\pm\infty}$).

Păstrând r_0 fixat, precum și grosimea firului (a) constantă, să deplasăm acum punctul de observație P într-o poziție asimetrică, din zona de umbră spre zona de lumină. Ca și în cazul fantei, punctele F_{-u} și F_{+u} vor aluneca pe spirală, în același sens, cu *aceeași* lungime de arc Δs ; segmentul $\overline{F_{u_1}F_{-\infty}}$ se scurtează în timp ce segmentul $\overline{F_{u_2}F_{+\infty}}$ se lungeste, fără ca ele să mai fie paralele. De la P_0 în exterior intensitatea mai întâi scade iar apoi trece printr-o succesiune de minime și maxime. La trecerea din zona de umbră în zona de lumină intensitatea crește brusc până la un maxim principal (analog maximului de $1,37I_0$ din cazul muchiei rectilini), după care urmează oscilații de intensitate din ce în ce mai mici, în jurul valorii I_0 .

Este demn de a fi reținut faptul că întotdeauna, în centrul P_0 al umbrei geometrice, intensitatea luminoasă $I(P_0)$ reprezintă un maxim (nu neapărat foarte pronunțat, dar totuși un maxim).

2. 7. 5. Difrakția Fresnel pe o apertură circulară

Să considerăm o apertură circulară de rază R și fie sursa punctiformă S , punctul receptor P și centrul O al aperturii pe aceeași dreaptă, perpendiculară pe planul aperturii (fig.2.29,a). Să presupunem că raza R este mult mai mică decât s_0 și r_0 , astfel încât scoaterea în fața integralei Kirchoff a factorului de înclinare și a expresiei $1/sr$ să fie justificată.

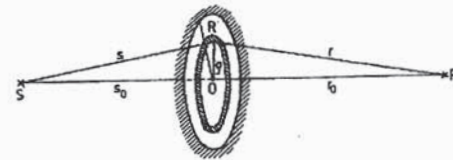


Fig.2.29.a. Configurație geometrică la difrakția Fresnel pe o apertură circulară (SOP-ax de simetrie).

Putem scrie deci

$$E(P) = C \iint_A \exp[ik(r+s)]dA. \quad (2.126)$$

Considerând elementul de arie din planul aperturii ca o coroană circulară cu raza cuprinsă în intervalul $(\rho, \rho + d\rho)$ avem elementul de arie $dA = 2\pi\rho d\rho$ și din relațiile evidente

$$s^2 = \rho^2 + s_0^2, \quad r^2 = \rho^2 + r_0^2, \quad (2.127)$$

prin diferențiere, putem scrie

$$sds = \rho d\rho, \quad rdr = \rho d\rho. \quad (2.128)$$

Mai departe, explicitând ds și dr , avem aproximativ

$$d(s+r) = \rho \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{r} \right) d\rho \cong \rho \left(\frac{1}{s_0} + \frac{1}{r_0} \right) d\rho = \frac{\rho d\rho}{L}, \quad (2.129)$$

unde L are aceeași semnificație ca și până acum. Rezultă

$$dA = 2\pi\rho d\rho = 2\pi L d(s+r) \quad (2.130)$$

și integrala Kirchhoff (2.126) se transcrie sub forma

$$E(P) = 2\pi CL \int_{\ell_0}^{\ell_R} \exp[ik(r+s)]d(s+r), \quad (2.131)$$

unde $\ell_0 = s_0 + r_0$ iar $\ell_R = s_R + r_R$ este drumul optic total, de la S la P , pe la marginea (periferia) aperturii circulare.

Să definim un parametru adimensional q prin relația

$$\ell \equiv s+r = s_0 + r_0 + q \left(\frac{\lambda}{2} \right) = \ell_0 + q \left(\frac{\lambda}{2} \right), \quad (2.132)$$

astfel încât

$$d\ell \equiv d(s+r) = \left(\frac{\lambda}{2} \right) dq. \quad (2.133)$$

Acest parametru q măsoară, în unități de semilungime de undă, cu cât este mai lung drumul local $s+r$ decât drumul central ℓ_0 . Integrala Kirchhoff (2.131) devine

$$\begin{aligned} E(P) &= \pi CL \lambda \exp(ik\ell_0) \cdot \int_0^{q_R} e^{i\pi q} dq = \\ &= 2CL \lambda \exp \left[i \left(k\ell_0 + \frac{\pi q_R}{2} \right) \right] \sin \left(\frac{\pi}{2} q_R \right), \end{aligned} \quad (2.134)$$

unde q_R este valoarea parametrului q pentru drumul $s_R + r_R$ (adică pe la periferia aperturii circulare); acest parametru are expresia aproximativă $q_R \cong R^2/L\lambda$.

Calculând intensitatea luminoasă în P obținem

$$I(P) = |E(P)|^2 = (2L\lambda)^2 |C|^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2}q_R\right). \quad (2.135)$$

În paragraful referitor la difracția Fresnel pe o apertură dreptunghiulară (vezi ecuația (2.110)) am arătat că $(L\lambda)^2 |C|^2 \equiv I_0$ reprezintă intensitatea luminoasă în punctul P la propagarea liberă (apertură infinită) a luminii, adică, în caz circular, pentru $R \rightarrow \infty$. De aceea, rezultatul de mai sus poate fi scris sub forma

$$I(P) = 4I_0 \sin^2\left(\frac{\pi}{2}q_R\right). \quad (2.136)$$

Concluzia care se desprinde din această relație este aceea că, atunci când raza R a aperturii crește, adică q_R crește, intensitatea $I(P)$ oscilează între zero și $4I_0$. Valorile *maxime* ($4I_0$) ale intensității se obțin pentru valori impare, $q_R = 2m + 1$, $m = 0, 1, 2, 3, \dots$, ale parametrului q_R , adică pentru

$$\frac{R^2}{\lambda L} = \frac{R^2(s_0 + r_0)}{s_0 r_0} = 2m + 1, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.137)$$

Să considerăm că s_0 este fixat, ca și raza R a aperturii circulare. Explicitând distanța r_0 sub forma

$$r_0^{(m)} = \frac{s_0 R^2}{(2m+1)\lambda s_0 - R^2}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.138)$$

și, presupunând că $R < \sqrt{\lambda s_0}$, constatăm că pe axa SO, la dreapta ecranului cu apertură, există mai multe poziții ale punctului P, în care intensitatea luminoasă este maximă, cu valoarea $4I_0$. Putem spune că apertura circulară se comportă ca o *lentilă convergentă multifocală*, cu $r_0^{(m+1)} < r_0^{(m)}$ și cu o îndesire a focarelor odată cu creșterea ordinului m al maximului de difracție.

O aplicație interesantă a acestor considerente este cea a formării unei imagini "perfecte" în camera obscură prevăzută cu orificiu circular foarte mic (pin-hole = gaură de ac) de rază convenabil aleasă. Să ne referim concret la situația reprezentată în fig.2.29.b, în care S este o sursă punctiformă. Dacă lumina s-ar propaga conform legilor opticii geometrice, pe peretele posterior al camerei obscure s-ar forma o imagine sub formă de pată circulară de rază (se utilizează asemănarea triunghiurilor)

$$r = \frac{s_0 + \ell}{s_0} R.$$

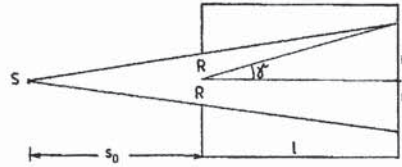


Fig.2.29.b. Camera obscură cu orificiu circular foarte mic (pin-hole).

Rezultă că raza petei crește direct proporțional cu raza deschiderii circulare R a camerei obscure. Acest lucru este adevărat când R este mare. Dacă R scade, difracția face ca propagarea luminii să nu mai respecte legile opticii geometrice. Discul central (Airy) de difracție (vezi secțiunea 2.8.2.), în care este concentrată majoritatea energiei luminoase, are deschiderea unghiulară dată de relația aproximativă* $\gamma \cong \frac{\lambda}{R}$, iar raza acestui disc central, bine-conturat, este $r_A \cong \ell \gamma \cong \lambda \ell / R$. Rezultă că atunci când raza pin-hole R scade, dimensiunea r_A a discului Airy crește. Evident, nu este util să micșorăm raza pin-hole decât până atunci când $r_A \cong r$, aceasta fiind situația de concentrare optimă a energiei luminoase în imaginea centrală dată de difracție (în acest caz, distorsiunile datorate difracției sunt minime). Obținem $R \cong [\lambda \ell s_0 / (s_0 + \ell)]^{1/2}$, iar dacă $s_0 \rightarrow \infty$ (sau practic $s_0 \gg \ell$) $R \cong \sqrt{\lambda \ell}$. Exemplificăm considerând $\lambda = 500 \text{ nm}$ și $\ell = 10 \text{ cm}$. Rezultă $R \cong 0,224 \text{ mm}$, dimensiune ușor realizabilă practic.

Deschiderea pin-hole se comportă astfel ca o "lentilă" fără aberații geometrice, cu adâncime de focalizare și de câmp oricât de mare. Cu astfel de deschideri se pot construi aparate fotografice fără obiectiv, chiar și pentru fotografii în raze X (la lungimi de undă de ordinul a 0,1 nm, cu camere lungi). Anticipând puțin, observăm că raza pin-hole determinată mai sus corespunde exact deschiderii primei zone Fresnel (vezi fig.2.31 și formula (2.148)-pentru $n = 1$).

Poate că nu este lipsită de interes o comparație între intensitatea $I_C(P)$ obținută cu apertura *circulară* de rază R și intensitatea $I_P(P)$ obținută cu o apertură *pătratică*, cu latura $2R$, considerând că toți ceilalți parametri sunt aceiași în cele două cazuri.

În cazul *pătratului* centrat pe axa SOP, din formula (2.111) obținem

$$I_P(P) = 4I_0 \cdot [C^2(u) + S^2(u)]^2, \quad u = R \left(\frac{k}{\pi L} \right)^{1/2}. \quad (2.139)$$

iar pentru *cerc*, având în vedere că $q_R \cong R^2 / \lambda L = u^2 / 2$, din formula (2.136) avem

$$I_C(P) = 4I_0 \sin^2 \left(\pi \frac{u^2}{4} \right). \quad (2.140)$$

Cele două dependențe au fost exprimate prin aceeași variabilă adimensională u , proporțională cu R . Ele sunt reprezentate comparativ, în fig.2.30. În esență, la deducerea lui I_P și la deducerea lui I_C s-au făcut aproximații identice (similare), astfel că este justificată compararea lor. Observăm că, atunci când u crește indefinit, oscilațiile lui I_P converg spre I_0 , în timp ce oscilațiile lui I_C rămân aceleași, cuprinse mereu între zero și $4I_0$. În realitate, dacă integrala lui Kirchoff ar fi fost evaluată mai exact, s-ar fi putut constata că diminuarea sensibilă a lui I_C (sub valoarea de $4I_0$) ar fi început la valori foarte

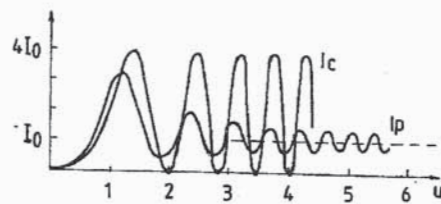


Fig.2.30. Distribuția de intensitate luminoasă la difracția Fresnel pe apertură circulară (I_C) și pe apertură pătratică (I_P). Latura pătratului coincide cu diametrul cercului iar punctele S și P se află pe axa de simetrie.

* După Rayleigh, $\gamma \cong 0,9(\lambda/R)$.

mari ale lui u , mult mai mari decât valorile pentru care I_p devine practic egal cu I_0 (în realitate valoare asimptotică).

Investigarea comparativă, extraaxială, a figurilor de difracție Fresnel date de apertura pătratică, de latură $2R$, și de apertura circulară, de diametru $2R$, arată că, la periferie, acestea coincid practic începând de la $q_R \cong 71$, adică pentru $u \cong \sqrt{2q_R} \geq 12$, chiar dacă în zona centrală se mențin încă diferențe semnificative (oscilațiile lui I_p , aproape au dispărut, iar cele ale lui I_C se mențin).

În încheiere, utilizând principiul lui Babinet, să discutăm intensitatea din punctul P , în cazul în care în locul aperturii circulare de rază R am fi avut un disc central opac, de aceeași rază.

Formula (2.134) poate fi scrisă sub forma

$$E(P) = E_0(P) \left(1 - e^{i\pi q_R} \right), \quad (2.141)$$

unde $E_0(P)$ este perturbația optică din P când propagarea luminii s-ar face fără nici-o obstrucție*.

Când apertura circulară se înlocuiește cu discul opac, conform principiului Babinet, perturbația optică din P , pe care o notăm cu $E'(P)$, are expresia

$$E'(P) = E_0(P) - E(P) = E_0(P) e^{i\pi q_R} \quad (2.142)$$

și de aici

$$I'(P) = |E'(P)|^2 = |E_0(P)|^2 = I_0. \quad (2.143)$$

Prin urmare, în centrul umbrei date de discul opac, intensitatea luminoasă are aceeași valoare ca și când nu ar fi existat nici-o obstrucție. Acest rezultat este *independent* de s_0, r_0 și λ (se exceptează situațiile în care relația (2.141) nu este exactă!). Acest rezultat surprinzător a fost pus în evidență de către Fresnel încă în prima jumătate a secolului trecut și aceasta a contribuit din plin la relansarea teoriei ondulatorii a luminii, după un secol de cvasitotală ignorare a punctului de vedere ondulatoriu, exprimat la sfârșitul secolului 17 de către Huygens.

Este interesant de amintit faptul că memoriul lui Fresnel cu privire la difracția luminii a fost distins cu premiul Academiei Franceze (1819) de o comisie celebră, formată din Laplace, Biot, Poisson, Arago și Gay - Lussac, în urma unor dezbateri dramatice. Astfel, această hotărâre nu a fost luată până când nu a fost satisfăcută obiecția lui Poisson împotriva teoriei ondulatorii a difracției care prezice, aparent paradoxal, formarea unui spot strălucitor central în umbra unui disc circular opac. Existența acestui spot, care poartă de atunci numele de "*punctul lui Poisson*", a fost imediat confirmată experimental de Arago (de fapt, acest efect fusese semnalat încă din anul 1723 într-o lucrare de mult uitată a astronomului italian Giacomo Filippo Maraldi). Dacă obstacolul circular este iluminat de două surse punctiforme, atunci rezultă două puncte Poisson imagine, ș.a.m.d., astfel că în general, putem forma imagini reale ale obiectelor extinse cu ajutorul unei "lentile obiectiv" sui generis formată, de

* Într-adevăr, luând $|E(P)|^2$ obținem exact formula (2.136). Un eventual factor de fază suplimentar în $E_0(P)$ de aici nu influențează intensitatea.

exemplu, dintr-o simplă sferă metalică (opacă). Intensitatea imaginii crește substanțial dacă folosim rețeaua zonată pe care o prezentăm în secțiunea următoare.

2. 7. 6. Zonele lui Fresnel. Rețele zonate.

În secțiunile precedente am tratat câteva cazuri concrete de difracție Fresnel pe baza teoriei scalare a lui Kirchhoff, anume a formei simplificate (2.126) a integralei de difracție. De data aceasta, dorim să reluăm problema difracției Fresnel pe o apertură circulară pentru a arăta modul în care a abordat această problemă însuși Fresnel, la începutul secolului trecut (în anul 1818). Dincolo de importanța istorică a considerentelor ce urmează, metoda utilizată de Fresnel rămâne frumoasă și azi; ea evidențiază în primul rând un mod elegant de raționament care nu utilizează operația de integrare, dar și câteva lucruri noi care au stat la baza unor experimente extrem de convingătoare privind natura ondulatorie a luminii.

Ca și în secțiunea anterioară, să considerăm o sursă punctiformă S , monocromatică, un punct de observație P și o apertură circulară de rază R , al cărei centru O se află pe dreapta SP la distanța s_0 față de S și la distanța r_0 față de P . Planul ecranului opac, în care este practică apertura circulară, este perpendicular pe axa SOP (vezi fig.2.31).

Fie Σ suprafața de undă sferică ce atinge marginile deschiderii circulare și $OA = OB = R$. După părerea lui Fresnel perturbația totală din P va fi rezultanta perturbațiilor sosite de la vibrațiile emise de punctele "surse secundare" de pe porțiunea neacoperită a suprafeței de undă Σ .

Să considerăm traiectul oarecare SVP și traiectul axial SV_0P . Având în vedere că punctele V_0 și V oscilează în fază (sunt surse coerente), diferența de fază la sosirea undelor respective în P este determinată de diferența de drum dintre ℓ și ℓ_0 . Să presupunem că punctul V a fost astfel ales încât

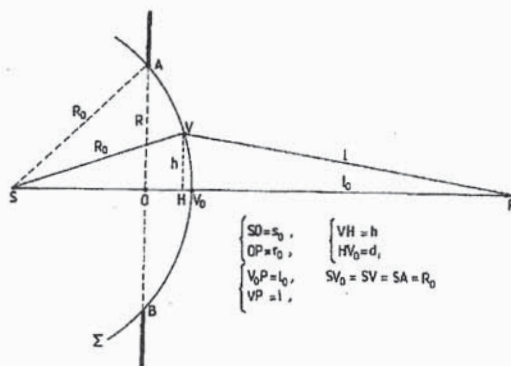


Fig.2.31. Construcția zonelor lui Fresnel.

$$\ell = \ell_0 + n \left(\frac{\lambda}{2} \right), \quad n = \text{număr natural}, \quad (2.144)$$

și ne propunem să determinăm raza $h = HV$ și înălțimea $d = HV_0$ a calotei determinate pe sfera Σ (de rază R_0) de punctul V . Exprimăm raza calotei h , pe de o parte, ca medie geometrică a segmentelor $d = HV_0$ și $2R_0 - d$ (vezi fig.2.31), adică

$$h^2 = d(2R_0 - d), \quad (2.145)$$

și, pe de altă parte, cu ajutorul teoremei lui Pitagora, din triunghiul HVP

$$h^2 = \ell^2 - (\ell_0 + d)^2. \quad (2.146)$$

Având în vedere că $d \ll 2R_0$ și că $d \ll \ell_0$ putem scrie aproximativ

$$h^2 \cong 2R_0 d, \quad (2.145')$$

$$h^2 \cong \ell^2 - \ell_0^2 - 2\ell_0 d. \quad (2.146')$$

Egalând cele două expresii și ținând cont de formula (2.144) obținem în final

$$d \cong n \left(\frac{\lambda}{2} \right) \frac{\ell_0}{R_0 + \ell_0} \equiv d_n \quad (2.147)$$

și apoi

$$h^2 \cong \frac{n\lambda R_0 \ell_0}{R_0 + \ell_0} \equiv h_n^2. \quad (2.148)$$

Dând lui n succesiv valorile 1, 2, 3, ..., localizăm pe suprafața sferică Σ un șir de puncte V_1, V_2, V_3, \dots , care, având în vedere simetria axială, determină o calotă centrală (cu vârful în V_0 , de rază h_1 și înălțime d_1) și apoi o succesiune de zone sferice. Aria calotei centrale este

$$\mathcal{A}_0 = 2\pi R_0 \cdot d_1 = \frac{\pi\lambda R_0 \ell_0}{R_0 + \ell_0}. \quad (2.149)$$

Aria zonei sferice dintre punctele (cercurile) V_{n+1} și V_n este

$$2\pi R_0 (d_{n+1} - d_n) = \frac{\pi\lambda R_0 \ell_0}{R_0 + \ell_0} = \mathcal{A}_0. \quad (2.150)$$

Rezultă că zonele sferice succesive și calota centrală au aceeași arie. Având în vedere acest lucru, și presupunând că densitatea superficială de surse secundare punctiforme este constantă pe întreaga suprafață de undă Σ , ajungem la concluzia că toate zonele de pe Σ (inclusiv calota centrală) conțin același număr de surse secundare. Aceasta înseamnă că ele determină în punctul P aceeași contribuție, câmpul $E(P)$ exprimându-se sub forma

$$E(P) = \sum_{n=0}^N \left\{ C_n \iint_{\mathcal{A}_n} \exp[ik(r+s)] dA \right\} = \sum_{n=0}^N E_n(P), \quad (2.151)$$

unde N se poate determina ca raportul dintre întreaga arie a calotei AV_0B și aria unei zone. Obținem aproximativ

$$N \cong \frac{R^2 (s_0 + r_0)}{s_0 r_0 \lambda}. \quad (2.152)$$

Pentru a ne forma o idee despre ordinul de mărime al numărului N să considerăm exemplul: $R = 2 \text{ mm}$, $\lambda = 500 \text{ nm}$, $r_0 = s_0 = 1 \text{ m}$. Obținem $N = 16$ zone Fresnel.

Totuși, având în vedere creșterea lui $r+s = R_0 + \ell$ cu $\frac{\lambda}{2}$ la trecerea de la o zonă Fresnel la următoarea, cantitatea $k(r+s)$ variază succesiv cu π radiani. Din această cauză, suma de contribuții din (2.151) este de forma

$$E(P) = E_0(P) + E_1(P) + E_2(P) + E_3(P) + E_4(P) + \dots, \quad (2.151')$$

cu

$$\text{sign} E_{n+1}(P) = -\text{sign} E_n(P), \quad |E_{n+1}(P)| \lesssim |E_n(P)|.$$

În ultima relație, în locul semnului de egalitate s-a scris semnul \lesssim deoarece la trecerea de la zona n la zona $n+1$ distanța ℓ crește cu $\lambda/2$ (adică $\ell_{n+1} = \ell_n + \frac{\lambda}{2}$, $\ell_{n+1} > \ell_n$) și constanta complexă din fața integralei - care înglobează factorul de înclinare și factorul $1/sr$, scoși de sub integrala Kirchhoff - scade corespunzător. În consecință, admitând că $E_0(P)$ este pozitiv $E_0(P) = |E_0(P)|$, putem scrie

$$E(P) = |E_0(P)| - |E_1(P)| + |E_2(P)| - |E_3(P)| + |E_4(P)| - \dots, \quad (2.151'')$$

termenii succesivi fiind din ce în ce mai mici. Se poate admite o descreștere *liniară* a contribuțiilor succesive, astfel încât

$$|E_n(P)| = \frac{1}{2} (|E_{n-1}(P)| + |E_{n+1}(P)|). \quad (2.153)$$

Scriind seria cu termeni alternați sub forma

$$E(P) = \frac{1}{2} |E_0| + \left(\frac{1}{2} |E_0| - |E_1| + \frac{1}{2} |E_2| \right) + \left(\frac{1}{2} |E_2| - |E_3| + \frac{1}{2} |E_4| \right) + \dots \quad (2.154)$$

constatăm că toate parantezele rotunde se anulează și, în final, rezultă

$$E(P) \cong \frac{1}{2} |E_0(P)|, \quad (2.155)$$

sau ca intensitate luminoasă

$$I(P) \cong \frac{1}{4} I_0(P). \quad (2.156)$$

Prin urmare, intensitatea luminoasă din punctul P este cam un sfert din intensitatea $I_0(P)$ determinată acolo de acțiunea zonei centrale (ca și când lumina s-ar fi propagat rectiliniu de la S la P printr-un tubușor axial cu deschiderea transversală ceva mai mică decât a zonei Fresnel de ordinul zero).

Analiza făcută până acum nu este totuși destul de riguroasă deoarece nu am ținut cont de numărul total de zone (N). Să admitem că N ar fi un număr natural. Dacă N este *par*, în relația (2.151'') există $N+1$ termeni, adică un număr impar de termeni. Atunci, admitând că relația (2.153) rămâne valabilă, obținem

$$E(P) = \frac{1}{2} |E_0| + \frac{1}{2} |E_N| = \frac{1}{2} (|E_0| + |E_N|) \quad (2.157)$$

și intensitatea luminoasă în P este ceva mai mare decât $I_0/4$.

Dacă N este *impar*, numărul total de zone, $N+1$, este par și putem scrie

$$E(P) = \frac{1}{2} |E_0| + \frac{1}{2} |E_{N-1}| - |E_N|. \quad (2.158)$$

Când N este suficient de mare, putem admite grosier că $|E_N| \cong |E_{N-1}|$ și astfel

$$E(P) = \frac{1}{2} (|E_0| - |E_N|), \quad (2.158')$$

adică intensitatea luminoasă în P este ceva mai mică decât $I_0/4$.

Pentru verificarea teoriei lui Fresnel, în anul 1875, fizicianul J.L. Soret a imaginat (de fapt, ideea i-a aparținut tot lui Fresnel) următoarea metodă: dacă printr-un procedeu oarecare se elimină acțiunea zonelor cu număr impar (sau par), intensitatea luminoasă în P ar trebui să fie foarte mare căci

$$E(P) = |E_0| + |E_2| + |E_4| + |E_6| + |E_8| + \dots \text{(se elimină acțiunea zonelor impare)}, \quad (2.159)$$

respectiv

$$E(P) = -(|E_1| + |E_3| + |E_5| + |E_7| + |E_9| + \dots) \text{(se elimină acțiunea zonelor pare)}, \quad (2.160)$$

și $I(P) = |E(P)|^2$. O apertură care elimină acțiunea zonelor pare sau impare se numește *rețea zonată*. Experiențele realizate de Soret au confirmat în mod strălucit teoria.

Soret a construit rețele zonate prin următorul procedeu. Pe o coală mare de hârtie, a trasat un sistem de cercuri concentrice a căror rază era proporțională cu rădăcina pătrată a numerelor întregi (vezi formula (2.148)). Apoi, cu tuș, a înnegrit spațiul dintre cercurile 1 și 2, 3 și 4, 5 și 6 etc., sau, într-o altă variantă, dintre cercurile 2 și 3, 4 și 5, 6 și 7 etc., plus interiorul cercului 1 (discul central). A fotografiat acest desen în așa fel încât, pe clișeu, cercul central a avut un diametru de cam 1 mm. Clișeul, complementar față de desen, este o bună rețea zonată, cu discul central opac - în prima variantă, și cu el transparent - în cea de-a doua variantă - vezi relațiile (2.160), respectiv (2.159). Cu o sursă S monocromatică, situată la distanța s_0 față de rețea, se urmărește intensitatea luminoasă într-un punct axial P_1 , situat dincolo de rețea, la distanța $\ell_{01} \cong (s_0 h_1^2) / (\lambda s_0 - h_1^2)$, unde h_1 este raza primei zone de pe rețea. În aceste condiții, porțiunile opace ale rețelei obturează tocmai acțiunea zonelor pare (dacă rețeaua are centrul opac) sau a zonelor impare (dacă rețeaua are centrul transparent).

Cititorul poate demonstra singur că, pe axa de simetrie, în afara punctului P_1 există și alte puncte similare, P_2, P_3, \dots , din ce în ce mai apropiate de rețea, în care se poate evidenția concentrarea energiei luminoase (din ce în ce mai slabă). Altfel spus, rețeaua zonată se comportă ca o *lentilă multifocală*.

Un alt procedeu de a obține rețele zonate este cel al fotografierii inelelor de interferență Newton, prin reflexie sau transmisie (vezi vol. II).

Pentru a crește și mai mult intensitatea luminoasă din punctul P, Fresnel a propus utilizarea unei plăci (lentile) care să introducă un defazaj de π radiani la zonele pare (sau impare), în așa fel încât în suma (2.151") toți termenii să aibă același semn. O astfel de placă (lentilă) are o secțiune de forma celei reprezentate în fig.2.32. Diferența de drum optic între

razele luminoase succesive (n) și (n+1) trebuie să fie egală cu $\lambda/2$; aceasta asigură defazarea de π radiani. O astfel de rețea a fost confecționată de către Wood la sfârșitul secolului trecut. Și de data aceasta, experiențele realizate au confirmat în mod strălucit teoria elaborată de Fresnel.

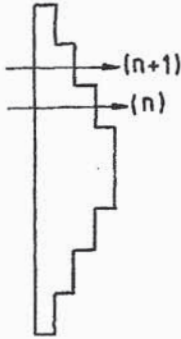


Fig.2.32. Lentilă Fresnel.

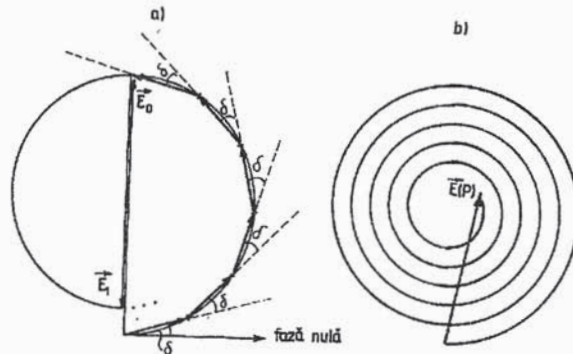


Fig.2.33. Construcția fazorială a lui Fresnel pentru determinarea perturbației luminoase $E(P)$.

În încheiere, să vedem cum poate fi calculată perturbația optică $E(P)$ prin *metoda fazorială*, utilizată mult, mai ales în secolul trecut, în tratarea problemelor de optică ondulatorie (interferență, difracție, polarizare).

Să subdivizăm fiecare zonă Fresnel (inclusiv calota centrală) în m subzone (cu m destul de mare!) care aduc în P contribuții defazate cu $\delta = \pi/m$ una față de următoarea, dar practic egale în valoare absolută. Fie, de exemplu, $m = 6$. Să începem evaluarea contribuției totale cu zona zero (calota axială) divizată în șase subzone, contribuția fiecăreia fiind reprezentată printr-un fazor. Prin adunarea a șase fazori, decalajați succesiv cu $\delta = \pi/6 = 30^\circ$, obținem fazorul \vec{E}_0 ce dă contribuția totală a zonei zero (vezi fig.2.33, a). Contribuția zonei unu (prima zonă sferică de după calota axială), adică fazorul \vec{E}_1 , se obține prin adunarea a șase fazori, ceva mai scurți. De aceea, fazorul \vec{E}_1 , dirijat vertical, cu vârful în jos, este mai scurt decât fazorul \vec{E}_0 , adică $|\vec{E}_1| < |\vec{E}_0|$, și vârful său nu mai ajunge la punctul de aplicație al fazorului \vec{E}_0 . Suma $\vec{E}_0 + \vec{E}_1$ este diferită de zero dar foarte mică. În continuare, pentru aflarea contribuției de la zonele doi, trei, ș.a.m.d. se procedează la fel. Dacă numărul N al zonelor Fresnel este foarte mare, conturul poligonal converge treptat spre un punct situat la mijlocul fazorului \vec{E}_0 . Astfel, suma $\vec{E}_0 + \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots$ ne va da, până la urmă, un fazor cu modulul $\frac{1}{2}|\vec{E}_0|$, deci intensitatea luminoasă din P va fi egală aproximativ cu $I_0/4$.

Desigur, dacă numărul m este foarte (infinat de) mare, conturul poligonal se transformă într-un contur "semicircular" iar succesiunea acestora, cu diametre din ce în ce mai mici, într-o spirală (vezi fig.2.33, b). În fig.2.33, b se arată fazorul rezultat $\vec{E}(P)$

pentru situația în care pe suprafața Σ neobturată încap $10 < N < 11$ zone Fresnel.

Observație: Construcția zonelor Fresnel se poate realiza și pentru situația în care în locul unei aperturi circulare avem un disc circular opac (vezi fig.2.34), prin puncte V care îndeplinesc condiția $SVP = SAP + m\left(\frac{\lambda}{2}\right)$ cu m număr natural. Raționând ca și în cazul tratat

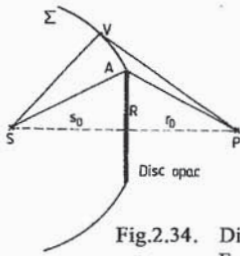


Fig.2.34. Difracție (și zone) Fresnel în cazul unui disc circular opac.

anterior rezultă că semnalul $E(P)$ este aproximativ egal cu jumătate din contribuția de la prima zonă neobturată (din vecinătatea punctului A). Așa cum am mai spus, și această concluzie, paradoxală, conform căreia în centrul umbrei se află un punct luminos, a putut fi verificată experimental. Ea a furnizat un nou argument în favoarea teoriei conform căreia lumina are natură ondulatorie.

§. 2. 8. Aplicații ale difracției Fraunhofer

În acest paragraf vom aplica formula generală (2.83) a difracției Fraunhofer (pentru *incidență normală*)

$$\tilde{E}(v_x, v_y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} E(x, y) \exp[-2\pi i(xv_x + yv_y)] dx dy,$$

la câteva cazuri concrete: apertura dreptunghiulară, apertura circulară, rețeaua plană (sistem de fante paralele echidistante). Vom considera aperturile omogene astfel că funcția de apertură are forma

$$E(x, y) = \begin{cases} C \text{ pe apertură,} \\ 0 \text{ în rest.} \end{cases}$$

2. 8. 1. Apertura rectangulară și fanta liniară

Să definim *funcția rectangulară* unidimensională

$$\text{rect}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 \text{ pentru } |x| \leq \frac{1}{2}, \\ 0 \text{ în rest,} \end{cases} \quad (2.161)$$

cu ajutorul căreia, alegând convenabil sistemul xOy în planul aperturii, putem scrie funcția de apertură dreptunghiulară sub forma (laturile aperturii sunt paralele cu axele Ox , respectiv Oy - vezi fig.2.35)

$$E(x, y) = C \text{rect}\left(\frac{x}{a}\right) \text{rect}\left(\frac{y}{b}\right) = \begin{cases} C \text{ pentru } \begin{cases} |x| \leq \frac{a}{2}, \\ |y| \leq \frac{b}{2}, \end{cases} \\ 0 \text{ în rest.} \end{cases} \quad (2.162)$$

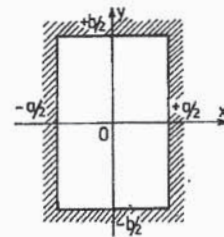


Fig.2.35. Apertură rectangulară de laturi a și b.

Câmpul de difracție Fraunhofer al acestei funcții (separabile) de apertură se reduce la produsul a două integrale

$$\tilde{E}(v_x, v_y) = C \int_{-a/2}^{+a/2} e^{-2\pi i v_x x} dx \cdot \int_{-b/2}^{+b/2} e^{-2\pi i v_y y} dy = CI(v_x, a)I(v_y, b), \quad (2.163)$$

unde

$$I(v_x, a) = \int_{-a/2}^{+a/2} e^{-2\pi i v_x x} dx = \frac{1}{2\pi i v_x} (e^{+\pi i a v_x} - e^{-\pi i a v_x}) = \frac{\sin(\pi a v_x)}{\pi v_x}. \quad (2.164)$$

Definind funcția *sinus cardinal*

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x} \rightarrow 1, \quad x \rightarrow 0, \quad (2.165)$$

mai putem scrie

$$I(v_x, a) = a \cdot \text{sinc}(\pi a v_x), \quad (2.166)$$

respectiv

$$\tilde{E}(v_x, v_y) = C(ab) \text{sinc}(\pi a v_x) \text{sinc}(\pi b v_y), \quad (2.167)$$

unde $ab = A$ este aria aperturii dreptunghiulare.

În experiențele de difracție, mărimea care se măsoară experimental este intensitatea luminoasă definită prin relația $I(v_x, v_y) = |\tilde{E}(v_x, v_y)|^2$. Pentru cazul aperturii rectangulare avem următoarea distribuție unghiulară a intensității luminoase

$$I(v_x, v_y) = |C|^2 \cdot A^2 \cdot \text{sinc}^2(\pi a v_x) \text{sinc}^2(\pi b v_y). \quad (2.168)$$

Considerând mai întâi difracția "înainte", adică în direcția normală pe planul aperturii, avem $\alpha = \beta = \pi/2$ și $v_x = v_y = 0$. Corespunzător obținem

$$I(0, 0) = |C|^2 \cdot A^2, \quad (2.169)$$

adică o intensitate luminoasă direct proporțională cu pătratul ariei aperturii. Revenind în formula generală, putem scrie

$$I(v_x, v_y) = I(0, 0) \cdot \text{sinc}^2(\pi a v_x) \text{sinc}^2(\pi b v_y). \quad (2.170)$$

Să analizăm pe scurt proprietățile matematice ale funcțiilor $\text{sinc}(\rho)$ și $\text{sinc}^2(\rho)$ - vezi și fig.2.36 și fig.2.37. Avem proprietatea importantă $\text{sinc}(\rho) = 1$ pentru $\rho = 0$. Apoi, pentru $\rho = m\pi$, $m = \pm 1, \pm 2, \dots$ numărătorul din definiția sinusului cardinal se anulează în timp ce numitorul rămâne finit; în consecință, pentru aceste valori $\text{sinc}(\rho) = 0$. Din semnul derivatei $d[\text{sinc}(\rho)]/d\rho = (1/\rho^2)[\rho \cos \rho - \sin \rho]$ obținem intervalele de monotonie iar din ecuația transcendentă $\text{tg} \rho = \rho$ -punctele de extremum. Dacă această ecuație se rezolvă grafic - așa cum se arată în fig.2.38 - obținem soluțiile aproximative

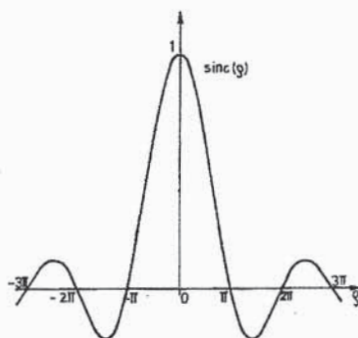


Fig.2.36. Graficul funcției $\text{sinc}(\rho)$.

$$\rho \approx \pm(2m+1)\frac{\pi}{2}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (2.171)$$

care corespund minimelor și maximelor secundare ale funcției $\text{sinc}(\rho)$, respectiv maximelor secundare ale funcției $\text{sinc}^2(\rho)$. Subliniem că aproximația este mai grosieră pentru primele valori ale lui m , dar este foarte exactă pentru valori m mari. Maximele secundare ale funcției $\text{sinc}^2(\rho)$ au valorile aproximative

$$\left[\text{sinc}^2(\rho) \right]_{\text{Max. sec}} \approx \frac{4}{(2m+1)^2 \pi^2}, \quad (2.172)$$

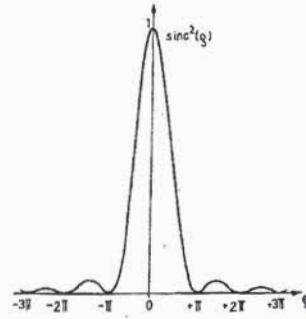


Fig.2.37. Graficul funcției $\text{sinc}^2(\rho)$.

de unde, pentru $m = 1, 2, 3$ avem 0,045, 0,016 și respectiv 0,008. Rezultă că maximele secundare au valori mult mai mici decât unitatea, adică decât maximul principal.

Ținând cont de proprietățile funcției $\text{sinc}^2(\rho)$, formula generală (2.170) a difracției Fraunhofer poate fi acum reprezentată grafic ușor. Obținem imaginea din fig.2.39, în care, pentru comoditate, în planul orizontal am utilizat axele av_x, bv_y . Intensitatea luminoasă are un maxim principal pentru $v_x = v_y = 0$ (difracția înainte) și minime nule pentru

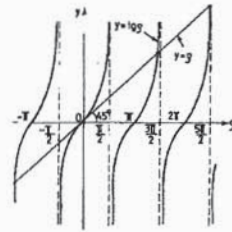


Fig.2.38. Rezolvarea grafică a ecuației transcendente $\rho = \tan \rho$.

$av_x = n, \quad bv_y = m, \quad n, m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (2.173)$
adică pentru

$$a \cos \alpha = n\lambda, \quad b \cos \beta = m\lambda, \quad (2.174)$$

unde $(\cos \alpha, \cos \beta)$ sunt *cosinuşii directori* (unghiurile α, β se măsoară față de Ox , respectiv Oy) ai direcției de difracție. Între minimele nule apar intercalate maximele secundare foarte puțin intense.

Spre deosebire de maximul principal, central, care este *alb* - adică independent (ca poziție) de lungimea de undă, pozițiile minimelor nule și a maximelor secundare depind de lungimea de undă λ . Astfel, din acest motiv, în lumină compusă, franjele secundare apar colorate. Această proprietate de descompunere spectrală prin difracție este extrem de utilă din punct de vedere practic; ea este folosită cu performanțe remarcabile în analiza spectrală cu ajutorul rețelelor optice (vezi mai departe, secțiunea 2.8.4).

Din figura de difracție de mai sus (fig.2.39) rezultă că energia incidentă pe apertură este împrăștiată practic în dreptunghiul strălucitor central definit de valorile $n, m = \pm 1$ (cu excepția unei mici fracțiuni, împrăștiată în franjele secundare). Din condiția de prim minim nul obținem așa-numitele *relații de incertitudine* care leagă *fereastra spațială transversală* $\Delta x \equiv a, \Delta y \equiv b$, de *fereastra spectrală asociată* $\Delta k_x \equiv k_x, \Delta k_y \equiv k_y$. Anume

$$av_x = 1 \Rightarrow ak_x = 2\pi \Rightarrow \Delta k_x \cdot \Delta x = 2\pi, \quad (2.175)$$

$$bv_y = 1 \Rightarrow bk_y = 2\pi \Rightarrow \Delta k_y \cdot \Delta y = 2\pi. \quad (2.176)$$

Remarcăm că aceeași figură de difracție se obține pentru orice proces ondulatoriu descris de ecuația undelor armonice: unde acustice, unde electromagnetice, unde de Broglie. În ultimul caz, vectorul de propagare \vec{k} este legat de vectorul impuls \vec{p} prin relația $\vec{p} = \hbar \vec{k} = (h/2\pi)\vec{k}$ și avem *relațiile de incertitudine ale lui Heisenberg*

$$\Delta x \cdot \Delta p_x = h, \quad \Delta y \cdot \Delta p_y = h, \quad (2.177)$$

h fiind constanta lui Planck. În realitate, din cauza împrăștierii undelor difractate și în franjele secundare, relațiile de incertitudine au forma mai generală $\Delta x \cdot \Delta p_x \gtrsim h, \quad \Delta y \cdot \Delta p_y \gtrsim h$.

Observație: În cazul general, al unei incidențe oblice pe apertură, caracterizată prin cosinșii directori $(\cos \alpha_0, \cos \beta_0)$ avem defazajul (vezi relația (2.77))

$$\Delta \varphi = -\vec{p} \cdot (\vec{k}_d - \vec{k}_i) = -\vec{p} \cdot \Delta \vec{k} = -2\pi \vec{p} \cdot \Delta \vec{v} = -2\pi(x\Delta v_x + y\Delta v_y), \quad (2.178)$$

unde

$$\Delta v_x = \frac{1}{2\pi} (k_{dx} - k_{ix}) = \frac{k}{2\pi} (\cos \alpha - \cos \alpha_0) = \frac{1}{\lambda} (\cos \alpha - \cos \alpha_0), \quad (2.179)$$

$$\Delta v_y = \frac{1}{2\pi} (k_{dy} - k_{iy}) = \frac{k}{2\pi} (\cos \beta - \cos \beta_0) = \frac{1}{\lambda} (\cos \beta - \cos \beta_0). \quad (2.180)$$

În această situație, condițiile de maxim $av_x = n, \quad bv_y = m$ devin

$$a(\cos \alpha - \cos \alpha_0) = n\lambda, \quad (2.181)$$

$$b(\cos \beta - \cos \beta_0) = m\lambda. \quad (2.182)$$

Ca o consecință a relațiilor de incertitudine (respectiv a relației de transformare Fourier ce există între $\tilde{E}(v_x, v_y)$ și $E(x, y)$), extensia spectrală a figurii de difracție este mai mare pe direcția laturii mai mici a aperturii rectangulare, așa cum se arată în fig.2.40. Planul de observație se consideră la infinit sau în planul focal al lentilei de focalizare (vezi și fig.2.15). Majoritatea energiei incidente ce trece prin apertură este concentrată în dreptunghiul central, strălucitor, delimitat de valorile $\pm \lambda/a, \pm \lambda/b$.

Este evident că *fenomenul de difracție dispare în limita opticii geometrice*, când $\lambda/a, \lambda/b$ tind la zero; corespunzător α, β tind spre $\pi/2$ și k_x, k_y tind spre zero.

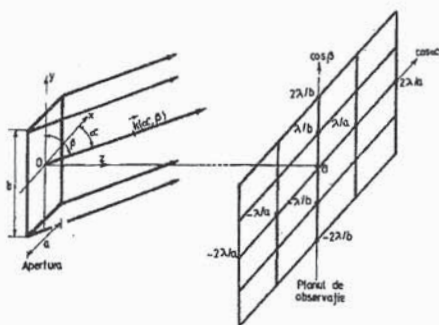


Fig.2.40. Legătura dintre extensia spectrală a figurii de difracție și extensia aperturii rectangulare difractante.

De o importanță practică deosebită este cazul aperturii sub formă de *fantă*, când una din laturi este foarte mare în comparație cu cealaltă (de exemplu $b \gg a$). În acest caz $\lambda/b \rightarrow 0$,

$\beta \rightarrow \pi/2$, $k_y = k \cos \beta \rightarrow 0$, $v_y \rightarrow 0$ și fenomenul de difracție are loc numai pe direcția α (sau θ , ca unghi complementar) din planul xOy (vezi fig.2.41). Într-adevăr, deoarece $\text{sinc}(\pi b v_y) \rightarrow 1$ pentru $v_y \rightarrow 0$ formula intensității luminoase devine

$$I(v_x) = I(0) \text{sinc}^2(\pi a v_x) = I(0) \left[\frac{\sin(\pi a v_x)}{\pi a v_x} \right]^2. \quad (2.183)$$

Remarcăm că argumentul

$$\pi a v_x = \frac{a}{2} k_x = \frac{a}{2} k \cos \alpha = \frac{a}{2} k \sin \theta, \quad (2.184)$$

poate fi exprimat cu ajutorul diferenței de drum

$$\Delta r = \frac{a}{2} \sin \theta, \quad (2.185)$$

dintre raza marginală și raza centrală. Avem

$$\pi a v_x = k \cdot \Delta r \equiv \Delta \varphi = \pi \left(\frac{a}{\lambda} \right) \sin \theta. \quad (2.186)$$

Finalmente, distribuția unghiulară a intensității luminii difractate de fantă se mai poate scrie sub forma

$$I(\theta) = I(0) \left\{ \frac{\sin \left[\pi \left(\frac{a}{\lambda} \right) \sin \theta \right]}{\pi \left(\frac{a}{\lambda} \right) \sin \theta} \right\}^2, \quad (2.187)$$

adică cu ajutorul funcției $\text{sinc}^2(\pi(a/\lambda)\sin\theta)$, unghiul θ numindu-se *unghi de difracție*.

Condiția de localizare a minimelor nule de difracție $a v_x = n$ devine $a \cos \alpha = n\lambda$ sau $a \sin \theta = n\lambda$. Corespunzător $\Delta r = n(\lambda/2)$, respectiv diferența de fază este $\Delta \varphi = n\pi$, $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

Conform condiției lui Kirchhoff a $\gg \lambda$, rezultă că unghiurile de difracție sunt mici, astfel că în multe situații practice, pentru determinarea minimelor de difracție se poate folosi relația $a\theta \cong n\lambda$.

Evident, pentru $\theta = 0$ toate undele difractate sunt în fază și avem maximum central, de intensitate $I(0)$. Pentru $n = 1$ avem primul minim nul, în direcția $\sin \theta = \lambda/a$; unghiul θ crește când λ/a crește. Când $n = 2$, obținem al doilea minim nul, în direcția $\sin \theta = 2\lambda/a$, separat de cel anterior prin primul maxim secundar, de intensitate foarte mică, aproximativ $0,047 I(0)$, ș.a.m.d.

Trebuie reținut faptul că la micșorarea fantei scade intensitatea $I(0)$ a maximumului principal odată cu creșterea extinderii sale unghiulare. În lumină albă, maximumul principal este alb, cu ușoare irizații exterioare.

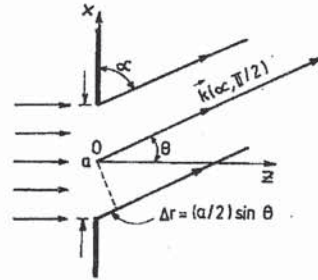


Fig.2.41. Difracția Fraunhofer pe fanta liniară foarte lungă (lățime a).

2. 8. 2. Apertură circulară. Criteriul lui Rayleigh

Difracția Fraunhofer pe apertură circulară prezintă o importanță practică deosebită deoarece marea majoritate a monturilor și diagramelor lentilelor (și ale sistemelor optice centrate în general) au formă circulară. Problema a fost rezolvată analitic pentru prima dată de fizicianul și astronomul englez G.B. Airy, în anul 1835.

Să considerăm cazul general al funcției de apertură circular simetrice, adică $E = E(r)$, unde $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ este distanța de la centrul aperturii. În cazul incidenței normale avem

$$\tilde{E}(v_x, v_y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} E(r) \exp[-2\pi i(xv_x + yv_y)] dx dy. \quad (2.188)$$

Pentru a exploata simetria circulară a lui $E(r)$ vom trece la coordonate polare, atât în planul xOy al aperturii (O coincide cu centrul aperturii circulare), cât și în planul (focal) $v_x O' v_y$ - de observație, O' fiind focarul principal:

$$\begin{cases} x = r \cos \xi, & y = r \sin \xi, & dx dy = r dr d\xi \\ v_x = \rho \cos \eta & v_y = \rho \sin \eta & \rho = (v_x^2 + v_y^2)^{1/2} \end{cases}. \quad (2.189)$$

În coordonate polare, integrala de difracție devine

$$\tilde{E}(\rho, \eta) = \int_0^{\infty} E(r) \left[\int_0^{2\pi} \exp[-2\pi i r \rho \cos(\xi - \eta)] d\xi \right] r dr. \quad (2.190)$$

Observăm că, până la un factor de proporționalitate constant, a doua integrală este funcția Bessel de speța întâia și ordinul zero,

$$2\pi J_0(x) = \int_0^{2\pi} \exp[-ix \cos(\xi - \eta)] d\xi, \quad (2.191)$$

astfel că dependența lui \tilde{E} de η este numai *aparentă*. În consecință

$$\tilde{E}(\rho) = 2\pi \int_0^{\infty} E(r) \cdot J_0(2\pi r \rho) r dr \equiv \mathfrak{B}\{E(r)\}, \quad (2.192)$$

adică $\tilde{E}(\rho)$ este transformata Fourier a funcției $E(r)$. Această formă particulară de transformată Fourier bidimensională este o transformată Fourier - Bessel unidimensională (uneori, ea se mai numește transformată Hankel). Funcției circular simetrice $E(r)$ îi corespunde o transformată Fourier circular simetrică $\tilde{E}(\rho)$.

Este remarcabil faptul că transformata Fourier - Bessel (Hankel) inversă are exact aceeași formă, adică

$$E(r) = \mathfrak{B}^{-1} \left\{ \tilde{E}(\rho) \right\} = 2\pi \int_0^{+\infty} \tilde{E}(\rho) J_0(2\pi r \rho) \rho d\rho. \quad (2.193)$$

Cum vom vedea în capitolul următor, toate teoremele privind transformatele Fourier își au echivalentul lor în cazul particular al transformatelor Fourier - Bessel (Hankel). Astfel, de exemplu, *teorema de similitudine* (sau *a transformării de scală*) are forma

$$\mathfrak{B} \{E(\rho r)\} = \frac{1}{\rho^2} \tilde{E} \left(\frac{\rho}{\rho} \right), \quad \rho = \text{număr real pozitiv.} \quad (2.194)$$

Ea ne arată că efectul dilatării aperturii este o contracție a spectrului frecvențelor spațiale însoțită de o micșorare a perturbației optice (respectiv, a intensității luminoase corespunzătoare).

În cazul aperturii circulare omogene, de rază R , putem scrie

$$E(r) = C \cdot \text{circ} \left(\frac{r}{R} \right) = \begin{cases} C & \text{pentru } r \leq R, \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}, \quad (2.195)$$

unde, prin definiție,

$$\text{circ}(r) = \begin{cases} 1 & \text{pentru } r \leq 1, \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}. \quad (2.196)$$

Introducând această expresie a funcției de apertură $E(r)$ în relația (2.192) obținem

$$\tilde{E}(\rho) = 2\pi C \int_0^R J_0(2\pi\rho r) r dr = \frac{C}{2\pi\rho^2} \int_0^{2\pi\rho R} J_0(\xi) \xi d\xi. \quad (2.197)$$

Folosind identitatea

$$x J_1(x) = \int_0^x J_0(\xi) \cdot \xi d\xi, \quad (2.198)$$

unde $J_1(x)$ este funcția Bessel de speța întâia și ordinul unu, avem

$$\tilde{E}(\rho) = CR \cdot \frac{J_1(2\pi\rho R)}{\rho} = 2C(\pi R^2) \frac{J_1(2\pi\rho R)}{2\pi\rho R}, \quad (2.199)$$

sau

$$\tilde{E}(\Delta\varphi) = 2CA \frac{J_1(\Delta\varphi)}{\Delta\varphi}, \quad (2.200)$$

unde $A = \pi R^2$ este aria aperturii iar $\Delta\varphi \equiv 2\pi\rho R$ are, până la urmă, expresia (vezi fig.2.42)

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= 2\pi R \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = R \sqrt{k_x^2 + k_y^2} = R k_{\perp} = \\ &= R k \cdot \sin\theta = k \cdot \Delta r = \pi \left(\frac{D}{\lambda} \right) \sin\theta. \end{aligned} \quad (2.201)$$

Aici, $\Delta r = R \sin\theta = (D/2) \sin\theta$ este diferența de drum între raza marginală și raza centrală, $\Delta\varphi = k \cdot \Delta r$ este diferența de fază corespunzătoare iar $k_{\perp} = k \sin\theta$ este

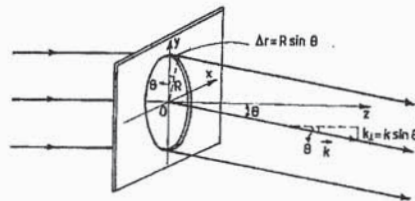


Fig.2.42. Difrakția Fraunhofer pe o apertură circulară (rază R).

componenta transversală a vectorului de undă la difracția sub unghiul θ față de axa Oz.

Intensitatea $I = \left| \tilde{E} \right|^2$ a luminii difractate este

$$I(\Delta\varphi) = |C|^2 A^2 \cdot \left[\frac{2J_1(\Delta\varphi)}{\Delta\varphi} \right]^2. \quad (2.202)$$

Având în vedere că $\lim_{x \rightarrow 0} (2J_1(x)/x) = 1$, avem $I(0) = |C|^2 A^2$ (intensitatea difracției înainte, adică pentru $\theta = 0$) și putem scrie în general, pentru o direcție θ oarecare,

$$I(\theta) = I(0) \left\{ \frac{2J_1 \left[\pi \left(\frac{D}{\lambda} \right) \sin \theta \right]}{\pi \left(\frac{D}{\lambda} \right) \sin \theta} \right\}^2. \quad (2.203)$$

Nu este lipsită de interes o comparație între această formulă și formula (2.187) - a difracției pe o fantă de lățime a . Observăm că rolul funcției sinc $\left[\pi \left(\frac{a}{\lambda} \right) \sin \theta \right]$ îl joacă acum, în cazul aperturii circulare, funcția $2J_1 \left[\pi \left(\frac{D}{\lambda} \right) \sin \theta \right] / \left[\pi \left(\frac{D}{\lambda} \right) \sin \theta \right]$. Lăsând la o parte numitorii, care pentru $a = D$ sunt identici, observăm că funcția $2J_1(\pi x)$ este "un fel de sinus" cu amplitudine descrescătoare și cu zerouri care nu mai corespund la un număr întreg de π . Comparația dintre $\sin(\pi x)$ și $2J_1(\pi x)$ poate fi observată în fig.2.43, a, b.

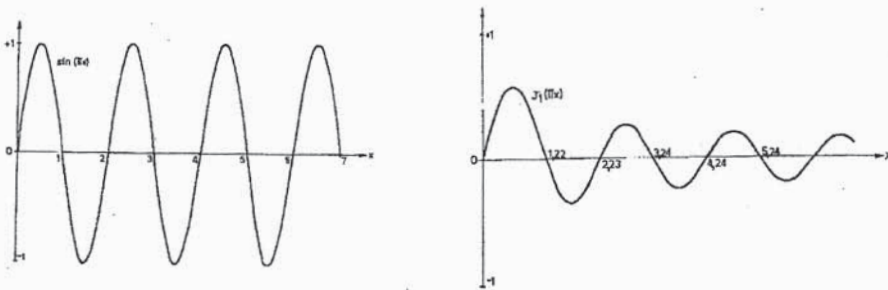


Fig.2.43. Comparație între funcțiile $\sin(\pi x)$ și $J_1(\pi x)$.

În cazul aperturii circulare, figura de difracție constă dintr-un disc circular central strălucitor - *discul lui Airy* - care conține 83,8 % din energia incidentă pe apertură. El este înconjurat de un număr de franje circulare din ce în ce mai slabe, ale căror raze depind de λ prin raportul λ/D (direct proporțional) - vezi fig.2.44.

În cazul fantei, franja centrală strălucitoare, asemenea fantei, este liniară și conține 90,28 % din energia incidentă. În dreapta și în stânga ei se află franjele secundare, paralele între ele și cu franja centrală, separate prin minime nule - vezi fig.2.45.

În general, la difracția în lumină policromatică (sau albă), marginea exterioară a franjelor este roșie ($\lambda_r \approx 700$ nm) iar cea interioară este violetă ($\lambda_v \approx 400$ nm), deoarece unghiul de difracție θ crește odată cu λ . În cazul refracției și al mediilor cu dispersie normală, dimpotrivă, unghiul de refracție scade cu creșterea lui λ căci $dn/d\lambda < 0$.

Înainte de a trece la prezentarea criteriului lui Rayleigh, să precizăm câteva chestiuni referitoare la discul lui Airy, în care este concentrată aproape 84 % din energia luminoasă difractată. Deschiderea sa unghiulară (până la primul minim nul) este dată de

$$\sin \theta_1 = 1,22 \frac{\lambda}{D}, \quad (2.204)$$

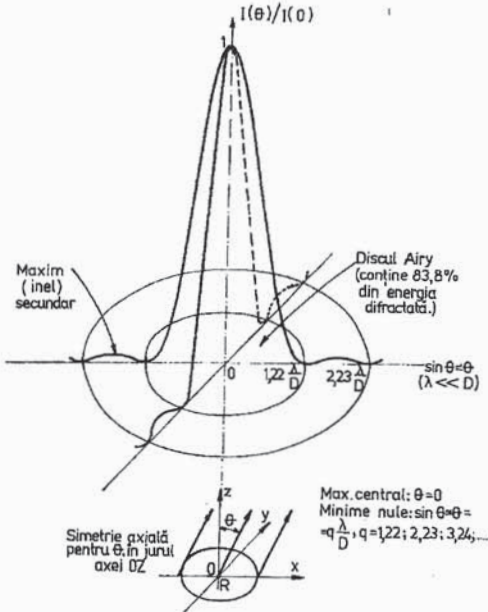


Fig.2.44. Distribuția de intensitate luminoasă la difracția Fraunhofer pe o apertură circulară.

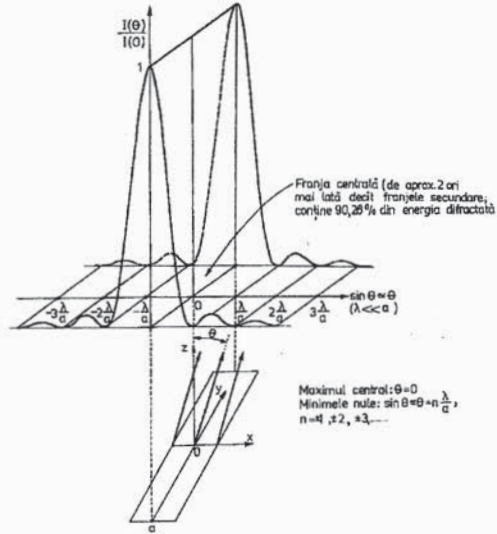


Fig.2.45. Distribuția de intensitate luminoasă la difracția Fraunhofer pe o fantă liniară.

iar dacă este îndeplinită condiția lui Kirchhoff $\lambda \ll D$, aproximând $\sin \theta_1 \cong \theta_1$, putem scrie

$$\theta_1 \cong 1,22 \frac{\lambda}{D} = 0,61 \frac{\lambda}{R}. \quad (2.204')$$

Raza discului Airy în planul focal al lentilei (de focalizare) - plan de observație - este (vezi fig.2.46).

$$r_1 = f \tan \theta_1 \cong f \theta_1 = 1,22 \frac{f \lambda}{D} = \frac{0,61 f \lambda}{R}. \quad (2.205)$$

Evident, în aproximația opticii geometrice, pentru $\frac{\lambda}{D}$ (sau $\frac{\lambda}{a}$ în cazul fantei) tinzând la zero, figura de difracție dispăre iar dimensiunile discului Airy se reduc la un punct ($\theta_1 = 0$, $r_1 = 0$) care reprezintă imaginea geometrică a sursei punctuale S foarte îndepărtate.

Diafragma sau montura, care limitează lărgimea fascicului incident pe suprafața unei lentile sferice, reprezintă o apertură circulară, astfel că imaginea unui punct luminos îndepărtat (S) este figura de difracție discutată mai sus și este *practic* dată de discul Airy

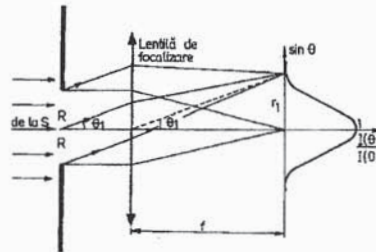


Fig.2.46. Extensia discului Airy în planul focal al lentilei de focalizare.

corespunzător. Nici cea mai corectă lentilă nu poate reduce diametrul discului de difracție Airy. Difracția conduce astfel la o *limitare principală* a rezoluției spațiale a aparatelor optice.

De asemenea, imaginea mai multor surse punctuale îndepărtate, respectiv a unei surse extinse, reprezintă în general, o suprapunere (mai mult sau mai puțin densă) de discuri Airy. Pentru ilustrare, să considerăm o lentilă cu diametrul $D = 2 \text{ cm}$ și distanța focală $f = 40 \text{ cm}$, iluminată normal cu un fascicul paralel de radiații monocromatice cu $\lambda = 590 \text{ nm}$. Deschiderea unghiulară a discului Airy este

$$\theta_1 = 1,22 \frac{\lambda}{D} = 3,6 \cdot 10^{-5} \text{ rad} = 7,42'' ,$$

iar raza corespunzătoare r_1 , în planul focal

$$r_1 = f \cdot \theta_1 = 1,44 \cdot 10^{-3} \text{ cm}.$$

Aceasta este, în realitate, "raza punctului" imagine dată de această lentilă, la lungimea de undă specificată. La lungimi de undă λ mai mari, și la diametre D mai mici, "raza punctului" ar fi fost și mai mare.

Dacă avem în vedere fenomenul de difracție, înțelegem ușor că două puncte obiect îndepărtate, S_1 și S_2 , separate spațial, nu pot da, pentru orice separare, imagini distincte în planul focal al unei lentile, căci dacă distanța dintre S_1 și S_2 se micșorează, la un moment dat discurile Airy corespunzătoare încep să se suprapună. În practică se admite *criteriul* propus de către *Rayleigh*, conform căruia *două surse punctuale, îndepărtate de lentilă (sau de o apertură circulară difractantă), mai pot fi percepute distinct dacă maximul central de difracție al uneia se suprapune peste primul minim nul al celeilalte*.

Pentru ilustrare, putem considera că este vorba de imaginea a două stele, formată în planul focal al unei lentile, la limita de rezoluție Rayleigh (lentila fiind, de exemplu, un obiectiv de telescop) - vezi fig.2.47. *Unghiul minim de rezoluție* γ este unghiul θ_1 din analiza anterioară, adică

$$\gamma \cong 1,22 \frac{\lambda}{D} = \frac{0,61\lambda}{R} . \quad (2.206)$$

Cu cât acest unghi (respectiv $r \approx \gamma f$) este mai mic, cu cât este mai mare (mai bună) *puterea de rezoluție* a lentilei (definită ca inversul distanței de rezoluție dintre punctele S_1 și S_2). În general, creșterea puterii de rezoluție a aparatelor optice se realizează prin creșterea raportului D/λ . Acesta este motivul pentru care se construiesc telescoape cu diametrul D cât mai mare. În același scop, în microscopia optică se utilizează microscopie în ultraviolet, deoarece lungimea de undă $\lambda_{UV} = 200 - 300 \text{ nm}$ este de 2-3 ori mai mică decât lungimea de undă în vizibil λ_{viz} .

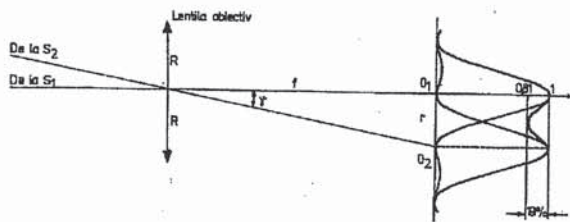


Fig.2.47. Exemplificarea criteriului lui Rayleigh pentru determinarea unghiului minim de rezoluție spațială.

În *microscopale electronice*, lungimea de undă de Broglie poate fi micșorată (prin creșterea tensiunii de accelerare a electronilor) până la $\lambda_e \approx 0,004$ nm. Corespunzător, puterea de rezoluție crește cam de 100 000 de ori față de cea a microscopelor ce lucrează în vizibil.

Să considerăm că un fascicul de electroni este accelerat de la viteza $v_0 = 0$ la viteza v , de o diferență de potențial V . Putem scrie

$$E_c = c^2(m - m_0) = eV, \quad (2.207)$$

unde E_c este energia cinetică. Ținând cont că $m = m_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ obținem în final

$$v = c \cdot \frac{\sqrt{\left(\frac{eV}{m_0c^2}\right)^2 + 2\left(\frac{eV}{m_0c^2}\right)}}{\frac{eV}{m_0c^2} + 1}. \quad (2.208)$$

Calculând acum impulsul relativist $p = mv$ și ținând cont că lungimea de undă de Broglie este $\lambda_e = h/p$, în cele din urmă obținem

$$\lambda_e = \frac{h}{\sqrt{2m_0eV}} \cdot \left[1 + \frac{eV}{2m_0c^2}\right]^{-1/2}. \quad (2.209)$$

Pentru $V = 100$ kV obținem $\lambda_e \approx 0,004$ nm.

În *microscopale ionice*, lungimea de undă de Broglie $\lambda_i = h/(m_i v_i)$ scade și mai mult deoarece $m_i \gg m_e$. Corespunzător, puterea de rezoluție mare a microscopelor ionice creează condiții pentru observarea detaliilor unor obiecte infime, cum sunt virușii. Dacă un virus ar fi examinat cu un microscop optic, structura lui ar fi invizibilă, deoarece ea este mascată complet de difracție.

Când sunt observate obiecte îndepărtate, ochiul se comportă, în principiu, ca un obiectiv de telescop. Luând $\lambda = 500$ nm (mijlocul domeniului vizibil) și diametrul pupilei ochiului uman $D = 4$ mm, rezultă deschiderea unghiulară minimă care se poate realiza cu ochiul liber

$$\gamma_{\text{ochi}} \approx 1,22 \frac{\lambda}{D} = 1,68 \cdot 10^{-4} \text{ rad} = 35''. \quad (2.210)$$

Este foarte interesant să constatăm că acest rezultat coincide excelent cu estimările fiziologice privind acuitatea vizuală a ochiului normal, care poate separa două puncte luminoase îndepărtate până la deschiderea limită $2\gamma \approx 1'$.

Încheiem această secțiune cu o analiză mai detaliată referitoare la puterea de rezoluție a microscopului optic. Deși am mai făcut unele referiri tangențiale la acest instrument optic, este necesar să aprofundăm mai mult subiectul având în vedere importanța sa practică deosebită, dar și din cauză că, la microscop (spre deosebire de telescop, lunetă), punctele obiect se află la distanță *mică* față de obiectiv. Așa cum s-a arătat în primul

capitol, pentru a asigura stigmatismul transversal (aplanetismul) la formarea imaginii în microscop, este necesar să fie îndeplinită condiția de sinus a lui Abbe (vezi fig.2.48)

$$n_1 y_1 \sin \gamma_1 = n_2 y_2 \sin \gamma_2. \quad (2.211)$$

De aici rezultă că, la micșorarea lui y_1 , se micșorează corespunzător și y_2 (respectiv unghiul S_1OS_2 , egal cu unghiul O_1OO_2). Conform criteriului lui Rayleigh, dacă admitem că la nivelul lentilei obiectiv se produce difracție Fraunhofer*, unghiul O_1OO_2 nu poate fi mai mic decât

$$\gamma_{\min} = \frac{1,22\lambda}{D}, \quad (2.212)$$

adică valoarea minimă a lui y_2 este

$$y_{2 \min} = p_2 \operatorname{tg} \gamma_{\min} \approx p_2 \gamma_{\min} \approx \frac{1,22\lambda}{D} p_2. \quad (2.213)$$

Pe de altă parte, de pe desen rezultă

$$\operatorname{tg} \gamma_2 = \frac{D}{2p_2}, \quad p_2 = \frac{D}{2 \operatorname{tg} \gamma_2} \approx \frac{D}{2 \sin \gamma_2}, \quad (2.214)$$

astfel că

$$y_{2 \min} \approx \frac{1,22\lambda}{D} \cdot \frac{D}{2 \sin \gamma_2} = \frac{0,61\lambda}{\sin \gamma_2}. \quad (2.215)$$

Deoarece, de regulă $n_2 = 1$ (aer), condiția lui Abbe (2.211) ne dă

$$y_{1 \min} = \frac{y_{2 \min} \sin \gamma_2}{n_1 \sin \gamma_1} = \frac{0,61\lambda}{n_1 \sin \gamma_1} = \frac{0,61\lambda}{A}, \quad (2.216)$$

unde $A = n_1 \sin \gamma_1$ se numește *apertură numerică* a microscopului.

Rezultă că $y_{1 \min}$ poate fi micșorat sau prin scăderea lungimii de undă (lucrându-se în ultraviolet - cum am specificat mai sus) sau prin creșterea aperturii numerice A . Așezând preparatul microscopic cât mai aproape de obiectiv, ne putem apropia de valoarea teoretică $\gamma_1 = \pi/2$, pentru care apertura numerică devine $A = n_1 \sin(\pi/2) = n_1$. Dacă în spațiul obiect - obiectiv ar fi aer ($n_1 = 1$), valoarea lui A ar fi 1; corespunzător $y_{1 \min} = 0,61\lambda$ (pentru $\lambda = 550 \text{ nm}$, $y_{1 \min} = 0,336 \mu\text{m}$). În practică, pentru creșterea suplimentară a aperturii numerice A , dar și pentru îmbunătățirea luminozității, în spațiul obiect - obiectiv se introduce un *lichid de imersie* (ulei de cedru), cu indice de refracție $n_1 \cong 1,5$ și $y_{1 \min}$ se micșorează de $n_1 (\cong 1,5)$ ori; în condițiile exemplului de mai sus, se obține $y_{1 \min} = 0,224 \mu\text{m}$. Utilizarea uleiului de imersie, cu indicele de refracție aproximativ egal

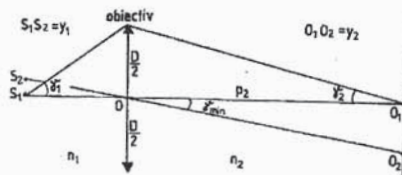


Fig.2.48. Configurație geometrică pentru determinarea puterii de rezoluție spațiale la microscop.

* Distanța obiect - obiectiv fiind mică, difracția nu este cu siguranță de tip Fraunhofer.

cu cel al sticlei obiectivului, mai are avantajul că reduce drastic pierderile de lumină prin reflexie la prima față a lentilei.

Calculul prezentat pentru rezoluția microscopului optic a fost realizat inițial de către Helmholtz, în anul 1874. El se bazează pe presupunerea că sursele S_1 și S_2 sunt *independente*, adică lumina lor este *necoerentă*. Așa stau lucrurile în cazul *obiectelor luminoase*. Aproape în același timp și independent de Helmholtz, aceeași problematică a puterii de rezoluție a microscopului, pentru cazul *obiectelor iluminate (coerente)* de la o sursă auxiliară, a fost analizată de către Abbe, obținând (vezi Cap. III, §. 3.15)

$$y_{1 \text{ min}}^{(\text{coer})} = \frac{0,50\lambda}{n_1 \sin \gamma_1} = \frac{0,50\lambda}{A} \quad (2.217)$$

Diferența dintre cele două formule se explică simplist în felul următor: în cazul luminii necoerente, oscilațiile luminoase ale surselor sunt independente și intensitatea luminoasă în planul de observație se adună aritmetic (nu se produce interferență), în timp ce în cazul luminii coerente, producându-se interferență, intensitățile luminoase nu se mai pot aduna aritmetic.

2. 8. 3. Rețeaua optică de difracție

Ca și prisma optică, dar cu performanțe superioare, rețeaua optică de difracție prezintă o importanță practică deosebită pentru descompunerea spectrală a luminii și pentru măsurarea lungimilor de undă. În general, o rețea reprezintă o structură periodică mono, bi sau tridimensională, care produce variații periodice ale amplitudinii reale și/ sau fazei unei incidente. Difracția se poate urmări atât în unda transmisă (*rețea de/prin transmisie*), cât și în unda reflectată (*rețea de/prin reflexie*).

Un exemplu simplu de rețea unidimensională, cu modulație de amplitudine, constă dintr-un număr N (mare !) de fante identice, paralele între ele și echidistante, practicate într-un paravan opac.

Primele rețele optice de difracție au fost realizate de David Rittenhouse (1785) și, independent, de Josef von Fraunhofer (1819), din fire metalice foarte subțiri, paralele (prin înfășurare pe două șuruburi așezate paralel, având pas mic, constant). Ulterior, Rowland și Wood, discipoli ai lui Fraunhofer, au preluat de la acesta ideea gravării pe sticlă sau metal, cu ajutorul diamantului, a unei serii de trăsături paralele, echidistante și, cu ajutorul unei mașini de divizat - cu cuțit de diamant -, au ridicat această tehnică la o finețe deosebită, realizând o densitate de 17 000 trăsături pe centimetru. Rețelele moderne, disponibile comercial, au 600, 1200 sau 1800 linii pe milimetru, pe o lățime de circa 10 cm, însumând astfel un număr total $N \cong 10^4 - 10^5$ linii. De pe rețelele originale, foarte scumpe, se realizează replici (mulaje) mult mai ieftine (ca cele din laboratoarele didactice).

Rețelele de sticlă pot fi utilizate fie prin transmisie, fie prin reflexie, în timp ce rețelele metalice sunt utilizabile numai în reflexie. Cele prin transmisie sunt folosite numai în domeniul vizibil (sticla obișnuită este absorbantă în ultraviolet), pe când rețelele prin reflexie pot fi folosite cu succes și în ultraviolet.

De regulă, rețelele sunt trasate pe suprafețe plane dar se folosesc și rețele metalice, trasate pe o suprafață sferică, realizându-se astfel *simultan* atât difracția, cât și focalizarea, fără utilizarea altor lentile sau oglinzi de focalizare.

Modulația periodică a amplitudinii complexe a luminii incidente se poate realiza fie prin modulația amplitudinii reale (*rețele de amplitudine*, realizate prin metoda descrisă mai sus, a zgârieturilor opace, paralele, pe un suport transparent), fie prin modulația fazei (*rețele de fază*, realizate din materiale transparente cu grosime variabilă, de exemplu periodic).

În continuare, vom deduce formula generală a difracției prin transmisie, la incidență normală, pe o *rețea ideală plană*, cu periodicitatea spațială $d > a$, formată din N fante identice, paralele și echidistante, de lățime a și lungime $b \gg a$. Mărimea d (egală cu lățimea unei fante plus lățimea unei zgârieturi) poartă denumirea de *constanta rețelei*.

Deoarece fantele sunt practic infinit de lungi pe direcția Oy (vezi fig.2.49), difracția are loc numai pe direcția Ox . Integrala de difracție Fraunhofer se scrie ca suprapunerea (interferența) câmpurilor optice de difracție produse de toate fantele, adică

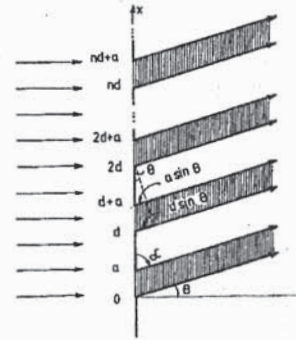


Fig.2.49. Difracția Fraunhofer pe o rețea de fante liniare.

$$\begin{aligned} \tilde{E}(v_x, v_y) &= C \sum_{n=0}^{N-1} \left[\int_{nd}^{nd+a} \exp(-2\pi i x v_x) dx \right] \cdot \left[\int_{-b/2}^{+b/2} \exp(-2\pi i y v_y) dy \right] = \\ &= C I(v_y, b) \sum_{n=0}^{N-1} I_n(v_x, a, d) \end{aligned} \quad (2.218)$$

După cum am arătat în secțiunea 2.8.1, în cazul unei singure fante înguste, când lungimea b este foarte mare, difracția pe Oy dispăre: $v_y \rightarrow 0$, $\exp(-2\pi i y v_y) \rightarrow 1$ și $I(v_y, b) \rightarrow b$. Avem

$$\tilde{E}(v_x, 0) = Cb \sum_{n=0}^{N-1} I_n(v_x, a, d). \quad (2.219)$$

Să calculăm acum integrala de difracție pe Ox . Obținem

$$I_n(v_x, a, d) = \int_{nd}^{nd+a} \exp(-2\pi i x v_x) dx = \frac{ae^{-2in\Delta\phi}(1-e^{-2i\Delta\phi})}{2i\Delta\phi}, \quad (2.220)$$

unde am notat cu

$$\Delta\phi = \pi a v_x = \frac{a}{2} k_x = \frac{a}{2} k \cos \alpha = \frac{k}{2} a \sin \theta = \pi \frac{a}{\lambda} \sin \theta, \quad (2.221)$$

diferența de fază între raza centrală și raza marginală a unei fante, iar cu

$$\Delta\phi = \pi d v_x = \frac{d}{2} k_x = \frac{d}{2} k \cos \alpha = \frac{k}{2} d \sin \theta = \pi \frac{d}{\lambda} \sin \theta, \quad (2.222)$$

jumătate din diferența de fază între două unde omoloage emise din fante adiacente (vecine).

Câmpul optic total în punctul de observație P(θ) este astfel

$$\tilde{E}(\theta) = C(ab) \frac{1 - e^{-2i\Delta\phi}}{2i\Delta\phi} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} e^{-2in\Delta\phi} \quad (2.223)$$

Suma din membrul drept este suma unei progresii geometrice cu N termeni, de rație $q = e^{-2i\Delta\phi}$, adică

$$\sum_{n=0}^{N-1} q^n = \frac{q^N - 1}{q - 1} = \frac{e^{-2iN\Delta\phi} - 1}{e^{-2i\Delta\phi} - 1}, \quad (2.224)$$

astfel că, în definitiv, *câmpul optic total* se scrie sub forma

$$\tilde{E}(\theta) = CA_1 \frac{1 - e^{-2i\Delta\phi}}{2i\Delta\phi} \cdot \frac{e^{-2iN\Delta\phi} - 1}{e^{-2i\Delta\phi} - 1}, \quad (2.225)$$

unde $A_1 = ab$ este aria unei singure fante. Cu ajutorul relației cunoscute $I(\theta) = \left| \tilde{E}(\theta) \right|^2$ se poate calcula ușor intensitatea luminoasă în direcția caracterizată de unghiul θ .

Pentru a putea interpreta simplu expresia (2.225) să o retranscriem într-o formă echivalentă, observând că *înmulțirea ei cu un factor de fază unimodular constant nu influențează asupra intensității I(θ)*. Înmulțind $\tilde{E}(\theta)$ cu factorul $e^{i\Delta\phi}$ avem

$$\begin{aligned} \tilde{E}'(\theta) &= \tilde{E}(\theta)e^{i\Delta\phi} = CA_1 \frac{e^{i\Delta\phi} - e^{-i\Delta\phi}}{2i\Delta\phi} \cdot \frac{e^{-2iN\Delta\phi} - 1}{e^{-2i\Delta\phi} - 1} = \\ &= CA_1 \frac{\sin(\Delta\phi)}{\Delta\phi} \cdot \frac{e^{-2iN\Delta\phi} - 1}{e^{-2i\Delta\phi} - 1} = CA_1 \operatorname{sinc}(\pi v_x) \frac{e^{-2iN\Delta\phi} - 1}{e^{-2i\Delta\phi} - 1}. \end{aligned} \quad (2.226)$$

Aici

$$\tilde{E}_1 \equiv CA_1 \operatorname{sinc}(\pi v_x), \quad (2.227)$$

este câmpul optic de difracție produs în punctul P de prima fantă a rețelei (compară cu relația (2.167) pentru $v_y \rightarrow 0$). Putem scrie deci

$$\tilde{E}'(\theta) = \tilde{E}_1 \cdot \frac{e^{-2iN\Delta\phi} - 1}{e^{-2i\Delta\phi} - 1}, \quad (2.228)$$

sau, având în vedere expresia ultimei fracții (vezi relația (2.224)),

$$\tilde{E}'(\theta) = \tilde{E}_1 \cdot \sum_{n=0}^{N-1} e^{-2in\Delta\phi} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{E}_1 e^{-2in\Delta\phi} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{E}_n(\theta). \quad (2.229)$$

Aici $\tilde{E}_n(\theta) = \tilde{E}_1 \exp(-2in\Delta\phi)$ este câmpul de difracție produs de a n-a fantă. Cum $2\Delta\phi = kd \sin \theta$ este diferența de fază între undele secundare Huygensiene emise de punctele omoloage din două fante vecine, interpretarea rezultatului de mai sus este evidentă. Câmpul

total $\tilde{E}'(\theta)$ în punctul de observație $P(\theta)$ se obține prin însumarea algebrică (interferența) a câmpurilor optice $\tilde{E}_N(\theta)$ produse prin difracția pe fiecare fantă. Suprapunerea undelor coerente, adică cu diferență de fază constantă în timp, emise de mulțimea punctelor omoloage ale celor N fante, reprezintă un fenomen de *interferență multiplă*.

Calculul intensității $I = \tilde{E}^* \cdot \tilde{E}$ a luminii difractate poate fi efectuat folosind oricare din expresiile echivalente $\tilde{E}(\theta)$ sau $\tilde{E}'(\theta)$. De exemplu, scriind mai întâi (2.228) sub forma

$$\tilde{E}'(\theta) = \tilde{E}_1 \frac{e^{-iN\Delta\phi}(e^{-iN\Delta\phi} - e^{+iN\Delta\phi})}{e^{-i\Delta\phi}(e^{-i\Delta\phi} - e^{+i\Delta\phi})} = \tilde{E}_1 e^{-i(N-1)\Delta\phi} \cdot \frac{\sin(N\Delta\phi)}{\sin(\Delta\phi)},$$

obținem

$$I(\theta) = I_1(\theta) \left(\frac{\sin(N\Delta\phi)}{\sin(\Delta\phi)} \right)^2, \quad (2.230)$$

unde

$$I_1(\theta) = I_N(\theta) = \tilde{E}_1^* \cdot \tilde{E}_1(\theta) = \tilde{E}_N^* \cdot \tilde{E}_N(\theta) = |C|^2 \cdot A_1^2 \cdot \left(\frac{\sin \Delta\phi}{\Delta\phi} \right)^2, \quad \forall N, \quad (2.231)$$

este intensitatea luminii difractate de o singură fantă (oricare ar fi aceasta; demonstrația se poate face prin translatarea originii O). Pe de altă parte, factorul $(\sin(N\Delta\phi)/\sin(\Delta\phi))^2$ din relația (2.230), care nu depinde de lărgimea fantelor, ci numai de periodicitatea d a rețelei, reprezintă fenomenul de *interferență multiplă*. El se păstrează nemodificat și în limita $a \rightarrow 0$, $b \rightarrow \infty$ cu $A_1 = ab = \text{finit}$, când $\Delta\phi \rightarrow 0$ și $\sin(\Delta\phi)/(\Delta\phi) \rightarrow 1$.

Observăm că intensitatea totală $I(\theta)$ diferă drastic de suma simplă

$$I = \sum_{n=0}^{N-1} I_n = NI_1 \quad (2.232)$$

a intensităților difractate de cele N fante. Cauza constă în fenomenul de interferență multiplă a undelor care provin de la diversele fante, adică în faptul că, *în punctul de observație, se însumează câmpurile și nu intensitățile*. Intensitatea totală în punctul P are forma generală

$$I = \tilde{E}'^* \cdot \tilde{E}' = \left(\sum_n \tilde{E}_n^* \right) \cdot \left(\sum_m \tilde{E}_m \right) = \sum_n \tilde{E}_n^* \tilde{E}_n + \sum_{n \neq m} \sum \tilde{E}_n^* \tilde{E}_m = \sum_n I_n + \sum_{n \neq m} \tilde{E}_n^* \tilde{E}_m. \quad (2.233)$$

Primul termen din membrul drept reprezintă suma intensităților care, în cazul rețelei, este egală cu NI_1 - vezi (2.232), adică de N ori intensitatea generată de o singură fantă. Al doilea termen, reprezentat prin suma dublă cu $n \neq m$, este termenul de interferență, care produce o redistribuire radicală a energiei, datorită periodicității rețelei. Acest termen s-ar anula numai dacă un număr foarte mare (N) de fante s-ar succeda la distanțe d_n aleatoare astfel încât, în medie, termenii pozitivi și negativi din suma dublă să se compenseze. În cazul rețelelor, fantele sunt dispuse însă regulat, periodic, astfel că termenul de interferență domină distribuția $I(\theta)$ a intensității luminii difractate.

Formula (2.30) a intensității totale, în cazul difracției pe rețeaua de N fante, se poate scrie și sub forma

$$I(\theta) = |C|^2 \cdot A_1^2 \cdot \left(\frac{\sin(\Delta\phi)}{\Delta\phi} \right)^2 \left(\frac{\sin(N\Delta\phi)}{\sin(\Delta\phi)} \right)^2, \quad (2.234)$$

unde

$$\Delta\phi = \pi \frac{a}{\lambda} \sin \theta, \quad \Delta\phi = \pi \frac{d}{\lambda} \sin \theta, \quad \frac{\Delta\phi}{\Delta\phi} = \frac{d}{a} > 1. \quad (2.235)$$

În direcția înainte, adică pentru $\theta = 0$, avem $\Delta\phi = \Delta\phi = 0$ independent de lungimea de undă λ , de lățimea fantei a sau de constanta d a rețelei. Deoarece

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin Nx}{\sin x} \right) = N, \quad (2.236)$$

obținem

$$I(0) = |C|^2 \cdot A_1^2 \cdot N^2 = I_1(0)N^2 = |C|^2 \cdot A^2 \sim N^2, \quad (2.237)$$

unde $A = NA_1$ este aria aperturii rețelei (adică aria tuturor celor N fante) iar $I_1(0) = |C|^2 \cdot A_1^2$ corespunde intensității înainte pentru o singură fantă. Este remarcabilă dependența $I(0) = I_1(0) \cdot N^2$, cauzată de interferența multiplă. Pentru $N = 10^5$ fante avem astfel $I(0) = 10^{10} I_1(0)$, maximul central - pentru $\theta = 0$ - fiind foarte pronunțat.

Ținând cont de forma concretă a intensității $I(0)$, formula generală a rețelei optice are în final forma

$$I(\theta) = I(0) \left(\frac{\sin(\Delta\phi)}{\Delta\phi} \right)^2 \cdot \left(\frac{\sin(N\Delta\phi)}{N \sin(\Delta\phi)} \right)^2 \equiv I(0) f_d(\Delta\phi) f_i(N, \Delta\phi), \quad (2.238)$$

$f_d(\Delta\phi)$ numindu-se *factor de difracție* iar $f_i(N, \Delta\phi)$ - *factor de interferență*, cu expresiile

$$f_d(\Delta\phi) = \text{sinc}^2(\Delta\phi), \quad f_i(N, \Delta\phi) = \frac{\text{sinc}^2(N\Delta\phi)}{\text{sinc}^2(\Delta\phi)}. \quad (2.239)$$

Deoarece $\Delta\phi/\Delta\phi > 1$ rezultă că factorul de interferență oscilează relativ rapid față de factorul de difracție care are numai o influență modulatorie.

Formula generală obținută este valabilă pentru o rețea cu orice număr N de fante: o singură fantă ($N = 1$), bifantă ($N = 2$), trifantă ($N = 3$), etc., până la rețeaua optică propriu-zisă ($N = 10^4 - 10^5$).

Pentru $N = 1$ factorul de interferență $f_i = 1$ și $I(\theta) = I(0) f_d(\Delta\phi)$ descrie difracția pe o singură fantă (vezi (2.187)).

Pentru $N = 2$ obținem cazul bifantei Young. În acest caz

$$f_i = \left(\frac{2 \sin \Delta\phi \cos \Delta\phi}{2 \sin \Delta\phi} \right)^2 = \cos^2(\Delta\phi) = \cos^2\left(\pi \frac{d}{\lambda} \sin \theta\right), \quad (2.240)$$

respectiv

$$I(\theta) = I(0) \text{sinc}^2\left(\pi \frac{a}{\lambda} \sin \theta\right) \cdot \cos^2\left(\pi \frac{d}{\lambda} \sin \theta\right), \quad (2.241)$$

cu $I(0) = 4I_1(0)$. Ilustrăm distribuția unghiulară a intensității luminoase pentru cazul $d/a = \Delta\phi/\Delta\phi = 4$ (vezi fig.2.50). Maximele de interferență de ordinele 4, 8, 12, ... (unde

Remarcăm, în primul rând, valorile subliniate ($N\Delta\phi = mN\pi$, adică $\Delta\phi = m\pi$, $m = \pm 1, \pm 2, \dots$) în care atât $\text{sinc}^2(N\Delta\phi)$ cât și $\text{sinc}^2(\Delta\phi)$ sunt egale cu zero și aparenta nedeterminare a funcției f_i , de forma $\frac{0}{0}$, se ridică, obținând $f_i = 1$. Aceste valori

$$\Delta\phi = m\pi, \quad d \sin \theta_{\max} = m\lambda, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.246)$$

corespund maximelor de interferență, care poartă numele de *maxime (spectre) principale (de ordinul m)*. Intensitatea luminoasă a maximelor principale este dată de

$$I_{\max}^{(m)} = N^2 I_1(0) f_d(\Delta\phi = \frac{a}{d} m\pi), \quad (2.247)$$

căci

$$\Delta\phi = \frac{a}{d} \Delta\phi = \frac{a}{d} m\pi. \quad (2.248)$$

Evident, pentru $m = 0$ avem $\theta = 0$, $\Delta\phi = \Delta\phi = 0$, $f_d = f_i = 1$ și $I_{\max}^{(0)} = N^2 I_1(0)$. Avem *maximul central alb* (independent de λ). Toate undele se propagă pe direcția de observație $\theta = 0$ (se propagă "înainte", în prelungirea direcției incidente), în fază, și se întăresc reciproc prin interferență constructivă. Pentru $m \neq 0$, chiar și la maximele principale de interferență ($f_i = 1$) avem $f_d < 1$, adică $I_{\max}^{(m)} < N^2 I_1(0)$. Totuși, cum am văzut și în cazul bifantei, pentru maximele de interferență din apropierea maximului central avem $f_d \lesssim 1$ și $I_{\max} \lesssim N^2 I_1(0)$, adică înălțimea lor este încă de ordinul de mărime al maximului central.

Condiția $d \sin \theta_{\max} = m\lambda$ pentru *orientarea maximelor principale* de interferență ne spune că *diferența de drum între razele omoloage din fante vecine este un număr întreg de lungimi de undă*. Cu o bună aproximație, deoarece $\lambda \ll d$, această condiție mai poate fi scrisă și în forma $\sin \theta_{\max} \cong \theta_{\max} = m(\lambda/d)$, m fiind un număr nu prea mare (căci contează practic numai câteva franje de interferență conținute în franja centrală de difracție). Numărul m_{\max} rezultă din condiția $d \sin \theta = m_{\max} \lambda$ și condiția primului minimul de difracție $a \sin \theta = \lambda$. Obținem $m_{\max} = d/a$. În cazul bifantei cu $d/a = 4$ avem $m_{\max} = 4$.

Cu excepția maximului central alb, poziția maximelor principale de interferență depinde de λ . În vecinătatea maximului central intensitatea celorlalte maxime este foarte mare ($\sim N^2$) și, cum vom vedea, semilărgimea lor $\Delta\theta = (1/N) \cdot (\lambda/d)$ foarte mică, face ca rețelele optice să reprezinte cel mai important dispozitiv pentru descompunerea spectrală a luminii și măsurarea lungimilor de undă.

Să determinăm acum *semilărgimea* sau *finețea maximelor principale*. Pentru aceasta, așa cum se observă și din șirul de valori prezentat mai sus, precizăm mai întâi că *între două maxime principale succesive se formează N-1 minime nule* (la bifantă $N - 1 = 1$). Poziția minimelor nule rezultă din anularea numărătorului din expresia lui f_i (fără ca numitorul să se anuleze), adică $\sin(N\Delta\phi) = 0$ cu $\sin(\Delta\phi) \neq 0$. Avem

$$N \cdot \Delta\phi = mN\pi + p\pi = \pi \cdot (mN + p), \quad (2.249)$$

sau

$$\Delta\phi = \pi \left(m + \frac{p}{N} \right), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad p = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm(N-1). \quad (2.250)$$

Observație: Valorile $p = 0$ și $p = \pm N$ sunt excluse din șirul de valori deoarece ele ar da $\Delta\phi = m\pi$, respectiv $\Delta\phi = \pi(m \pm 1)$ care corespund nu minimelor nule, ci maximelor principale ale factorului de interferență (căci se anulează simultan și numărătorul și numitorul, ridicarea nedeterminării $\frac{0}{0}$ conducând la $f_1 = 1$).

Prin urmare, *condiția minimelor nule* are forma

$$d \sin \theta_{\min} = \left(m + \frac{p}{N}\right)\lambda, \quad (2.251)$$

sau practic (pentru m nu prea mari)

$$\sin \theta_{\min} \cong \theta_{\min} = \left(m + \frac{p}{N}\right) \cdot \frac{\lambda}{d}. \quad (2.252)$$

Remarcabil este faptul că deschiderea unghiulară $\Delta\theta$, respectiv distanța $f \cdot \Delta\theta$ de pe ecranul de observație (f fiind distanța focală a lentilei de focalizare), dintre oricare maxim principal m și un minim vecin nul ($p = \pm 1$) este

$$\Delta\theta = \theta_{\max}^{(m)} - \theta_{\min}^{(m; p = \pm 1)} = m \frac{\lambda}{d} - \left(m \pm \frac{1}{N}\right) \frac{\lambda}{d} = \mp \frac{1}{N} \frac{\lambda}{d}. \quad (2.253)$$

În concluzie, maximele principale formate de o rețea de difracție ($N \cong 10^4 - 10^5$) sunt foarte înalte ($I_{\max} \sim N^2$) și foarte înguste ($\Delta\theta \sim 1/N$). În aceste maxime este concentrată, practic, toată lumina difractată.

În afară de maximele principale și de minimele nule, mai există și *maxime secundare*. Într-adevăr, așa cum rezultă și din șirul de valori la care ne-am mai referit, *între două maxime principale succesive se găsesc $N-1$ minime nule și $N-2$ maxime secundare, plasate între minimele nule*. Poziția maximelor secundare se obține prin anularea derivatei

$$\frac{d}{d(\Delta\phi)} \left[\frac{\sin(N\Delta\phi)}{\sin(\Delta\phi)} \right] = \frac{N \cos(N\Delta\phi) \sin(\Delta\phi) - \cos(\Delta\phi) \sin(N\Delta\phi)}{\sin^2(\Delta\phi)} = 0. \quad (2.254)$$

Excluzând situația $\sin(\Delta\phi) = 0$, care ar corespunde maximelor principale, ajungem la ecuația transcendentă $N \operatorname{tg}(\Delta\phi) = \operatorname{tg}(N\Delta\phi)$ care se poate rezolva grafic (vezi și secțiunea 2.8.1). Rezultă astfel că maximele secundare se găsesc *aproximativ* la jumătatea intervalului $\Delta\theta$ care separă două minime nule vecine. Introducând aceste valori în expresia lui f_1 , se obțin valori neglijabile ale intensității maximelor secundare în comparație cu intensitatea maximelor principale. Numeroasele maxime secundare ale rețelelor optice formează un fond extrem de slab pe care se detașează maximele principale foarte înguste și intense.

În fig.2.51 ilustrăm distribuția lui $f_1(\theta)$ în regiunea $m = 0, \pm 1, \pm 2$, pentru $N = 2 \div 10$ și situația limită când N este foarte mare ($N = 100$).

În încheierea acestei secțiuni prezentăm pe scurt extinderea formulelor deduse în cazul incidenței normale la cazul incidenței oblice pe rețea. Considerând situația reprezentată în fig.2.52. a, unde $\theta_0 \neq 0$, observăm că în integrala de difracție Fraunhofer (2.219) - (2.220), frecvența spațială v_x trebuie înlocuită cu

$$\Delta v_x = \frac{1}{2\pi} \Delta k_x = \frac{k}{2\pi} (\cos \alpha - \cos \alpha_0) = \frac{1}{\lambda} (\sin \theta - \sin \theta_0). \quad (2.255)$$

În mod analog, diferențele de fază $\Delta\phi$ și $\Delta\phi$ trebuie scrise în general sub forma

$$\Delta\phi = \pi a \Delta v_X = \pi \left(\frac{a}{\lambda} \right) (\sin\theta - \sin\theta_0), \quad (2.256)$$

respectiv

$$\Delta\phi = \pi d \Delta v_X = \pi \left(\frac{d}{\lambda} \right) (\sin\theta - \sin\theta_0). \quad (2.257)$$

Pozițiile maximelor principale sunt date de relația $\Delta\phi = m\pi$, care are forma

$$d(\sin\theta - \sin\theta_0) = m\lambda, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.258)$$

Mínimele nule, poziționate conform relației $\Delta\phi = (m + p/N)\pi$, sunt determinate de condiția

$$d(\sin\theta - \sin\theta_0) = \left(m + \frac{p}{N}\right)\lambda, \\ p = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm(N-1), \quad (2.259)$$

pentru fiecare valoare concretă a lui m din șirul de mai sus.

Evident, maximul central alb ($m=0$) se află în prelungirea direcției incidente, adică pentru $\theta = \theta_0$, independent de lungimea de undă λ .

În general, ne interesează ordinele de difracție mici ($m = \pm 1, \pm 2$) și, deoarece $\lambda/d \ll 1$ (condiția lui Kirchhoff) rezultă că unghiurile de difracție θ nu diferă prea mult de unghiul de incidență θ_0 . Pe această bază putem scrie

$$\sin\theta - \sin\theta_0 = 2 \sin \frac{\theta - \theta_0}{2} \cos \frac{\theta + \theta_0}{2} \approx (\theta - \theta_0) \cos\theta_0, \quad (2.260)$$

și condiția maximelor principale (2.258) devine

$$(d \cos\theta_0) \cdot (\theta - \theta_0) \cong m\lambda, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2. \quad (2.261)$$

Pentru incidență normală ($\theta_0 = 0$), sau aproape normală ($\theta_0 \approx 0$), această condiție devine

$$d(\theta - \theta_0) \approx m\lambda. \quad (2.262)$$

Deosebit de interesant este cazul incidenței razante ($\theta_0 \approx \pi/2$), când unghiurile de difracție sunt de asemenea razante ($\theta \approx \pi/2$). În acest caz, se pot produce spectre de difracție chiar și cu rețele grosiere ($d = \text{mare}$), deoarece parametrul care conține, anume $d \cos\theta_0$ - din formula (2.261), poate fi făcut oricât de mic. Metoda incidenței razante joacă un rol important în spectroscopia de raze X (vezi secțiunea 2.8.7, metoda lui Rupp) sau γ .

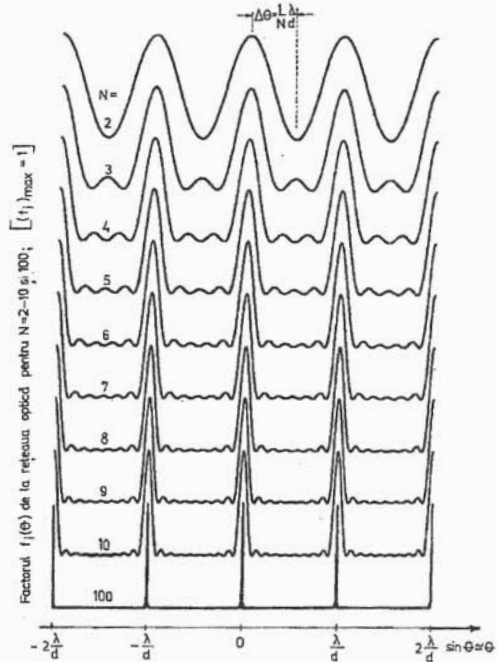


Fig.2.51. Distribuția unghiulară a intensității luminoase în ordinele 0 și ± 1 , pentru diferite valori ale lui N .

Situația din fig.2.52 b, corespunde cazului $\alpha = (\pi/2) + \theta$, $\alpha_0 = (\pi/2) - \theta_0$ când $\cos \alpha = -\sin \theta$ și $\cos \alpha_0 = +\sin \theta_0$. În consecință, relația (2.255) devine

$$\Delta v_X = \frac{1}{2\pi} \Delta k_X = \frac{k}{2\pi} (\cos \alpha - \cos \alpha_0) = -\frac{1}{\lambda} (\sin \theta + \sin \theta_0). \quad (2.255')$$

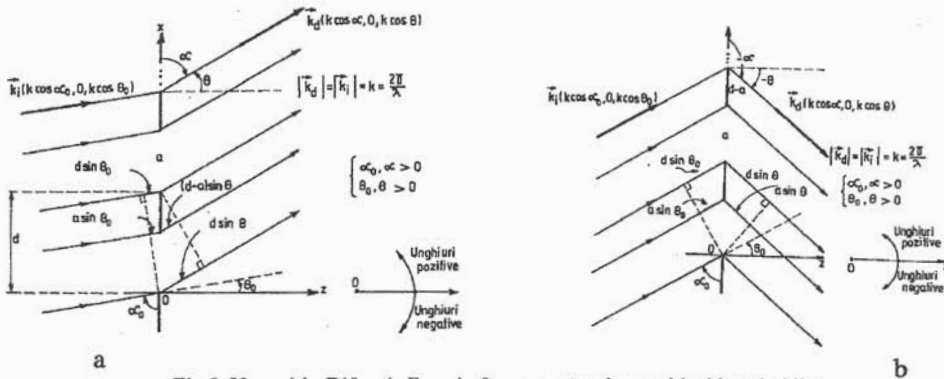


Fig.2.52. a și b. Difrakția Fraunhofer pe o rețea, în cazul incidenței oblice (unghiuri de difracție pozitive și negative).

Toate celelalte relații (2.256) - (2.259) pot fi transcrise imediat, prin regula de corespondență $\theta \rightarrow -\theta$ (ceea ce înseamnă că unghiul respectiv se măsoară în cealaltă parte față de normala Oz).

În sfârșit, ca o aplicație a teoremei lui Babinet, să demonstrăm că, la incidență normală ($\theta_0 = 0$), pentru o rețea de difracție prin transmisie $I_{\text{difr}} \leq (1/4)I_{\text{inc}}$, unde I_{inc} este intensitatea luminii incidente iar I_{difr} este intensitatea luminii difractate în toate maximele de difracție, cu excepția maximumului principal, de ordinul zero. Să demonstrăm de asemenea că semnul de egalitate în relația de mai sus, corespunde numai cazului $a = a' = d/2$ unde $a' = d - a$ este lățimea unei zone opace (grosimea zgârieturii diamantului, adică distanța dintre două fante succesive ale rețelei).

Notând cu I_0 intensitatea luminoasă concentrată în maximumul de ordinul zero și prin I_{difr} - cea din toate celelalte maxime, putem scrie $I_0 + I_{\text{difr}} = I_{\text{trans}}$, unde I_{trans} este intensitatea luminoasă transmisă dincolo de rețea. Pentru rețeaua *complementară* (cu fante de lățime a' și zgârieturi de grosime a) putem scrie în mod similar $I'_0 + I'_{\text{difr}} = I'_{\text{trans}}$. În virtutea teoremei lui Babinet, avem $I'_{\text{difr}} = I_{\text{difr}}$, adică

$$I'_{\text{trans}} - I'_0 = I_{\text{trans}} - I_0. \quad (2.263)$$

Pe de altă parte, pentru N foarte mare (când $N - 1 \cong N$), conform celor stabilite anterior (vezi relația (2.237))

$$\frac{I_0}{I'_0} = \left(\frac{a}{a'}\right)^2 = \left(\frac{a}{d-a}\right)^2, \quad (2.264)$$

și

$$\frac{I_{\text{trans}}}{I'_{\text{trans}}} = \frac{a}{a'} = \frac{a}{d-a}, \quad (2.265)$$

deoarece

$$I_{\text{trans}} = \frac{a}{d} I_{\text{inc}} \quad \text{și} \quad I'_{\text{trans}} = \frac{a'}{d} I_{\text{inc}} = \frac{d-a}{d} I_{\text{inc}}. \quad (2.266)$$

Revenind în relația (2.263) obținem

$$I_0 = \frac{a}{d} I_{\text{trans}}, \quad (2.267)$$

adică

$$I_{\text{difr}} = \frac{a}{d} \cdot \frac{d-a}{d} I_{\text{inc}}. \quad (2.268)$$

Ultima relație se mai poate scrie însă și sub forma

$$I_{\text{difr}} = \frac{1}{d^2} \left[\frac{d^2}{4} - \left(a - \frac{d}{2} \right)^2 \right] \cdot I_{\text{inc}}. \quad (2.269)$$

Pentru un d dat, paranteza dreaptă este maximă atunci când $(a - d/2)^2$ este minimă, adică are valoarea zero, deci pentru $a = d/2$ (ceea ce înseamnă și $a' = d - a = d/2$). Rezultă imediat $I_{\text{difr}} \leq (1/4) I_{\text{inc}}$, egalitatea cu zero corespunzând doar situației particulare $a = a' = d/2$.

Caracteristicile spectrale ale rețelei de difracție se vor analiza, comparativ cu cele ale prismei optice, în secțiunea următoare.

2. 8. 4. Utilizarea rețelei optice și a prisme optice ca instrumente spectrale

A. Rețeaua optică

Datorită intensității mari, îngustimii și dependenței de lungimea de undă λ a maximelor principale de interferență vecine cu maximul central, rețeaua optică reprezintă unul din cele mai importante instrumente utilizate în practică pentru descompunerea spectrală a luminii și măsurarea lungimilor de undă. Schema de principiu a unui spectroscop cu rețea funcționând prin transmisie este dată în fig.2.53. Orice radiație luminoasă incidentă este difractată în maximul principal, de ordinul 0 (sau maximul central alb, independent de λ), și în maximele principale de ordine $m \neq 0$ ($m = \pm 1, \pm 2, \dots$) ale căror poziții depind de λ conform formulei

$$\sin \theta \cong \theta = m \frac{\lambda}{d}, \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.270)$$

Principalele caracteristici ale unei rețele de difracție, ca și ale altor instrumente spectrale, sunt *dispersia unghiulară*, *domeniul spectral* și *puterea de rezoluție spectrală (sau cromatică)*.

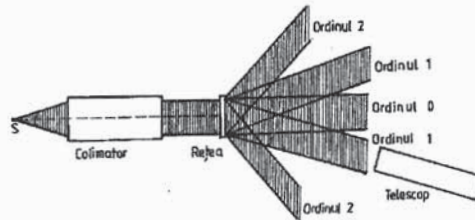


Fig.2.53. Schema de principiu a unui spectroscop cu rețea de transmisie.

Proprietatea rețelei optice de a împrăști unghiular lumina policromatică (de exemplu, albă) este caracterizată prin *dispersia unghiulară* $d\theta/d\lambda$. Diferențind relația de mai sus obținem

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{m}{d \cos \theta} \cong \frac{m}{d} = \text{constant}, \text{ pentru } \theta \text{ mici.} \quad (2.271)$$

Considerând numai maximele de o parte a maximumului de ordinul zero, de exemplu cele cu $m > 0$, constanta din membrul drept este pozitivă, astfel că unghiul de împrăștiere crește *liniar* la creșterea lungimii de undă. Aceasta înseamnă că, în lumină albă, radiația roșie ($\lambda_r = 700 \text{ nm}$) este deviată mai mult decât radiația albastră ($\lambda_a = 450 \text{ nm}$) în fiecare ordin m . În fig.2.54 se arată schematic dispersia unghiulară pentru lumina compusă din două radiații monocromatice λ și $\lambda + \Delta\lambda$, în ordinele $m = 0, \pm 1, \pm 2$ și ± 3 .

În general, lumina incidentă policromatică este astfel descompusă spectral de rețeaua optică în componentele sale monocromatice, spațial separate. Se spune că maximele principale de ordinul $m = 1$ formează spectrul de ordinul 1, urmat de maximele principale de ordinul 2 care formează spectrul de ordinul 2, ș.a.m.d.

Cel mai spectaculos se prezintă spectrul luminii albe (de diferite ordine $m \neq 0$), care conține într-un evantai continuu toate culorile curcubeului de la violet la roșu, cu roșul deviat cel mai mult.

Este evident că rețeaua optică este utilizabilă atâta timp cât *intervalul spectral* $\Delta\lambda$ al sursei de lumină nu depășește o valoare maximă $\Delta\lambda_{\text{max}}$, după care spectrele de ordine succesive se acoperă (la început parțial, și apoi din ce în ce mai mult). Mărimea $\Delta\lambda_{\text{max}}$ poartă numele de *domeniu de dispersie* și el rezultă din condiția ca maximumul de ordinul $m + 1$ pentru lungimea de undă λ să coincidă ca direcție (θ) cu maximumul de ordinul m pentru lungimea de undă $\lambda + \Delta\lambda$ (după aceea începe întrepătrunderea tuturor celorlalte maxime principale):

$$\theta = m \frac{\lambda + \Delta\lambda_{\text{max}}}{d} = (m + 1) \frac{\lambda}{d}. \quad (2.272)$$

De aici

$$\Delta\lambda_{\text{max}} = \frac{\lambda}{m}. \quad (2.273)$$

Să considerăm, pentru exemplificare, domeniul vizibil, cuprins între $\lambda = 390 \text{ nm}$ și $\lambda + \Delta\lambda = 770 \text{ nm}$, astfel că $\Delta\lambda = 380 \text{ nm}$. De aici rezultă că spectrul vizibil de ordinul 1 nu se suprapune peste spectrul vizibil de ordinul 2 deoarece $\Delta\lambda < \Delta\lambda_{\text{max}} = \lambda$. În general, rețelele de difracție sunt folosite pentru studiul spectrelor de ordine inferioare ($m = 1, 2, 3$) astfel ca domeniul spectral investigat să fie cât mai mare, iar influența factorului de difracție f_d cât mai mică.

A treia caracteristică importantă a unei rețele optice este *puterea de rezoluție spectrală (cromatică)*. Oricât de îngustă ar fi o linie spectrală emisă de o sursă, ea este reprezentată de figura de difracție, dominată de maximele principale corespunzătoare, de lățime $\Delta\theta = (1/N)(\lambda/d)$ - lățime de aparat finită pentru orice situație practică (N finit).

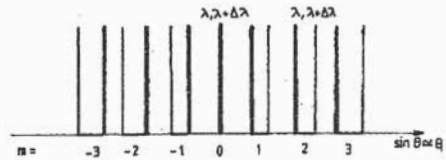


Fig.2.54. Reprezentare schematică a dispersiei unghiulare pentru două lungimi de undă (ușor diferite).

Intervalul spectral rezolvabil reprezintă cea mai mică diferență de lungimi de undă $\Delta\lambda_{\min}$ a două linii spectrale care mai pot fi observate ca distincte. Cu ajutorul său, puterea de rezoluție spectrală a rețelei optice (a aparatelor spectrale în general) se definește sub forma

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda_{\min}} \quad (2.274)$$

Pentru evaluarea lui $\Delta\lambda_{\min}$ în cazul rețelei de difracție vom folosi din nou *criteriul practic al lui Rayleigh* în următoarea formulare: două maxime principale de același ordin, corespunzătoare la două linii spectrale λ și $\lambda + \Delta\lambda_{\min}$, mai pot fi rezolvate dacă maximul principal al unei linii se suprapune peste primul minim nul al celeilalte linii (vezi fig.2.55). Din fig.2.55 și utilizând criteriul lui Rayleigh putem scrie că

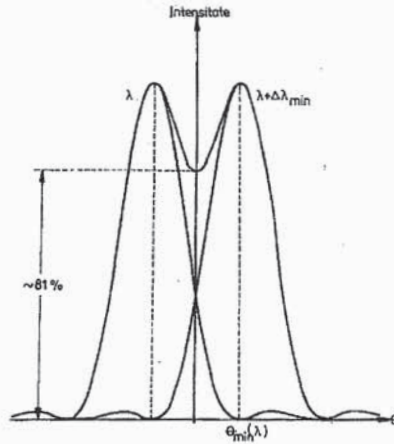


Fig.2.55. Criteriul lui Rayleigh.

$$\theta_{\min}(\lambda) = \theta_{\max}(\lambda + \Delta\lambda_{\min}), \quad (2.275)$$

adică

$$\left(m + \frac{1}{N}\right) \frac{\lambda}{d} = m \frac{\lambda + \Delta\lambda_{\min}}{d} \quad (2.276)$$

De aici rezultă intervalul spectral rezolvabil

$$\Delta\lambda_{\min} = \frac{1}{N} \frac{\lambda}{m}, \quad (2.277)$$

și apoi, puterea de rezoluție spectrală

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda_{\min}} = mN. \quad (2.278)$$

Pentru ilustrare să considerăm o rețea optică cu $N = 10^5$ linii (fante)* și $m = 3$. Obținem $R = 3 \cdot 10^5$. În domeniul vizibil, la $\lambda = 600 \text{ nm}$ putem rezolva, cu această rețea, în ordinul al treilea, linii spectrale până la diferența

$$\Delta\lambda_{\min} = \frac{\lambda}{R} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ nm}.$$

Aceasta este precizia (ordinul său de mărime) cu care se pot măsura lungimile de undă folosind rețele optice ca elemente spectrale, dispersive.

* Proportionalitatea lui R cu N a impus construirea unor rețele cu porțiuni striată cât mai lungă, deziderat realizat prin perfecționarea mașinilor divizor.

B. Prisma optică

Pentru a avea un termen de comparație pentru performanțele rețelei optice, în continuare vom considera dispersia unghiulară și puterea de rezoluție spectrală a unei prisme optice.

Prisma optică este construită dintr-un material optic (sticlă, cuarț topit, etc.) omogen și transparent, limitat de suprafețe plane neparalele. Spre deosebire de rețeaua optică, utilizarea prisme optice în calitate de piesă spectrală se bazează pe fenomenul de *dispersie normală*, adică pe dependența $n = n(\lambda)$ normală a indicelui de refracție, adică cu $dn/d\lambda < 0$.

Să considerăm un fascicul luminos incident bine colimat, care face parte din secțiunea principală a unei prisme isocelă, ce traversează prisma *la deviație minimă*, astfel că fasciculul emergent și cel incident sunt simetrice (fig.2.56). Din considerații de egalitate a drumurilor optice parcurse de razele marginale (care trec pe la vârful și pe la bază) rezultă:

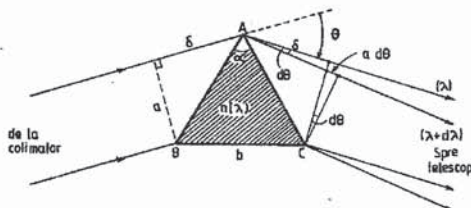


Fig.2.56. Dispersia printr-o prismă isocelă.

- pentru lungimea de undă λ

$$2\delta = nb, \text{ și} \quad (2.279)$$

- pentru lungimea de undă $\lambda + d\lambda$ (în primă aproximație)

$$2\delta + a d\theta = (n + dn)b. \quad (2.280)$$

Prin diferența celor două relații obținem

$$a d\theta = b dn. \quad (2.281)$$

Dispersia unghiulară a prisme optice este

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{b}{a} \cdot \frac{dn}{d\lambda}, \quad (2.282)$$

sau, folosind relația lui Cauchy (vezi Cap. I, secțiunea 1.2.7)

$$n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2}, \quad \frac{dn}{d\lambda} = -\frac{2B}{\lambda^3}, \quad A, B > 0, \quad (2.283)$$

rezultă finalmente

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = -\frac{2b}{a} B \frac{1}{\lambda^3} = -\frac{\text{const}}{\lambda^3} < 0. \quad (2.284)$$

Deoarece în cazul prisme, dispersia unghiulară depinde de lungimea de undă ($\sim -1/\lambda^3$) spectrul *nu este liniar*. Diferitele radiații din spectrul luminii albe (de exemplu), sunt deviate în mod diferit (mai puțin radiația roșie și mult mai mult radiația violet, căci

$\lambda_V < \lambda_R$). Utilizarea prisme ca element dispersiv este avantajoasă în domeniul lungimilor de undă mici.

Relația (2.282) poate fi dedusă și într-un alt mod. După cum se știe din fizica liceală, dacă θ este deviația minimă, iar α este unghiul refringent al prisme, indicele de refracție n poate fi determinat cu formula

$$n(\lambda) = \frac{\sin \left[\frac{1}{2}(\theta(\lambda) + \alpha) \right]}{\sin \left(\frac{\alpha}{2} \right)}.$$

Prin diferențiere în ambele părți obținem

$$\frac{d\theta}{dn} = \frac{2 \sin \left(\frac{\alpha}{2} \right)}{\cos \left[\frac{1}{2}(\theta + \alpha) \right]},$$

astfel că dispersia unghiulară este

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{d\theta}{dn} \frac{dn}{d\lambda} = \frac{2 \sin \left(\frac{\alpha}{2} \right)}{\cos \left[\frac{1}{2}(\theta + \alpha) \right]} \cdot \frac{dn}{d\lambda}.$$

Ținând cont de legea refracției, de la care am pornit, avem

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{2 \sin \left(\frac{\alpha}{2} \right)}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right)}} \cdot \frac{dn}{d\lambda} = \frac{b}{a} \cdot \frac{dn}{d\lambda}, \quad (2.282')$$

căci $b = 2(AB)\sin(\alpha/2)$ iar $a = (AC)\cos(\frac{1}{2}(\theta + \alpha))$ cu $AC = AB$. Pentru o prismă cu unghi refringent (α) dat, dispersia unghiulară depinde numai de n și de $dn/d\lambda$. Se observă că este indicat a se lucra cu materiale optice pentru care aceste mărimi sunt cât mai mari posibil. Din păcate, aceste materiale (sticlele grele, flint), devin absorbante în domeniul violet-ultraviolet (adică la lungimi de undă mici) și, chiar dacă $d\theta/d\lambda$ este mai mic, în aceste domenii spectrale se utilizează prisme confecționate din sticle ușoare (crown).

Cum fasciculul de lumină este limitat de lățimea maximă a (vezi figura), puterea de rezoluție spectrală rezultă din aplicarea criteriului lui Rayleigh pentru fanta de această lățime: maximul central de difracție al radiației λ să coincidă cu primul minim nul al radiației $\lambda + \Delta\lambda_{\min}$ (sau echivalent, maximul central al radiației $\lambda - \Delta\lambda_{\min}$ să coincidă cu primul minim nul al radiației λ), adică

$$\Delta\theta \equiv \frac{b}{a} \Delta n = -\frac{\lambda}{a}, \quad b \Delta n = -\lambda. \quad (2.285)$$

De aici, pentru prisma optică rezultă

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda_{\min}} = -b \frac{\Delta n}{\Delta\lambda_{\min}} \rightarrow -b \left(\frac{dn}{d\lambda} \right) = \frac{2Bb}{\lambda^3} = \frac{\text{const}'}{\lambda^3}. \quad (2.286)$$

Este remarcabilă proporționalitatea $R \sim b$, care ne arată că puterea de rezoluție cromatică este cu atât mai mare, cu cât baza prisme este mai mare. Relația $R = -b(dn/d\lambda)$ se poate utiliza și în cazul unui spectroscop la care elementul dispersiv este format din mai multe prisme din același material, așezate în cascadă, dacă se notează cu b suma bazelor prismelor.

Pentru o evaluare exemplificatoare să considerăm o prismă din sticlă, cu baza $b = 10 \text{ cm}$, având în domeniul vizibil $dn/d\lambda = -10^5 \text{ m}^{-1}$. Rezultă o putere de rezoluție de ordinul

$$R = -b \left(\frac{dn}{d\lambda} \right) = +10^{-1} \cdot 10^5 = 10^4,$$

adică de circa zece ori mai mică decât pentru rețeaua optică. În domeniul vizibil, pentru $\lambda = 600 \text{ nm}$, putem rezolva, cu prisma optică, linii spectrale până la

$$\Delta\lambda_{\min} = \frac{\lambda}{R} = \frac{6 \cdot 10^2 \text{ nm}}{10^4} = 0,06 \text{ nm}.$$

O prismă optică subțire, cu baza de numai un centimetru ($b = 1 \text{ cm}$) are $R = 10^3$ și, la aceeași lungime de undă ($\lambda = 600 \text{ nm}$), ea dă $\Delta\lambda_{\min} = 0,6 \text{ nm}$. Cu această prismă ne aflăm la limita puterii de rezoluție pentru a separa bine-cunoscutul dublet D al sodiului ($\lambda_1 = 589 \text{ nm}$, $\lambda_2 = 589,6 \text{ nm}$) pentru care $\Delta\lambda = 0,6 \text{ nm}$.

Deși prismele sunt inferioare rețelelor de difracție din punctul de vedere al puterii de rezoluție spectrală, ele sunt preferabile rețelelor din punctul de vedere al luminozității căci, la prisme, energia luminoasă este concentrată practic într-un singur maxim principal.

2. 8. 5. Componente de înaltă putere de rezoluție spectrală

Așa cum am arătat anterior, puterea de rezoluție cromatică R a aparatelor spectrale cu prismă (de bază mare !) are ordinul de mărime $\sim 10^4$, iar la cele cu rețea optică, deși mai bună, ea nu depășește ordinul câtorva zeci sau, în cel mai bun caz, sute de mii. Pentru studiul structurii hiperfine și a structurii izotopice a liniilor spectrale, unde trebuie separate linii a căror lungimi de undă diferă cu $10^{-3} - 10^{-5} \text{ nm}$, sunt necesare puteri de rezoluție mult mai mari, de ordinul $5 \cdot 10^5 - 5 \cdot 10^7$. Componentele capabile de astfel de performanțe pe care le vom analiza în această secțiune (și în cea care urmează), se numesc componente de înaltă putere de rezoluție spectrală și funcționează pe principiul interferenței multiple (vezi vol.II).

Primele lucrări referitoare la studiul structurii fine a liniilor spectrale au fost elaborate de către fizicianul american A.A. Michelson (1852-1931) la sfârșitul secolului trecut și la începutul secolului nostru. Prin metoda interferometrului cu două fascicule și a spectroscopului cu eșeloane el a reușit să studieze structura liniilor spectrale ale H_2 , Na, Cd, Tl, și Hg.

În prezent sunt cunoscute trei tipuri principale de componente clasice cu înaltă putere de rezoluție: lama Lummer-Gehrcke, eșelonul lui Michelson și etalonul Fabry-Pérot. Funcționarea lor se bazează pe *principiul interferenței multiple* și, din acest punct de vedere, ele se aseamănă cu rețelele de difracție discutate în cele două secțiuni anterioare. Cu toate acestea, între funcționarea rețelelor de difracție și a componentelor cu înaltă putere de rezoluție specificate mai sus, există și deosebiri esențiale; aceasta justifică tratarea lor într-o secțiune separată. De pildă, deși relația $R = mN = N(\Delta_0/\lambda)$ a puterii de rezoluție, dedusă în cazul rețelei optice, unde N este numărul fasciculelor care interferă, m - ordinul spectrului, Δ_0 - diferența de drum optic a două fascicule vecine, rămâne valabilă, apar câteva deosebiri. La rețea, valorile mari ale lui R se obțin pe seama unui număr N (de fante) foarte mare, la diferențe de drum optic Δ_0 mici (de ordinul a câtorva lungimi de undă). Din contră, la componentele spectrale de care vom vorbi în continuare, numărul N (al fasciculelor care interferă) este relativ mic ($N = 10 - 100$), însă diferența de drum optic Δ_0 este foarte mare ($\Delta_0 = 1 - 50$ cm). Domeniul (intervalul) spectral $\Delta\lambda_{\max} = \lambda/m = \lambda^2/\Delta_0$ este de data aceasta foarte mic (de ordinul sutimilor de angströmi).

Dacă primele două componente se folosesc astăzi destul de rar în practica spectroscopică, etalonul Fabry - Pérot, mai ieftin, mai comod și cu o luminozitate mult mai mare, a cunoscut o foarte largă răspândire. Cu toate acestea, având în vedere importanța lor istorică și principală, le vom prezenta la fel de detaliat pe toate trei.

A. Lama Lummer-Gehrcke

Este o lamă cu fețe plan-paralele, relativ lungă, confecționată din sticlă omogenă, de foarte bună calitate, sau din cuarț. Paralelismul fețelor sale trebuie să fie foarte exact. Fasciculul de lumină, care se dorește a fi analizat spectral, suferă o reflexie multiplă pe suprafețele interne ale lamei, sub un unghi apropiat de unghiul de reflexie totală. Pentru a evita pierderile de lumină, la introducerea fasciculului în lamă se folosește o mică prismă lipită pe suprafața lamei, la unul din capete (vezi fig.2.57). Deoarece unghiul ψ este aproape egal cu unghiul limită $\arcsin(1/n)$, la fiecare reflexie iese din lamă numai o foarte mică parte din energia fasciculului incident (vezi vol.II) iar unghiul ϕ este apropiat de $\pi/2$.

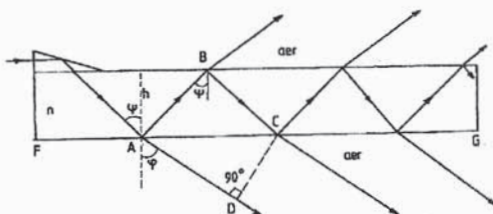


Fig.2.57. Lama Lummer-Gehrcke.

După cum rezultă din figură, pe ambele fețe ale lamei se formează o serie de fascicule, al căror număr N este determinat de lungimea l ($= FG$) și de grosimea h , ale lamei; acest număr se poate calcula ușor, prin considerente geometrice, și, dacă l este destul de mare, el este dat de formula (aproximativă)

$$N \cong \frac{l}{2htg\psi} . \quad (2.287)$$

Diferența de drum optic dintre două raze luminoase emergente vecine se determină în funcție de grosimea h și de indicele de refracție n . Avem evident

$$\Delta_0 = n(AB + BC) - AD, \quad (2.288)$$

unde

$$AB = BC = \frac{h}{\cos \psi}, \quad AD = 2htg\psi \sin \varphi. \quad (2.289)$$

Ținând cont de legea refracției, $\sin \varphi = n \sin \psi$, obținem în final

$$\Delta_0 = 2nh \cos \psi. \quad (2.290)$$

Condiția maximului de interferență multiplă, de ordinul m , are forma $\Delta_0 = m\lambda$ și se scrie ca

$$\Delta_0 = 2nh \cos \psi = m\lambda, \quad (2.291)$$

sau, dacă înlocuim $\cos \psi = (1 - \sin^2 \psi)^{1/2} = \frac{1}{n}(n^2 - \sin^2 \varphi)^{1/2}$, rezultă

$$\Delta_0 = 2h(n^2 - \sin^2 \varphi)^{1/2} = m\lambda. \quad (2.292)$$

Dispersia unghiulară se poate deduce prin diferențierea acestei relații. Obținem

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = 2 \cdot \frac{n \left(\frac{dn}{d\lambda} \right) - \frac{m}{2h} \sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}}{\sin(2\varphi)} = 2 \cdot \frac{\lambda n \left(\frac{dn}{d\lambda} \right) - (n^2 - \sin^2 \varphi)}{\lambda \cdot \sin(2\varphi)}. \quad (2.293)$$

Domeniul spectral $\Delta\lambda_{\max} = \lambda/m = \lambda^2/\Delta_0$, definit ca în cazul rețelei, are expresia aproximativă

$$\Delta\lambda_{\max} = \frac{\lambda^2}{2h \sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}}. \quad (2.294)$$

Caracterul aproximativ al relației (2.294) derivă din aceea că, la scrierea ei (prin analogie cu cazul rețelei), nu s-a ținut cont de variația diferenței de drum optic la trecerea de la λ la $\lambda + \Delta\lambda$, determinată de dispersia $n(\lambda)$ a materialului lamei. O formulă mai exactă, care ține cont și de această dispersie, are forma (lăsăm demonstrația pe seama cititorului)

$$\Delta\lambda_{\max} = \frac{\lambda^2 \sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}}{2h \left(n^2 - \sin^2 \varphi - n\lambda \frac{dn}{d\lambda} \right)}. \quad (2.295)$$

Pentru razele de lumină care ies din lamă razant, adică pentru $\varphi \lesssim \pi/2$, relația (2.294) ne dă

$$\Delta\lambda_{\max} = \frac{\lambda^2}{2h \sqrt{n^2 - 1}}. \quad (2.294')$$

Puterea de rezoluție spectrală a lamei, definită ca în cazul rețelei, sub forma $R = mN = N(\Delta_0/\lambda)$, are expresia

$$R \cong \frac{\ell}{\lambda} \cdot \frac{n^2 - \sin^2 \varphi}{\sin \varphi} . \quad (2.296)$$

În același caz, al emergenței razante, când $\sin \varphi \cong 1$, avem

$$R \cong \frac{\ell}{\lambda} (n^2 - 1) . \quad (2.297)$$

Ținând cont că $R = \lambda/\Delta\lambda_{\min}$, în cazul emergenței razante obținem următoarea expresie pentru *intervalul limită de lungimi de undă ce mai pot fi separate*

$$\Delta\lambda_{\min} = \frac{\lambda}{R} = \frac{\lambda^2}{\ell (n^2 - 1)} . \quad (2.298)$$

Rezultă că intervalul $\Delta\lambda_{\min}$ este determinat numai de lungimea lamei și de indicele său de refracție; el nu depinde de grosimea h a lamei.

Dacă am fi ținut cont și de dispersia materialului lamei, adică de dependența $n(\lambda)$, în locul relațiilor (2.296) și (2.298) am fi obținut

$$R \cong \frac{\ell \left(n^2 - \sin^2 \varphi - n \frac{dn}{d\lambda} \right)}{\lambda \sin \varphi} , \quad (2.299)$$

respectiv

$$\Delta\lambda_{\min} = \frac{\lambda^2 \sin \varphi}{\ell \left(n^2 - \sin^2 \varphi - n \lambda \frac{dn}{d\lambda} \right)} . \quad (2.300)$$

Pentru exemplificare, să considerăm $\lambda = 600$ nm, $\ell = 6$ cm, $n = 3/2$, $h = 1$ cm. La emergență razantă obținem următoarele valori ale parametrilor caracteristici: $R = 1,25 \cdot 10^5$, $\Delta\lambda_{\min} = 4,8 \cdot 10^{-3}$ nm, $\Delta\lambda_{\max} = 0,0161$ nm cu $N \cong 4$ fascicule și $m \cong 37270$.

B. Eșelonul lui Michelson

Această piesă spectrală, cunoscută și sub denumirea de rețeaua de difracție în trepte, a fost inventată în anul 1898 de către Michelson și a permis studiul unor detalii spectrale de finețe, neevidențiate până atunci. Rețeaua - eșelon este compusă din $N = 30 - 40$ lame de sticlă extrem de omogenă, fiecare lamă având o grosime $h = 1 - 3$ cm, așezate exact ca la o scară cu trepte (vezi fig.2.58 a). Prin urmare, eșelonul se comportă ca o rețea de difracție de fază, prin transmisie, având un număr redus de trăsături (trepte), o lărgime mare a trăsăturii și o diferență de drum optic (Δ_0) mare între două fascicule care trec prin două trepte vecine (adică un ordin m înalt al spectrului). Pentru ca eșelonul să funcționeze corect, diferențele de drum optic Δ_0 , introduse succesiv de treptele vecine, trebuie să fie egale între

ele cu o precizie foarte bună, de cel puțin $\lambda/4$. Din punct de vedere practic, această condiție se realizează tăind toate lamele dintr-o singură placă plan-paralelă mare, prelucrată optic cu o mare precizie, de $\lambda/10$. Lamele se assemblează apoi în așa fel încât să se realizeze un contact optic cvasiperfect între ele.

În cazul unei incidențe normale a luminii pe eșelon (vezi fig.2.58 b), diferența de drum optic dintre două raze vecine este $\Delta_0 = [BDF] - [AE] = hn + DF - AE$ (în exterior presupunem aer, cu $n = 1$). Ținând cont că $AE = h \cos \theta$ și $DF = a \sin \theta$ avem

$$\Delta_0 = hn + a \sin \theta - h \cos \theta, \quad (2.301)$$

h fiind înălțimea iar a lățimea unei trepte. Evident, $n \neq 1$ este indicele de refracție, riguros constant peste tot, al lamelor eșelonului.

Condiția maximelor de interferență multiplă de ordinul m va fi

$$\Delta_0 = m\lambda \quad \text{adică} \quad nh + a \sin \theta - h \cos \theta = m\lambda, \quad (2.302)$$

de unde, prin diferențiere în ambele părți, rezultă următoarea formulă pentru *dispersia unghiulară*

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{m - h \left(\frac{dn}{d\lambda} \right)}{a \cos \theta + h \sin \theta}. \quad (2.303)$$

Pe de altă parte, *domeniul spectral* $\Delta\lambda_{\max} = \lambda/m = \lambda^2/\Delta_0$ are expresia

$$\Delta\lambda_{\max} = \frac{\lambda^2}{h(n - \cos \theta) + a \sin \theta}. \quad (2.304)$$

Pentru unghiuri mici de difracție ($\theta \gtrsim 0$, $\sin \theta \cong \theta \approx 0$, $\cos \theta \cong 1$) avem $\Delta_0 \cong h(n - 1)$ și corespunzător

$$\frac{d\theta}{d\lambda} \cong \frac{1}{a} \left(m - h \frac{dn}{d\lambda} \right) \approx \frac{h}{a} \left(\frac{n-1}{\lambda} - \frac{dn}{d\lambda} \right), \quad (2.305)$$

respectiv

$$\Delta\lambda_{\max} \cong \frac{\lambda^2}{h(n-1)}. \quad (2.306)$$

Puterea de rezoluție spectrală a eșelonului cu N trepte, definită ca la o rețea optică având N fante, este $R = mN = N(\Delta_0/\lambda)$ și are expresia

$$R = N \left(\frac{h}{\lambda} \right) \left(n - \cos \theta + \frac{a}{h} \sin \theta \right). \quad (2.307)$$

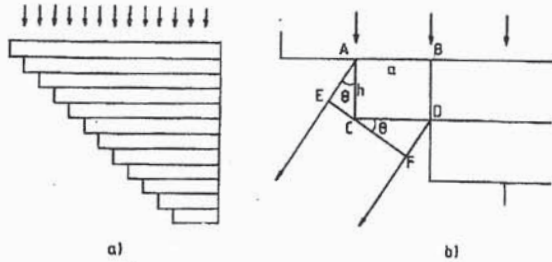


Fig.2.58. a și b. Eșelonul lui Michelson (prin transmisie).

La unghiuri de difracție θ foarte mici putem scrie aproximativ

$$R \approx N \frac{h}{\lambda} (n-1). \quad (2.308)$$

Subliniem că relația (2.307) nu este foarte corectă deoarece, fiind scrisă pe baza analogiei cu rețeaua optică, în ea nu se ține cont de dispersia $n(\lambda)$ a materialului eșelonului. Pentru a obține o relație mai corectă, se procedează în felul următor: punem condiția ca în direcția θ să se formeze maximul de ordinul m pentru lungimea de undă $\lambda + \Delta\lambda$, pentru care, din cauza dependenței $n(\lambda)$, indicele de refracție este $n + \Delta n$; în același timp, conform criteriului Rayleigh, cerem ca în aceeași direcție θ să se formeze primul minim nul adiacent, pentru lungimea de undă λ . Din relațiile

$$m(\lambda + \Delta\lambda) = h(n + \Delta n) + a \sin \theta - h \cos \theta, \quad (2.309)$$

$$\left(m + \frac{1}{N}\right)\lambda = hn + a \sin \theta - h \cos \theta, \quad (2.310)$$

obținem imediat

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{Nh} \left[n - \cos \theta - \lambda \frac{dn}{d\lambda} + \frac{a}{h} \sin \theta \right]^{-1} \equiv \Delta\lambda_{\min}, \quad (2.311)$$

respectiv

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda_{\min}} = \frac{Nh}{\lambda} \left[n - \cos \theta - \lambda \frac{dn}{d\lambda} + \frac{a}{h} \sin \theta \right], \quad (2.312)$$

care generalizează rezultatul (2.307). De aici, pentru unghiuri de difracție θ foarte mici, avem

$$R \equiv \frac{Nh}{\lambda} \left(n - 1 - \lambda \frac{dn}{d\lambda} \right), \quad (2.313)$$

iar *intervalul spectral limită* $\Delta\lambda_{\min} = \lambda/R$ are acum expresia

$$\Delta\lambda_{\min} \equiv \frac{\lambda^2}{Nh} \left(n - 1 - \lambda \frac{dn}{d\lambda} \right)^{-1}. \quad (2.314)$$

Din formulele de mai sus, rezultă că pentru creșterea lui R și micșorarea lui $\Delta\lambda_{\min}$ este bine să se lucreze cu un eșelon cu N cât mai mare. Aceasta nu se poate realiza ușor dacă avem în vedere proprietățile de omogenitate și de planeitate pe care le-am invocat la început.

Pentru exemplificarea caracteristicilor unui eșelon normal, cu $N = 30$ trepte, să considerăm $\lambda = 600 \text{ nm}$, $n = 3/2$, $dn/d\lambda = -10^5 \text{ m}^{-1}$ și $h = 1 \text{ cm}$. La unghiuri θ mici obținem: $\Delta\lambda_{\max} = 0,072 \text{ nm}$, $\Delta\lambda_{\min} = 2,14 \cdot 10^{-3} \text{ nm}$, $R = 2,8 \cdot 10^5$, valori cam de același ordin de mărime (ceva mai bune) ca cele din cazul lamei Lummer-Gehrcke. Ordinul de difracție în care se obțin aceste performanțe, calculat ca $m = R/N (= 9333)$, în exemplul dat), are și el valori destul de mari.

Spuneam la începutul acestei secțiuni că atât lamele cât și eșeloanele se utilizează astăzi destul de rar. Un motiv este acela că sticla din care se confecționează ele trebuie să fie foarte omogenă, iar acest lucru nu se obține practic deloc ușor. Pe de altă parte, o lamă bună

trebuie să fie destul de lungă, adică omogeneitatea se cere a fi perfectă și longitudinal, nu numai transversal. Chiar și când aceste condiții sunt îndeplinite, din cauza cantității reduse de lumină transmisă, performanțele lamei sunt relativ modeste. Eșeloanele lui Michelson sunt foarte sensibile la variațiile (gradientii) de temperatură și se impune termostatarea lor. În afară de aceasta, eșeloanele au și o serie de neajunsuri principiale: un domeniu mic de dispersie și o distorsiune importantă a luminozității (căci N nu poate fi foarte mare), chiar și pentru liniile spectrale cu lungimi de undă apropiate. Din aceste motive, se consideră că este preferabilă utilizarea altor componente dispersive, lipsite de aceste limitări și cu mai puține dificultăți tehnice de exploatare (vezi mai departe).

Michelson a imaginat de asemenea, elaborând și teoria corespunzătoare, utilizarea în locul eșeloanelor prin transmisie a unor eșeloane reflectante. Din cauza unei serii întregi de dificultăți tehnice de realizare, mult timp această idee nu a fost pusă în practică. Primul eșelon prin reflexie a fost construit abia în anul 1933, de către Williams, din cuarț topit. Cuarțul topit are un coeficient de dilatare termică foarte mic, ceea ce micșorează mult sensibilitatea eșelonului la variațiile de temperatură (în consecință, nu mai este necesară o termostatare atât de drastică). În schimb, cerințele față de calitatea prelucrării suprafețelor reflectante ale eșelonului sunt cam de patru ori mai mari decât pentru eșelonul transparent.

Principiul de funcționare al eșelonului reflectant poate fi înțeles ușor din fig.2.59. Pentru creșterea reflectanței fețelor, ele s-au acoperit cu un strat subțire de aluminiu, prin pulverizare în vid. Prin considerente geometrice simple, putem stabili că diferența de drum optic $\Delta_0 = [CBE] - [AF]$ are expresia

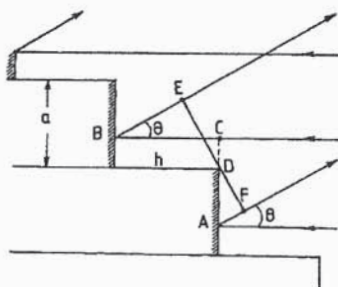


Fig.2.59. Eșelonul lui Michelson (prin reflexie).

$$\Delta_0 = h(1 + \cos\theta) - a \sin\theta = 2h \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - a \sin\theta, \quad (2.315)$$

care, pentru unghiuri θ mici devine $\Delta_0 \approx 2h$, în timp ce, pentru eșelonul transparent, cu aceiași parametri geometrice, avem $\Delta_0 \approx h(n - 1)$. Deoarece la aceleași dimensiuni, eșelonul reflectant are $\Delta_0^{(r)} > \Delta_0^{(t)}$, adică o diferență de drum optic ceva mai mare decât eșelonul prin transmisie, rezultă că primul are o putere de rezoluție și o dispersie mai mare. De exemplu, pentru $n = 3/2$, avem $\Delta_0^{(r)} = 4\Delta_0^{(t)}$, de unde conchidem că performanțele eșelonului reflectant sunt cam de patru ori mai bune decât cele ale eșelonului transparent.

Precizăm că eșelonul Michelson - Williams este singurul aparat spectral clasic, de înaltă rezoluție cromatică, cu care poate fi investigat așa-numitul vacuum-ultraviolet.

C. Etalonul Fabry-Pérot

În prezent, etalonul (interferometrul) Fabry-Pérot este cel mai utilizat aparat pentru obținerea unei rezoluții spectrale înalte. Funcționarea sa se bazează pe trecerea, de un număr

mare de ori, a luminii între două suprafețe plan-paralele reflectante care îndeplinesc și rolul de divizoare de lumină. Etalonul poate fi realizat fie sub forma unei lame cu fețe plan-paralele din sticlă sau cuarț, pe ambele fețe laterale ale acesteia fiind depuse straturi semireflectante (semimetalizare) - vezi fig. 2.60 a, fie sub forma a două oglinzi plane, semitransparente, așezate paralel una față de alta și separate printr-un strat de aer - vezi fig.2.60 b.

Așa cum se arată în cele două figuri, la trecerea unui fascicul de lumină prin etalon,

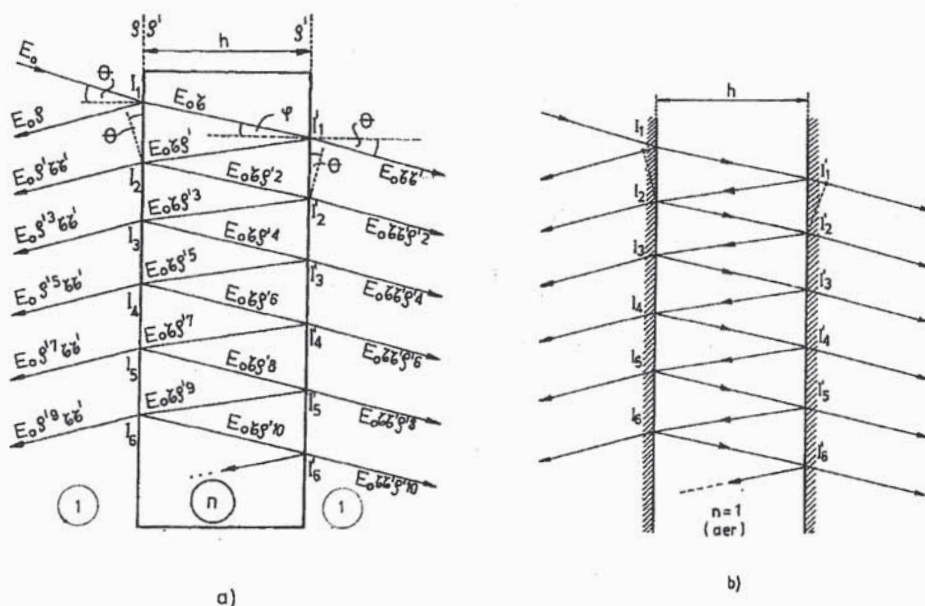


Fig.2.60. a și b. Scheme principale ale etaloanelor (interferometrelor) Fabry Pèrot.

datorită reflexiilor multiple, se formează o serie de fascicule luminoase emergente, paralele, de o parte și de cealaltă parte, care generează, în planul focal al unei lentile de focalizare, franje inelare de interferență. Observarea franjelor se poate face vizual, cu o lunetă pusă la punct pentru infinit (prevăzută cu un ocular micrometric de mare finețe), sau prin fotografiere (în acest caz, în planul focal al unei lentile obiectiv se așează placa fotosensibilă).

Diferența de drum optic între două fascicule vecine poate fi calculată din considerente geometrice, analog modului în care a fost calculată pentru lama Lummer-Gehrcke, obținând

$$\Delta_0 = \begin{cases} 2nh \cos \varphi & \text{în cazul lamei (a),} \\ 2h \cos \varphi & \text{în cazul oglinzilor (b),} \end{cases} \quad (2.316)$$

unde φ este unghiul reflexiilor interne, iar h —grosimea "lamei".

Condiția de formare a maximelor de interferență multiplă de ordinul m are forma cunoscută $\Delta_0 = m\lambda$; avem deci

$$2nh \cos \varphi = m\lambda, \quad (\text{în cazul a)}) \quad \text{sau} \quad 2h \cos \varphi = m\lambda \quad (\text{în cazul b)}). \quad (2.317)$$

Ținând cont de legea refracției $\sin \theta = n \sin \varphi$, în cazul a) mai putem scrie

$$2h\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta} = m\lambda. \quad (2.318)$$

Când această condiție este satisfăcută pentru două raze vecine, ea este îndeplinită pentru toate razele care formează cu normala la suprafețele paralele același unghi θ (fasciculul incident este divergent, provenit de la un izvor luminos întins).

La o lamă obișnuită, neargintată, ca cea discutată la punctul A, coeficientul de reflexie este de numai 3-5% și intensitățile luminoase ale fasciculelor succesive se atenuează foarte rapid odată cu mărirea numărului de reflexii. Pentru etalonul Fabry-Pérot, cu fețe semimetalizate, coeficientul de reflexie este de 96-98% (aproape de valoarea maxim posibilă la etaloanele moderne de foarte bună calitate) și intensitatea fasciculului următor se deosebește extrem de puțin de intensitatea celui precedent. În consecință, numărul de raze care interferă fiind mare, și intensitățile acestora fiind apropiate, figura de interferență are claritate foarte bună și puterea de rezoluție cromatică crește considerabil. Acesta este motivul principal pentru care etalonul Fabry-Pérot a înlăturat aproape total alte tipuri de aparate de înaltă rezoluție din practica spectroscopică.

Pentru definirea principalelor mărimi spectrale caracteristice, ne vom referi la etalonul format din oglinzi paralele (paralelism de ordinul $0,01\lambda$ sau mai bun), cu aer între ele ($n = 1$), a cărui teorie este substanțial mai simplă (nu există o dependență $n(\lambda)$ perturbatoare), și care se folosește mult mai frecvent în practică.

Dispersia unghiulară se obține prin diferențierea relației $\Delta_0 = m\lambda$, la m fixat, unde $\Delta_0 = 2h \cos \varphi$. Obținem

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = -\frac{m}{2h \sin \varphi} = -\frac{1}{\lambda \operatorname{tg} \varphi}. \quad (2.319)$$

Rezultă că dispersia tuturor etaloanelor de acest tip este *acceași*, independentă de grosimea lor sau de alți parametri. Pentru unghiuri φ mici, putem aproxima $\operatorname{tg} \varphi \approx \varphi$ și avem

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} \cong -\frac{1}{\lambda \varphi}. \quad (2.319')$$

Prin urmare, aproape de emergență normală ($\varphi \rightarrow 0$) dispersia devine practic infinit de mare. Semnul minus din membrul drept ne spune că, odată cu creșterea unghiului de observare se micșorează lungimea de undă pentru care se produce maximum (inelul luminos) corespunzător.

Pentru determinarea distanței unghiulare dintre cercurile (maximele) vecine care corespund unei anumite lungimi de undă λ , diferențiem din nou relația $2h \cos \varphi = m\lambda$ cu λ fixat, obținând $-2h \sin \varphi \Delta \varphi = \lambda \Delta m$. De aici, pentru $\Delta m = 1$ obținem

$$\Delta \varphi = -\frac{\lambda}{2h \sin \varphi}, \quad (2.320)$$

de unde rezultă că, la creșterea distanței h dintre oglinzi, scade ecartul unghiular $\Delta \varphi$ dintre două maxime vecine. La fel, pentru o distanță h fixată, $\Delta \varphi$ scade odată cu creșterea unghiului de înclinare φ al fasciculului (inelele periferice sunt mai dese).

Cunoscând distanța unghiulară $\Delta\varphi$ dintre două inele luminoase vecine și dispersia unghiulară $d\varphi/d\lambda$ a etalonului, nu este greu de stabilit intervalul de lungimi de undă care corespunde distanței dintre două maxime vecine, sau *constanta aparatului (domeniul spectral)*

$$\Delta\lambda = \frac{\Delta\varphi}{d\varphi/d\lambda} = -\lambda \operatorname{tg}\varphi \Delta\varphi = \frac{\lambda^2}{2h \cos\varphi} \equiv \Delta\lambda_{\max} . \quad (2.321)$$

La unghiuri de incidență mici, putem aproxima $\cos\varphi \cong 1$ și avem

$$\Delta\lambda_{\max} \cong \frac{\lambda^2}{2h} . \quad (2.321')$$

Exemplificând pentru $\lambda = 600 \text{ nm}$ și $h = 2,5 \text{ cm}$ (valoare destul de mare) obținem $\Delta\lambda_{\max} = 7,2 \cdot 10^{-3} \text{ nm}$. Ca și în cazul celorlalte două componente prezentate în această secțiune, domeniul spectral este destul de îngust, de ordinul sutimilor sau miimilor de nanometri. Din această cauză, pentru ca etalonul (sau lama, respectiv eșelonul) să fie exploatat judicios, este necesar ca lumina incidentă să fie trecută în prealabil printr-un monocromator. În acest fel, cu ajutorul etalonului, lamei sau eșelonului, se analizează numai structura *fină* sau *hiperfină* a luminii ce a trecut prin monocromator, în intervalul spectral dorit. De exemplu, cu un etalon având $h = 1 \text{ cm}$, s-a putut constata că linia cu $\lambda = 597,6 \text{ nm}$ a izotopului ^{233}U (a uraniului) este constituită din șase componente spectrale diferite. La fel, prin mărirea distanței h până la 10 cm s-a putut investiga structura liniei cu $\lambda = 605,8 \text{ nm}$ a izotopului ^{86}Kr (a kriptonului), emisă la temperatura heliului lichid, pe baza căreia s-a adoptat apoi, prin convenție internațională, definiția metrului ca unitate fundamentală de lungime în SI.

Înainte de a trece la determinarea puterii de rezoluție spectrală a etalonului Fabry-Pérot, este necesar să calculăm expresiile intensităților luminoase ale fasciculelor emergente. Vom face aceasta pentru cazul reprezentat în fig.2.60 a, presupunând în plus că dimensiunile "oglinzilor" sunt suficient de mari (în acest fel, se pot neglija efectele difracției de la muchiile marginale).

Fie ρ și ρ' coeficienții de reflexie în amplitudine la stânga și la dreapta primei suprafețe verticale (adică la reflexia de pe 1 pe n , respectiv de pe n pe 1) - vezi fig.2.60 a) respectiv τ și τ' coeficienții de transmisie în amplitudine la trecerea luminii de la stânga la dreapta prin prima suprafață (de la 1 la n) și prin cea de-a doua suprafață (de la n la 1) a etalonului Fabry-Pérot. Așa cum vom arăta în volumul al doilea, la incidența cvasinormală, ei au forma

$$\rho = \frac{1-n}{1+n}, \quad \rho' = -\rho = \frac{n-1}{n+1}, \quad \tau = \frac{2}{1+n}, \quad \tau' = \frac{2n}{1+n}, \quad (2.322)$$

unde n este, în general, indicele de refracție al materialului dintre oglinzi față de exterior. Mărirea $R = \rho^2 = \rho'^2$ se numește *coeficient energetic de reflexie* sau *reflectanță energetică*. Dacă absorbția de energie este neglijabilă (și noi am presupus deja acest lucru la scrierea relațiilor (2.322)) obținem

$$\tau\tau' = 1 - \rho^2 = 1 - R. \quad (2.323)$$

Pentru calcularea amplitudinii complexe a câmpului luminos transmis (la dreapta celei de-a doua suprafețe a etalonului) vom ține cont de defazajul introdus mereu, între două raze succesiv transmise, de diferența suplimentară de drum optic $\Delta_0 = 2nh \cos \varphi$, adică de factorul fazic unimodular $\exp(i\delta)$, unde $\delta = k\Delta_0 = (2\pi/\lambda_0) \cdot \Delta_0$. Urmărind atent ansamblul razelor transmise, din fig.2.60 a) putem scrie

$$E_T = E_0 \tau \tau' \left(1 + \rho'^2 e^{i\delta} + \rho'^4 e^{2i\delta} + \rho'^6 e^{3i\delta} + \dots \right) = \frac{E_0 \tau \tau'}{1 - \rho'^2 \exp(i\delta)} = E_0 \frac{1-R}{1-R \exp(i\delta)}. \quad (3.324)$$

Intensitatea luminoasă transmisă $I_T = |E_T|^2$ are forma finală

$$I_T = I_0 \frac{(1-R)^2}{1+R^2-2R \cos \delta} = I_0 \frac{1}{1 + \left[\frac{4R}{(1-R)^2} \right] \sin^2(\delta/2)}. \quad (3.325)$$

În mod similar, amplitudinea complexă a câmpului luminos reflectat (la stânga primei suprafețe a etalonului), are forma

$$E_R = E_0 \rho + E_0 \tau \tau' \rho' e^{i\delta} \left(1 + \rho'^2 e^{i\delta} + \rho'^4 e^{2i\delta} + \rho'^6 e^{3i\delta} + \dots \right) = E_0 \rho \left[1 - \frac{(1-R) \exp(i\delta)}{1-R \exp(i\delta)} \right] = E_0 \sqrt{R} \frac{1 - \exp(i\delta)}{1-R \exp(i\delta)}, \quad (3.326)$$

iar intensitatea luminoasă corespunzătoare $I_R = |E_R|^2$ este

$$I_R = I_0 \frac{2R(1-\cos \delta)}{1+R^2-2R \cos \delta} = I_0 \frac{\left[\frac{4R}{(1-R)^2} \right] \sin^2(\delta/2)}{1 + \left[\frac{4R}{(1-R)^2} \right] \sin^2(\delta/2)}. \quad (3.327)$$

Se observă că $I_R + I_T = I_0$, unde $I_0 = |E_0|^2$ este intensitatea luminii incidente, fapt care exprimă conservarea energiei. Cele două formule (3.325) și (3.327), ale intensităților transmisă și reflectată, se numesc *formulele lui Airy*. Funcția

$$F(R) = \frac{4R}{(1-R)^2}, \quad (3.328)$$

cu ajutorul căreia putem scrie

$$I_T = \frac{I_0}{1+F(R)\sin^2(\delta/2)}, \quad I_R = \frac{I_0 F(R) \sin^2(\delta/2)}{1+F(R)\sin^2(\delta/2)}, \quad (3.329)$$

poartă denumirea de *funcție de finețe a franjelor* sau *funcția lui Airy*.

Pentru o valoare dată a reflectanței R , intensitatea luminoasă transmisă este maximă când $\sin^2(\delta/2) = 0$, adică pentru $\delta = 2\pi m$, $m = 0, 1, 2, \dots$. Indiferent de valoarea lui R avem $I_{T \max} = I_0$. În schimb, în afara maximelor, valoarea funcției I_T depinde în mod esențial de reflectanța energetică R , adică de funcția de finețe $F(R)$, așa cum se indică în fig.2.61. Pentru $R \rightarrow 1$ avem $F(R) \rightarrow \infty$ și franjele de interferență sunt foarte fine și bine

conturate pe un fond întunecos. Într-adevăr, minimele lui I_T se obțin pentru $\sin^2(\delta/2) = 1$, adică pentru $\delta = (2m + 1)\pi$, $m = 0, 1, 2, \dots$ și au valoarea $I_{T \min} = I_0 / (1 + F(R))$. Pentru $R \rightarrow 1$, adică pentru $F(R) \rightarrow \infty$ avem $I_{T \min} = 0$ în timp ce $I_{T \max} = I_0$. În celălalt caz extrem, când $R \rightarrow 0$, avem $F(R) \rightarrow 0$ și franjele dispar, căci maximele nu se mai conturează pe un fond întunecos. Acum $I_{T \min} \rightarrow I_0$ ca și $I_{T \max}$. În general, **contrastul franjelor** poate fi caracterizat prin raportul

$$\frac{I_{T \max}}{I_{T \min}} = 1 + F(R) = \left(\frac{1+R}{1-R} \right)^2 \rightarrow \begin{cases} 1, & \text{pentru } R \rightarrow 0, \\ \infty, & \text{pentru } R \rightarrow 1. \end{cases} \quad (2.330)$$

Se subînțelege că, în virtutea relației $I_R = I_0 - I_T$, tabloul de interferență observat în lumină reflectată este complementar față de cel observat în lumină transmisă (strict vorbind, aceasta este adevărată numai în absența pierderilor energetice datorate absorbției). Cu alte cuvinte, pentru unghiurile sub care în lumină transmisă se observă un maxim de interferență îngust, în lumină reflectată se va observa un minim îngust (vezi fig.2.62). Dacă în lumina transmisă câteva radiații, de diferite lungimi de undă, dau sisteme distincte de cercuri luminoase (intensitate maximă), în lumină reflectată contrastul tabloului de interferență se reduce considerabil, chiar în cazul în care radiația sursei conține numai două linii spectrale, deoarece peste sistemul de cercuri luminoase largi, cu intervale întunecate înguste, se suprapune un alt sistem de cercuri luminoase largi. De aceea, exceptând unele situații foarte rare, etalonul se folosește întotdeauna numai în lumină transmisă.

Pentru a determina puterea de rezoluție spectrală a etalonului Fabry-Pérot, **nu ne mai putem baza pe criteriul Rayleigh** deoarece, de data aceasta, nu există maxime secundare și minime nule intermediare ca la rețeaua optică. De obicei, se consideră că etalonul separă încă două linii spectrale dacă acestea se află la o distanță $\delta\lambda$ identică cu lărgimea, practic egală, a acestor linii la jumătate din $I_{T \max}$.

Se procedează în felul următor. Să considerăm maximul de ordinul m și forma conturului I_T în vecinătatea valorii maxime $I_{T \max}^{(m)} = I_0 / (1 + F(R))$. În vârful maximului avem $\delta = 2\pi m$ și să scriem că acolo unde $I_T = 0,5 I_{T \max}^{(m)}$ valoarea defazajului este $\delta = 2\pi(m + \Delta m)$, Δm fiind o parte fracționară (subunitară), mică, a ordinului. Scriind $\sin(\delta/2) = \sin[\pi(m + \Delta m)] = \sin(m\pi) \cdot \cos(\pi\Delta m) + \cos(m\pi)\sin(\pi\Delta m) = (-1)^m \sin(\pi\Delta m) \cong (-1)^m \cdot \pi\Delta m$, din condiția $I_T = 0,5 I_{T \max}^{(m)}$ obținem

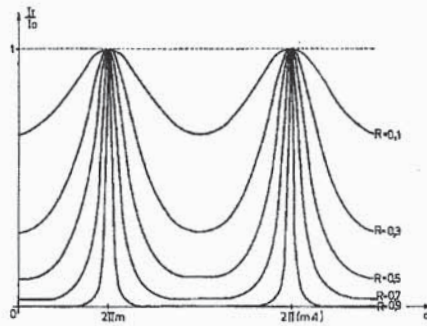


Fig.2.61. Funcția I_T / I_0 în două ordine succesive pentru diferite valori ale reflectanței energetice R .

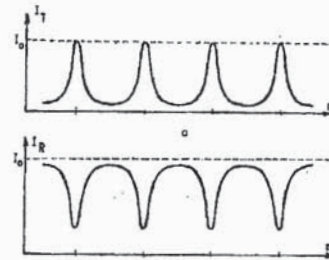


Fig.2.62. Comparatie între tabloul de interferență observat în lumină transmisă și reflectată.

$$\Delta m^2 = \frac{1}{\pi^2 F(R)} = \frac{(1-R)^2}{(2\pi)^2 R}, \text{ adică } |\Delta m| = \frac{1-R}{2\pi\sqrt{R}}. \quad (2.331)$$

Distanța δm dintre două linii care se află la limita de rezoluție, exprimată prin fracțiuni de ordin, este egală cu dublul valorii $|\Delta m|$. Avem (vezi fig.2.63)

$$\delta m = 2 \cdot |\Delta m| = \frac{1-R}{\pi\sqrt{R}}. \quad (2.332)$$

Pentru unghiuri mici de incidență a luminii pe etalon, când $\cos\varphi \cong 1$, din relația $2nh \cong m\lambda$ obținem $m \cong 2nh/\lambda$. Prin diferențierea ei rezultă

$$\delta m \cong \frac{2h}{\lambda} \left[\frac{dn}{d\lambda} - \frac{n}{\lambda} \right] \delta\lambda, \quad (2.333)$$

astfel că, egalând cele două expresii ale fracțiunii δm , obținem următoarea expresie a *puterii de rezoluție spectrală**

$$R_S = \frac{\lambda}{|\delta\lambda|} = \frac{2\pi h \sqrt{R}}{1-R} \cdot \left| \frac{dn}{d\lambda} - \frac{n}{\lambda} \right| = \left| \frac{m}{\delta m} \left(\frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda} - 1 \right) \right|. \quad (2.334)$$

Evident, în cazul lamei cu aer, când $n=1$ și $dn/d\lambda \approx 0$, formula (2.334) se simplifică semnificativ, astfel că

$$R_S \approx \frac{2\pi h}{\lambda} \cdot \frac{\sqrt{R}}{1-R} = \frac{2h}{\lambda \delta m}. \quad (2.334')$$

În toate situațiile de interes practic, reflectanța R este foarte mare și, cel puțin pentru estimări, la numărător, în expresia (2.334), ea poate fi pusă egală cu 1. Considerând în plus, că dispersia $dn/d\lambda$ este mică în comparație cu raportul n/λ , din relația (2.334) obținem

$$R_S = \frac{\lambda}{|\delta\lambda|} \approx \frac{2\pi n h}{\lambda(1-R)}, \quad (2.335)$$

iar de aici, pentru intervalul spectral minim $|\delta\lambda|$ care mai poate fi rezolvat avem

$$|\delta\lambda| = \frac{\lambda}{R_S} = \frac{\lambda^2(1-R)}{2\pi n h} \equiv \Delta\lambda_{\min}. \quad (2.336)$$

Este important să observăm că $R_S \sim h$, adică $|\delta\lambda| \sim h^{-1}$. Aceasta înseamnă că, pentru a obține o rezoluție bună este necesar să mărim distanța dintre suprafețele reflectante ale etalonului. De regulă, una din oglinzi este imobilă, iar cealaltă este fixată pe o patină ce se poate deplasa cu ajutorul unui șurub micrometric de cea mai mare precizie și finețe; în acest

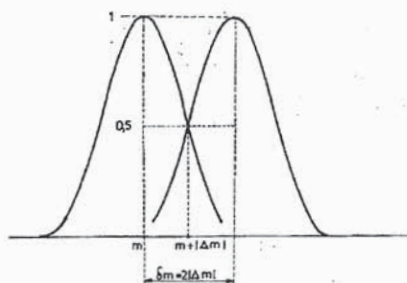


Fig.2.63. Un analog al criteriului lui Rayleigh, pentru determinarea puterii de rezoluție spectrală a etalonului Fabry-Pérot.

* Pentru evitarea unor posibile confuzii, de data aceasta vom nota puterea de rezoluție spectrală cu R_S .

fel grosimea lamei (de aer) cu fețe plan-paralele poate fi variată după bunul plac, în funcție de rezoluția dorită. De exemplu, pentru $h = 2,5 \text{ cm}$, $n = 1$, $\lambda = 600 \text{ nm}$ și $R = 0,94$ obținem $R_s = 4,36 \cdot 10^{+6}$ și $\Delta\lambda_{\min} = |\delta\lambda| = 0,14 \cdot 10^{-3} \text{ nm} = 0,14 \text{ pm}$.

Unele etaloane cu aer au suprafețele reflectante situate la o distanță fixă. Pentru aceasta se utilizează distanțoare confecționate din invar, care au un coeficient de dilatare liniară (și volumică) foarte mic. În aceste cazuri, efectul creșterii grosimii h a etalonului (din cauza ridicării temperaturii) este foarte bine compensat de efectul datorat micșorării indicelui de refracție al aerului, prin încălzire.

În literatura de specialitate s-a încetățenit denumirea de *etalon Fabry-Pérot* pentru componentele spectrale cu lamă de grosime fixă și denumirea de *interferometru Fabry-Pérot* pentru cele cu grosime variabilă.

Prin analogie cu expresia puterii de rezoluție spectrală (2.278) a rețelei optice, pentru etalonul (interferometrul) Fabry-Pérot se poate scrie

$$R_s = mN_{\text{ef}} = \frac{2nh}{\lambda} N_{\text{ef}}, \quad (2.337)$$

unde N_{ef} este numărul efectiv de fascicule care interferă (analog numărului de fante de la rețea). De aici, cu ajutorul relației (2.334') rezultă

$$N_{\text{ef}} = \frac{\lambda R_s}{2nh} = \frac{\pi\sqrt{R}}{n(1-R)} = \frac{1}{n\delta m}. \quad (2.338)$$

Când $n = 1$ (lamă de aer), numărul efectiv de fascicule este egal cu numărul inelelor (maximelor) de interferență care pot fi deosebite în intervalul dintre două ordine vecine. Pentru exemplul dat mai sus obținem $N_{\text{ef}} \approx 51$.

Înainte de a încheia această secțiune, vom preciza că etaloanele reale nu funcționează niciodată chiar așa cum rezultă din teoria ideală prezentată. Conform formulei (2.334) ar urma că, pentru $R \rightarrow 1$ și h crescător, am putea obține o putere de rezoluție oricât de mare. Practica dovedește că această concluzie este falsă. Un prim motiv este acela că plăcile interferometrului nu sunt perfect plane, așa cum am admis în analiza teoretică întreprinsă. În momentul de față, prelucrarea oglinzilor nu se poate realiza la o precizie de planeitate mai bună de $\lambda/200$ și, în consecință, unduțațiile fine ale grosimii h conduc la variații corespunzătoare ale defazajului δ .

Pentru o evaluare orientativă a lărgirii liniei spectrale datorită erorilor de prelucrare a oglinzilor, să ne referim la cazul lamei de aer ($n = 1$) și al incidenței cvasinormale ($\cos\varphi \cong 1$). Fie Δh diferența de grosime a două elemente ale etalonului. Prin diferențierea condiției de maxim $2h = \lambda m$, cu λ fixat, obținem $\Delta m = (2/\lambda) \cdot \Delta h$. Lărgirea liniei spectrale de ordinul m , pentru lungimea de undă λ , nu este supărătoare dacă acest Δm este inferior valorii δm dată de relația (2.332). Astfel obținem

$$\Delta h \lesssim \frac{(1-R)\lambda}{2\pi\sqrt{R}}. \quad (2.339)$$

Când reflectanța oglinzilor este mare putem scrie $\sqrt{R} \cong 1$ și rezultă $\Delta h \lesssim (1-R)(\lambda/2\pi)$. Așadar, cu cât reflectanța este mai mare, cu atât se impune o precizie mai bună pentru

prelucrarea oglinzilor. De exemplu, la $R = 0,85$ avem $\Delta h \cong \lambda/40$, iar la $R = 0,96$, avem $\Delta h < \lambda/157$, valori care indică precizia cu care trebuie prelucrată planeitatea suprafețelor oglinzilor etalonului. Aceeași eroare (Δh) este admisibilă și pentru fixarea paralelismului celor două oglinzi plane. Dacă dimensiunea transversală a unei oglinzi este D , eroarea de paralelism trebuie să fie mai mică decât $\Delta h/D$.

S-ar părea că, la un R dat și la o prelucrare optică adecvată, cu un paralelism corespunzător, cea mai practică soluție ar fi aceea de a mări cât mai mult distanța h dintre oglinzi. Din păcate, și de data aceasta există limitări, căci diferența de drum optic Δ_0 trebuie să fie mai mică decât așa-numita *lungime de coerență* a luminii investigate (altfel, vizibilitatea franjelor tinde la zero din cauza micșorării gradului de coerență - vezi vol.II). Există, din acest punct de vedere, și o altă limitare. Într-adevăr, din condiția $\Delta_0 = 2h \cos \varphi = m\lambda$ (am luat $n = 1$) rezultă că ordinul de interferență m crește atunci când φ scade. Pentru spotul central ($\varphi = 0$) avem ordinul $m_{\max} = 2h/\lambda$ iar pentru primul inel luminos ce îl înconjoară, cu ordinul $m_{\max} - 1$, rezultă $\cos \varphi_1 = (m_{\max} - 1) \cdot (\lambda/2h) = 1 - \lambda/2h$. Scriind $\cos \varphi_1 \cong 1 - \varphi_1^2/2$ obținem $\varphi_1 \cong \sqrt{\lambda/h}$, relație care ne arată că atunci când h crește, unghiul φ_1 scade. Odată cu micșorarea lui φ_1 se micșorează și distanța dintre celelalte inele luminoase, astfel că analiza figurii de interferență devine din ce în ce mai dificilă, pe măsură ce h crește. În practica spectroscopică se realizează, întotdeauna, un compromis optim între diferitele limitări principale sau constructive care intervin.

În ultima perioadă, interferometrul Fabry-Pérot, în varianta *cu explorare*, se utilizează în felul următor (vezi fig.2.64). Lumina emisă de sursa punctiformă S , plasată în focarul anterior al lentilei L_1 , se transformă într-un fascicul paralel și cade pe interferometrul Fabry-Pérot (F-P). Fasciculul paralel emergent, cu $\varphi \cong 0$, este focalizat de lentila L_2 pe fotomultiplicatorul FM unde se produce interferența multiplă. Acesta recepționează numai partea centrală a figurii de interferență adică intensitatea I_T dată de (3.325) cu δ calculat pentru $\cos \varphi = 1$. Semnalul electric produs de fotomultiplicator, proporțional cu I_T , se aplică bornelor Y ale unui oscilograf.

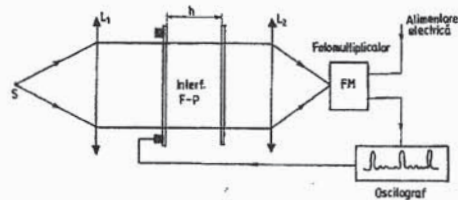


Fig.2.64. Instalație pentru înregistrarea pe oscilograf a distribuției de intensitate I_T în funcție de lungimea de undă.

Pentru un R dat, intensitatea luminoasă I_T depinde evident de λ și de h , corelate prin relația $2h = m\lambda$, astfel că atunci când h se modifică, lungimea de undă corespunzând semnalului recepționat se modifică la rândul său. Prin urmare, observând semnalul pentru fiecare valoare a lui h putem determina direct intensitatea unei corespunzătoare din radiația incidentă pe interferometru.

Una din plăcile interferometrului este montată pe un inel confecționat dintr-un material piezoelectric. Tensiunea aplicată acestui convertor piezoelectric este aleasă în așa fel încât la o anumită valoare a variației distanței h să fie asigurată transmiterea unui interval spectral $\Delta\lambda_{\max}$ în jurul valorii λ a vârfului semnalului investigat (înregistrat de FM). Baza de timp a oscilografului este sincronizată cu frecvența oscilațiilor inelului piezoelectric și, în consecință, distribuția de intensitate după lungimi de undă poate fi vizualizată pe scala oscilografului. În acest fel, de pe oscilograf se obține spectrul de emisie al sursei S .

Observație: Dacă dorim să ținem cont și de absorbția luminii în interferometru, în locul relației (2.323) va trebui să scriem

$$\tau\tau' = 1 - R - A, \quad (2.323')$$

unde A este coeficientul energetic de absorbție. În consecință, formula (3.325), a intensității luminoase transmise, devine

$$\frac{I_T}{I_0} = \left(1 - \frac{A}{1-R}\right)^2 \frac{1}{1 + \left[\frac{4R}{(1-R)^2}\right] \sin^2(\delta/2)}. \quad (3.325')$$

Se observă că la creșterea coeficientului de absorbție, intensitatea luminii transmise scade și, odată cu aceasta, și contrastul figurii de interferență. Pentru a face ca absorbția să fie minimă, în locul unor oglinzi cu depunere metalică se utilizează pachete multipeliculare de dielectricsi transparenți, cu indici de refracție și grosimi alese convenabil (vezi vol.II). În acest fel, odată cu micșorarea absorbției se poate realiza și o reflectanță energetică foarte mare - în domeniul spectral pentru care s-a proiectat utilizarea etalonului.

2. 8. 6. Rețele optice funcționând prin transmisie și prin reflexie. Montaje cu rețele optice

Studiul teoretic întreprins în secțiunea 2.8.3. are un caracter ideal deoarece, cu acel prilej, s-a admis în mod tacit că fiecare fantă este perfect transparentă (transmițătoare) iar spațiul dintre două fante este perfect opac. În realitate, de-a lungul axei Ox (vezi fig.2.49), transmitanța rețelelor utilizate în practică variază mai puțin brusc decât am presupus la deducerea formulei (2.238).

De exemplu, la o rețea a cărei transmitanță de amplitudine variază după o lege armonică (vezi fig.2.65), formula (2.238) nu mai rămâne valabilă, ea trebuind să fie modificată corespunzător. Pentru fixarea ideilor, să considerăm un fascicul paralel incident normal pe rețeaua formată din fante de lărgime $a = d$, fiecare fantă transmițând mai departe o perturbație luminoasă de forma

$$E(x) = A \cdot \left[1 + \alpha \cos\left(\frac{2\pi x}{d}\right) \right], \quad (2.340)$$

unde $\alpha > 0$ este un parametru subunitar. În cadrul fiecărei fante, x este cuprins între 0 și d .

Considerând un unghi de difracție θ , între undele difractate de două puncte apropiate, situate la distanța x , avem diferența de fază $xk_x = kx \sin\theta$. Alegând originea pentru axa x la mijlocul unei fante, conform principiului Huygens - Fresnel, câmpul $E_1(\theta)$ al difracției Fraunhofer produse de o întreagă fantă (pe distanța unei singure perioade, de lărgime d) este

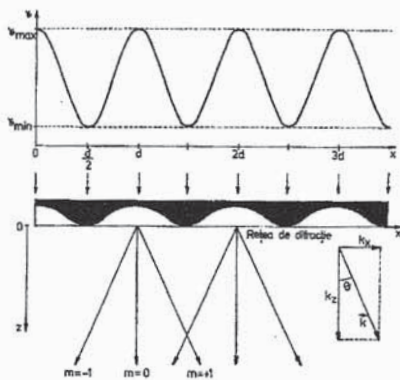


Fig.2.65. Rețeaua de difracție cu transmitanță de amplitudine variind armonic (cosinusoidal).

$$E_1(\theta) = K \cdot \int_{-d/2}^{+d/2} \left[1 + \alpha \cos\left(\frac{2\pi x}{d}\right) \right] e^{ikx \sin\theta} dx =$$

$$= Kd \operatorname{sinc}(\Delta\varphi) \cdot \left[1 - \frac{\alpha}{1 - \left(\frac{\pi}{\Delta\varphi}\right)^2} \right], \quad k_x = k \sin\theta, \quad (2.341)$$

factorul K din fața integralei înglobând și "amplitudinea" A , iar $\Delta\varphi = (\pi d/\lambda)\sin\theta$. Notând cu $I_1(\theta)$ intensitatea luminii difractate de o fantă, adică mărimea $|E_1(\theta)|^2$, și considerând că în total avem o rețea cu N fante (perioade), pentru difracția globală obținem (ca și în secțiunea 2.8.3)

$$I_N(\theta) = I_1(\theta) \frac{\sin^2(N\Delta\varphi)}{\sin^2(\Delta\varphi)} = I_N(0) \frac{\sin^2(N\Delta\varphi)}{(N\Delta\varphi)^2} \cdot \left[1 - \frac{\alpha}{1 - \left(\frac{\pi}{\Delta\varphi}\right)^2} \right]. \quad (2.342)$$

Aici $I_N(0)$ este intensitatea luminoasă difractată de întreaga rețea în direcția înainte, adică pentru $\theta = 0$ (când $\Delta\varphi = 0$). Pozițiile maximelor principale ale factorului de interferență, date de $\Delta\varphi = m\pi$, coincid (cu excepția situațiilor particulare $m = 0, \pm 1$), cu pozițiile minimelor nule ale funcției $I_1(\theta)$. Aceasta este o consecință a simplificării lui $\sin^2(\Delta\varphi)$ din numărător și din numitor în expresia finală (2.342). Din analiza de față rezultă că rețeaua cu transmitanță armonică (sinusoidală) dă un maxim central pentru $\theta = 0$ ($m = 0$) și numai încă două maxime (ordine), pentru $m = \pm 1$, în direcții care satisfac condiția $\Delta\varphi = \pm\pi$, adică $d \sin\theta = \pm\lambda$. Pentru maximul central intensitatea este $I_N(0) = N^2 d^2 |K|^2 = N^2 I_1(0)$, iar pentru celelalte două maxime simetrice, prin ridicarea nedeterminării, obținem

$I_N[\theta = \arcsin(\pm\lambda/d)] = (\alpha^2/4)I_N(0)$. Dacă parametrul α ar fi egal cu zero (nu ar fi existat modulația armonică a transmitanței), aceste maxime ar fi în realitate minime nule.

Rețelele de difracție funcționând prin transmisie prezintă totuși câteva dezavantaje destul de serioase care fac ca utilizarea lor în practica spectroscopică să fie limitată. În primul rând, datorită absorbției unei părți însemnate din energia luminoasă, în porțiunile cu transmitanță mică, se pierde destul de multă energie luminoasă. Pe de altă parte, sticlele optice din care se confecționează majoritatea acestor rețele sunt cvasitotal absorbante pentru radiațiile invizibile (ultraviolete și infraroșii), astfel că ele sunt practic inutilizabile în aceste domenii spectrale. Un alt dezavantaj al rețelelor prin transmisie este acela că, în general, ele dispersează energia luminoasă în prea multe maxime principale, de ordine diferite, fapt care face ca strălucirea să scadă și randamentul lor să nu fie prea bun.

Sesizând aceste dezavantaje încă în anul 1888, într-un articol publicat în *Encyclopedia Britanica*, lordul Rayleigh propunea utilizarea unor rețele de difracție funcționând prin reflexie, ale căror porțiuni active să aibă o reflectanță foarte bună. Prima rețea de acest tip a fost realizată abia în anul 1910, de către Wood, pe o lamelă (plăcuță) de cupru acoperită cu peliculă de aur. Ulterior (1910-1912), lucrând împreună cu Trowbridge, Wood a reușit să perfecționeze tehnologia obținerii unor astfel de rețele, care aveau între 80 și 120 porțiuni reflectante pe distanța de 1 mm. Ele au fost utilizate efectiv pentru investigarea domeniului infraroșu al unor spectre. Perfecționări semnificative în domeniul

construcției și utilizării unor astfel de rețele a adus mai târziu G. R. Harrison (în 1949), care cu ajutorul unei rețele lungi de 25 cm, a reușit să obțină o putere de rezoluție spectrală de ordinul 10^6 , în spectre de ordinul 10^3 . În fig.2.66 se reprezintă secțiunea transversală printr-o rețea plană prin reflexie, cu porțiuni reflectante de lățime a și porțiuni nerefectante de lățime $d-a$, așezate alternativ și periodic, d fiind, ca și până acum, constanta rețelei.

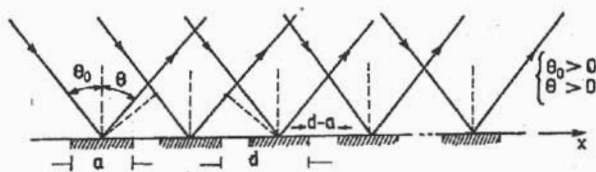


Fig.2.66. Rețea de difracție plană, prin reflexie.

Un fascicul de lumină paralelă cade pe rețea sub un unghi de incidență θ_0 , are loc

difracția prin reflexie iar lumina difractată (în direcția θ pe desen) este prinsă de o lentilă convergentă - nereprezentată în figură. Nu este greu de stabilit că diferența de drum optic dintre două raze luminoase difractate de două porțiuni (omoloage) vecine - situate la distanța d -este $d(\sin\theta_0 + \sin\theta)$. Evident, maximele principale se produc când $d(\sin\theta_0 + \sin\theta) = m\lambda$, cu m întreg.

Ca și în cazul transmisiei, maximele principale sunt separate prin mai multe minime nule și maxime secundare iar intensitatea luminoasă concentrată în maximele principale este cu atât mai mare cu cât numărul N de porțiuni reflectătoare și reflectanța acestora este mai mare.

Pentru a concentra energia luminii difractate prin reflexie în cât mai puține maxime principale (preferabil într-un singur astfel de maxim de ordin cât mai înalt) s-a trecut la construirea așa-numitelor *rețele cu profil*, adică a rețelilor cu fațetele reflectante înclinate sub un anumit unghi față de suprafața suport (vezi fig.2.67).

Ca și în cazul anterior, maximul principal de interferență multiplă de ordinul m , se formează în direcția θ pentru care

$$d(\sin\theta_0 + \sin\theta) = m\lambda. \quad (2.343)$$

Evident, pentru maximul cel mai conturat, mai intens, corespunzând reflexiei normale (conforme cu optica geometrică), putem scrie $\theta - \varepsilon = \theta_0 + \varepsilon$, adică $\theta = \theta_0 + 2\varepsilon$, și din formula anterioară rezultă

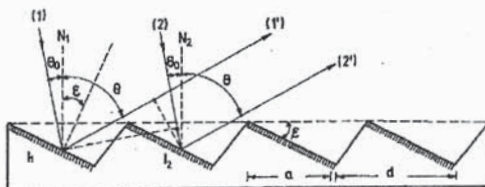


Fig.2.67. Rețea de difracție prin reflexie, cu profil.

$$2d \cos\varepsilon \cdot \sin(\theta_0 + \varepsilon) = m\lambda. \quad (2.344)$$

Având în vedere că puterea de rezoluție a unei rețele este mai mare în ordine superioare, căci $R = mN \sim m$, avem interesul ca m din relația (2.344) să fie cât mai mare. În acest fel, sub maximul central lat de difracție ("clopotul" funcției f_d) este de dorit să fie "trase" maxime de interferență de ordine mari, în dauna ordinelor mici, care să fie "lăsate afară".

Dacă unghiul de incidență θ_0 este foarte mic, adică raza (1) vine aproape pe direcția $N_1 I_1$, așa cum este cazul în toate montajele cu autocolimare, de tip Littrow (vezi mai departe), putem scrie aproximativ

$$2d \cos \varepsilon \cdot (\theta_0 \cos \varepsilon + \sin \varepsilon) \cong m\lambda, \quad (2.345)$$

sau grosier

$$d \sin(2\varepsilon) \approx m\lambda. \quad (2.345')$$

Aceste formule ne permit să determinăm ordinul m al spectrului de difracție pentru care se observă cea mai mare concentrare de intensitate luminoasă. Modificând convenabil unghiul ε (unghi de blaze), prin construcția profilului, putem concentra lumina difractată într-un maxim de ordin dorit, de preferință cât mai mare. De exemplu, pentru $\varepsilon = 15^\circ$, energia luminoasă "reflectată" este concentrată în maximul de ordinul

$$m \approx \frac{d \sin(2\varepsilon)}{\lambda} = \frac{d}{2\lambda}. \quad (2.345'')$$

Când $d = 4 \cdot 10^{-6}$ m și $\lambda = 500$ nm obținem $m = 4$. La unghiuri blaze mai mari, rezultă evident $m > 4$, putându-se obține practic ordine până la $m \cong 30$.

Precizăm că rețelele "cu profil" (réseau échelette - în franceză, blazed grating - în engleză), confecționate din sticlă, pot fi utilizate și prin transmisie, în acele domenii spectrale în care absorbția este neglijabil de mică (vezi mai departe). Atragem însă atenția asupra faptului că, în acest caz, relația $I_{\max}^{(m)} \text{ pr.} \sim 1/m^2$ (vezi formula (2.247), combinată cu relațiile (2.239) și (2.248)) nu mai rămâne valabilă deoarece această dependență a fost stabilită considerând că frontul unei incidente atinge *simultan* toate punctele de pe suprafața fantelor (rețeaua era plană și incidența normală). La o rețea cu profil ($\varepsilon \neq 0$), funcționând prin transmisie (profile neargintate), frontul unei incidente atinge punctele "dinților de ferăstrău" la momente de timp diferite și, din această cauză, între unele difractate apar diferențe suplimentare de fază. În această situație, rețeaua cu profil, funcționând prin transmisie, va fi o *rețea de fază*. Evident, diferențele de fază depind în mod esențial de forma concretă a profilului și din această cauză, în locul funcției $f_d(\Delta\phi) = \text{sinc}^2(\Delta\phi)$ din formula (2.238) va apare o altă funcție care redă și geometria profilului. Acesta este motivul pentru care dependența $I_{\max}^{(m)} \text{ pr.} \sim 1/m^2$ nu mai poate fi luată în considerare, chiar dacă factorul de interferență multiplă $f_i(N, \Delta\phi)$ nu se modifică. O situație absolut similară a fost cea discutată chiar la începutul acestei secțiuni (rețeaua cu transmittanță armonică).

Să analizăm mai detaliat funcționarea unei rețele de profil prin reflexie, pentru a vedea cum se poate realiza concentrarea energiei luminoase difractate într-un singur ordin. Fie, de exemplu, rețeaua din fig.2.68, cu "dinți" sub formă de triunghi dreptunghic, cu cateta reflectantă de lungime $2b$ și cu ipotenuza de lungime $2a$. Înclinarea ε satisface relația evidentă $\cos \varepsilon = b/a$.

Să presupunem că un fascicul luminos incident paralel (difracție Fraunhofer), monocromatic (lungime de undă λ), cade normal pe fețele reflectante ale rețelei cu profil.

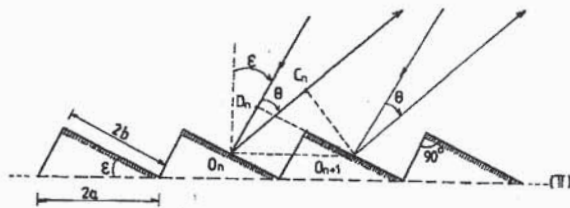


Fig.2.68. Rețea de difracție prin reflexie, cu profil sub formă de triunghi dreptunghic (reflexie pe cateta mare).

Ne propunem să determinăm dependența de unghiul θ a intensității luminoase difractate (care este concentrată de o lentilă convergentă nereprezentată în figură).

Vom analiza, mai întâi, difracția ce se produce la nivelul unei singure fețe reflectante (fig.2.69). Fie O mijlocul feței reflectante AB și P un punct oarecare situat la distanța x față de O (origine a axei x). Considerând egală cu zero faza unei difractate în O , faza unei difractate în P , corespunzând diferenței de drum

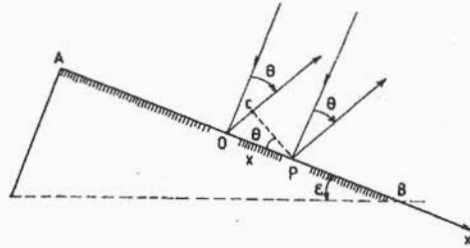


Fig.2.69. O singură "treaptă" a rețelei din figura anterioară.

optic $[OC] = -x \sin \theta$, este $-(2\pi/\lambda)x \sin \theta = \varphi(P)$. Amplitudinea complexă a unei ce pornește din P se poate scrie sub forma $E(x) = E(0)\exp[i\varphi(P)] = E(0)\exp[-\frac{2\pi i}{\lambda}x \sin \theta]$.

În total, pentru x cuprins între $-b$ și $+b$, obținem următoarea amplitudine a unei difractate în direcția θ (măsurată față de normala pe AB)

$$E_1(\theta) = \int_{-b}^{+b} E(x)dx = 2bE(0)\text{sinc}\left[\frac{2\pi}{\lambda}b \sin \theta\right]. \quad (2.346)$$

Intensitatea luminoasă corespunzătoare $I_1(\theta) = |E_1(\theta)|^2$ are expresia

$$I_1(\theta) = 4b^2 |E(0)|^2 \text{sinc}^2\left[\frac{2\pi}{\lambda}b \sin \theta\right] = I_1(0)\text{sinc}^2\left[\frac{2\pi}{\lambda}b \sin \theta\right], \quad (2.347)$$

unde $I_1(0)$ este valoarea respectivă pentru $\theta = 0$.

Revenind la fig.2.68 observăm că raza de lumină incidentă în punctul O_{n+1} posedă un avans de fază egal cu $k(2a \sin \epsilon) = (4\pi a/\lambda)\sin \epsilon$ față de cea incidentă în punctul omolog O_n de pe fațeta anterioară. Apoi, raza de lumină difractată de punctul O_{n+1} are, față de cea difractată de punctul O_n , un avans de fază egal cu $k(2a \sin(\epsilon + \theta)) = (4\pi a/\lambda)\sin(\epsilon + \theta)$. Avem, deci, următoarea diferență totală de fază între două fațete vecine

$$\psi = \varphi(O_{n+1}) - \varphi(O_n) = 2ak[\sin \epsilon + \sin(\epsilon + \theta)]. \quad (2.348)$$

Câmpul difractat în direcția θ de o rețea formată din N fațete reflectante este astfel de forma

$$\begin{aligned} E_N(\theta) &= E_1(\theta) \left[1 + e^{i\psi} + e^{2i\psi} + \dots + e^{(N-1)i\psi} \right] = E_1(\theta) \frac{1 - e^{iN\psi}}{1 - e^{i\psi}} = \\ &= E_1(\theta) \frac{\exp\left(\frac{iN\psi}{2}\right) \exp\left(-\frac{iN\psi}{2}\right) - \exp\left(\frac{iN\psi}{2}\right)}{\exp\left(\frac{i\psi}{2}\right) \exp\left(-\frac{i\psi}{2}\right) - \exp\left(\frac{i\psi}{2}\right)} = E_1(\theta) \exp\left(i(N-1)\frac{\psi}{2}\right) \cdot \frac{\sin\left(\frac{N\psi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\psi}{2}\right)}, \quad (2.349) \end{aligned}$$

iar pentru intensitatea luminoasă corespunzătoare $I_N(\theta) = |E_N(\theta)|^2$ obținem

$$I_N(\theta) = I_1(\theta) \left[\frac{\sin\left(\frac{N\psi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\psi}{2}\right)} \right]^2 = N^2 I_1(0) \text{sinc}^2 \left[\frac{2\pi b}{\lambda} \sin \theta \right] \cdot \left[\frac{\sin\left(N\frac{\psi}{2}\right)}{N \sin\left(\frac{\psi}{2}\right)} \right]^2. \quad (2.350)$$

În continuare, să presupunem că unghiul de difracție θ este mic astfel încât să putem aproxima $\sin \theta \approx \theta$. Atunci ψ se scrie sub forma

$$\psi = 4ak \sin \varepsilon + 2k\theta b \quad (2.348')$$

iar factorul de difracție din formula (2.347) devine

$$f_d(\theta) = \text{sinc}^2 \left[\frac{2\pi b}{\lambda} \theta \right]. \quad (2.351)$$

El este reprezentat grafic în fig.2.70 a. Se poate considera că dincolo de valoarea $|\theta| = \lambda/2b$ el este practic egal cu zero.

Factorul de interferență multiplă din (2.350) are forma

$$f_i(\theta, N) = \left[\frac{\sin\left(\frac{N\psi}{2}\right)}{N \sin\left(\frac{\psi}{2}\right)} \right]^2, \quad (2.352)$$

cu ψ dat de relația (2.348'). Maximele sale principale, de valoare $f_i = 1$, corespund la $\psi = 2m\pi$, cu $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ și sunt poziționate la

$$\theta = \frac{m\lambda}{2b} - \frac{2 \sin \varepsilon}{(b/a)} = \frac{m\lambda}{2b} - 2 \cdot \text{tg} \varepsilon, \quad (2.353)$$

căci $b/a = \cos \varepsilon$. Ecartul unghiular $\Delta\theta$ dintre două maxime principale vecine ($\Delta m = 1$) este dat de relația $\Delta\theta = \lambda/2b$ și coincide ca valoare cu distanța unghiulară dintre maximul principal și primul minimul al factorului de difracție (vezi fig.2.70 a).

Maximul principal de ordinul zero, $m = 0$, se formează în direcția $\theta_0 = -2\text{tg} \varepsilon$ și, dacă θ_0 și ε sunt unghiuri mici, putem scrie $\theta_0 = -2\varepsilon$; el ar corespunde reflexiei regulate a luminii pe planul orizontal (π) din fig.2.68.

Dacă unghiul ε al înclinării fațetelor reflectante are valoarea particulară $\varepsilon = \lambda/4b$, putem transcrie relația (2.353) sub forma

$$\theta \cong \frac{m\lambda}{2b} - 2\varepsilon = \frac{\lambda}{2b}(m-1). \quad (2.353')$$

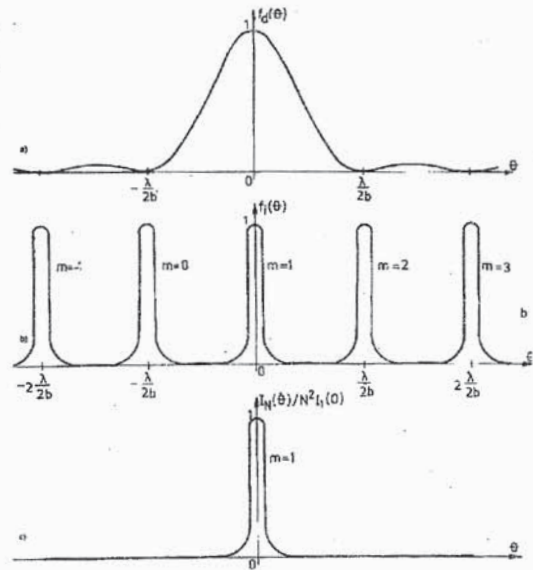


Fig.2.70. Factorul de difracție, factorul de interferență și produsul lor (pentru rețeaua din fig.2.68, cu $\varepsilon = \lambda/4b$).

În acest caz, la $\theta = 0$ avem maximul principal de ordinul $m = 1$, la $\theta = \lambda/2b$ avem maximul principal de ordinul $m = 2$, ș.a.m.d. (vezi fig.2.70, b).

Produsul dintre factorul de interferență și cel de difracție este reprezentat în fig.2.70,c. Se vede clar că, printr-o alegere convenabilă a unghiului ε , în figura finală de difracție, am reușit să concentrăm energia luminoasă într-un singur maxim principal (cu intensitatea proporțională cu N^2) - în cazul analizat, de ordinul $m = 1$.

Dacă unghiul ε ar fi fost ales de forma particulară $\varepsilon = p(\lambda/4b)$, în locul relației (2.353') am fi obținut $\theta \cong (\lambda/2b) \cdot (m - p)$ și concentrarea de energie luminoasă difractată ar fi avut loc în ordinul principal $m = p$.

Cele discutate mai sus sunt valabile pentru lumină monocromatică. Evident, în lumină policromatică sau albă, concentrarea diferitelor lungimi de undă poate apare în maxime de ordine diferite căci valorile lui ε se aleg pentru un anumit λ (median).

Pentru completitudinea studiului, să vedem cum ar funcționa o rețea cu același profil prin transmisie (vezi fig.2.71). Vom presupune, pentru comoditate, că fasciculul luminos incident, paralel (difracție Fraunhofer), cade normal pe fața plană a rețelei de indice de refracție n , în exteriorul căreia se află aer ($n' = 1$). Păstrăm aceleași dimensiuni și formă pentru "dintii de ferăstrău" ai rețelei, înclinarea ε fiind dată de relația $\cos \varepsilon = b/a$.

Fie θ unghiul fasciculului difractat, măsurat față de direcția incidentei pe cateta de latură $2b$. Ne propunem să determinăm, din nou, dependența de unghiul θ a intensității luminoase difractate de rețeaua cu N dinți (care este concentrată desigur cu o lentilă convergentă, nereprezentată în figură).

Pentru început ne vom ocupa de difracția produsă la nivelul unei singure fațete a rețelei (vezi fig.2.72). Fie O centrul fațetei AB și P un punct oarecare situat pe AB la distanța x față de O ($OP = x$). Avem $OD = x \sin \varepsilon$ și $PC = x \sin(\theta + \varepsilon)$. Considerând egală cu zero faza undei difractate în punctul O , faza undei difractate în P , corespunzând diferenței de drum optic $n \cdot OD - PC = nx \sin \varepsilon - x \sin(\theta + \varepsilon)$ va fi $\varphi(P) = kx[n \sin \varepsilon - \sin(\theta + \varepsilon)] = (2\pi/\lambda)x[n \sin \varepsilon - \sin(\theta + \varepsilon)]$.

Amplitudinea complexă a undei ce pornește din P se poate scrie sub forma $E(x) = E(0)\exp[i\varphi(P)]$. Sumând contribuția de la diferitele puncte P de pe latura AB , adică pentru x cuprins între $-b$ și $+b$, obținem

$$E_1(\theta) = \int_{-b}^{+b} E(x)dx = 2bE(0)\text{sinc}\left\{\frac{2\pi}{\lambda}b[n \sin \varepsilon - \sin(\theta + \varepsilon)]\right\}, \quad (2.354)$$

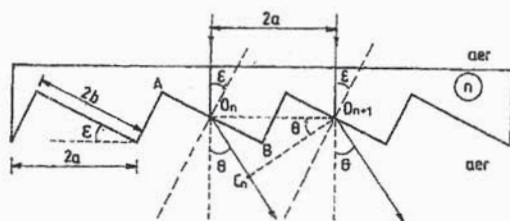


Fig.2.71. Rețea de difracție prin transmisie, cu profil sub formă de triunghi dreptunghic (refracție prin cateta mare).

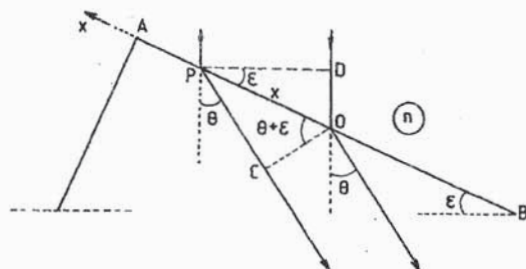


Fig.2.72. O singură "treaptă" a rețelei din figura anterioară.

iar intensitatea luminoasă respectivă (dată de o fațetă) este

$$I_1(\theta) = 4b^2 |E(0)|^2 \text{sinc}^2 \left\{ \frac{2\pi}{\lambda} b [n \sin \varepsilon - \sin(\theta + \varepsilon)] \right\}. \quad (2.355)$$

Revenind la fig.2.71, adică la întreaga rețea, observăm că razele de lumină omologe, difractate din punctele O_n și O_{n+1} , situate la distanța $2a$, au diferența de drum $O_n C_n = 2a \sin \theta$, adică sunt defazate cu

$$\psi = 2ak \sin \theta = \frac{4\pi a}{\lambda} \sin \theta. \quad (2.356)$$

Câmpul difractat în direcția θ de o rețea formată din N trepte este dat de aceeași relație (2.349), iar intensitatea luminoasă totală are expresia

$$I_N(\theta) = I_1(\theta) \left[\frac{\sin \left(\frac{N\psi}{2} \right)}{\sin \left(\frac{\psi}{2} \right)} \right]^2 = N^2 I_1(0) \text{sinc}^2 \left\{ \frac{2\pi}{\lambda} b [n \sin \varepsilon - \sin(\theta + \varepsilon)] \right\} \cdot \left[\frac{\sin \left(\frac{N\psi}{2} \right)}{N \sin \left(\frac{\psi}{2} \right)} \right]^2. \quad (2.357)$$

Aici, prin $I_1(0)$ am notat expresia $4b^2 |E(0)|^2$, adică valoarea maxim posibilă a lui $I_1(\theta)$. Pentru unghiuri mici de difracție, când $\sin \theta \approx \theta$ și $\cos \theta \approx 1$, putem scrie factorul de difracție sub forma

$$f_d(\theta) \approx \text{sinc}^2 \left\{ \frac{2\pi b}{\lambda} [(n-1) \sin \varepsilon - \theta \cos \varepsilon] \right\}. \quad (2.358)$$

El are valoarea maximă $f_d = +1$ pentru $\tilde{\theta} = (n-1) \text{tge}$ sau aproximativ* $\tilde{\theta} = (n-1)\varepsilon$ (aceasta este situația refracției regulate). Primele minime nule ale factorului de difracție au direcția $\theta = \tilde{\theta} \mp \lambda/2b \cos \varepsilon \approx \tilde{\theta} \mp \lambda/2b$ (vezi fig.2.73, a).

Pentru unghiuri θ mici, maximele principale ale factorului de interferență, date de $\psi = 2m\pi$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, au direcțiile $\theta_m = m(\lambda/2a)$.

Dacă unghiul de înclinare ε are valoarea particulară $\varepsilon = \lambda/[2a(n-1)]$ obținem $\tilde{\theta} = \lambda/2a$ și acest unghi (al maximumului principal de difracție) coincide cu unghiul maximumului principal de ordinul $m=1$ al factorului de interferență (vezi fig.2.73, b). Deoarece $a > b$, avem $1/a < 1/b$ și în consecință $\tilde{\theta} < \lambda/2b$. Această observație ne permite să poziționăm exact maximele principale ale factorului de interferență pe axa $O\theta$ (originea acestei axe este situată ușor la dreapta "punctului" $\tilde{\theta} - \lambda/2b$). Când se face produsul dintre factorul de interferență și cel de difracție, maximele principale de ordinele $m=0$ și $m=2$ ale factorului de interferență se estompează semnificativ (practic se anulează). Singurul maxim pe care îl va contura figura de difracție (vezi fig.2.73, c), va fi cel de ordinul $m=1$, cu intensitatea $I_N(\theta) = N^2 I_1(0)$, cu atât mai mare cu cât numărul N de trepte ale rețelei este mai mare.

* Pentru unghiuri ε mici.

Pentru o altă alegere particulară a lui ε , concentrarea energiei luminoase difractate se va produce în alt ordin principal. De exemplu, pentru $\varepsilon = p\lambda/[2a(n-1)]$, cu p număr natural, obținem $\tilde{\theta} = p\lambda/2a$ și $\theta_m = (m/p)\tilde{\theta}$. Singurul maxim bine conturat în figura de difracție va fi, acum, cel de ordinul $m = p$.

Utilizarea în montajele practice a rețelelor de difracție funcționând prin reflexie sau transmisie, de tipurile discutate până acum, necesită un colimator - care să furnizeze un fascicul incident de raze paralele și un obiectiv - în al cărui plan focal să se observe spectrele de difracție. Atât colimatorul, cât și obiectivul, trebuie să fie sisteme optice lipsite de aberații (în special de aberații cromatice), așa încât fiecare trebuie să fie format din cel puțin două lentile. Pentru o dispersie mai mare (spectru mai întins) este obligatoriu ca obiectivul să aibă un diametru mare, ceea ce este destul de greu de realizat practic (dacă avem în vedere și necesitatea lipsei aberațiilor). Mai mult, folosirea acestor lentile prezintă inconvenientul că micșorează intensitatea luminoasă utilă prin reflexii și absorbție pe/în sticlă. În special faptul că sticla nu este transparentă în ultraviolet și infraroșu, face ca aceste regiuni spectrale să nu poată fi studiate în montaje cu componente optice de sticlă obișnuită.

Pentru a micșora numărul lentilelor sau pentru eliminarea lor completă, de-a lungul anilor, în practica spectroscopică s-au propus diferite montaje. Menționăm în primul rând *montajul Littrow*, sau cu *autocolimare*, în care se utilizează o singură lentilă atât pentru colimare cât și pentru focalizare (vezi fig.2.74).

Lumina emisă de sursă trece prin fanta de intrare F_1 și prin lentila de autocolimare căzând în fasciculul paralel pe rețeaua de difracție R , funcționând prin reflexie. Rețeaua este așezată pe o măsută rotitoare ("tambur de lungimi de undă") în jurul unui ax perpendicular pe desena. Fasciculul difractat de rețea trece înapoi, în sens invers, prin lentila de autocolimare, este deviat de oglinda plană O spre fanta de ieșire F_2 , după care este investigat spectral. Evident, lentila de autocolimare trebuie să fie de foarte bună calitate (largă, lipsită de aberații, eventual transparentă și în afara domeniului vizibil).

Următoarele montaje (fig.2.75 a, b, c) elimină complet lentilele de colimare și focalizare, înlocuindu-le cu oglinzi (la care nu apar aberații cromatice). În fig.2.75 a, este

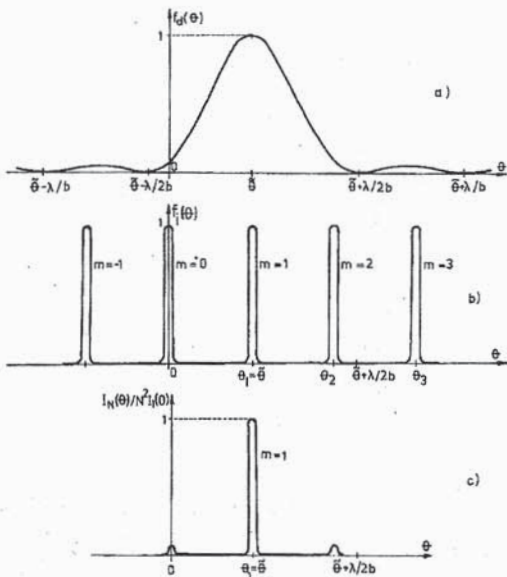


Fig.2.73. Factorul de difracție, factorul de interferență și produsul lor (pentru rețeaua din fig.2.71, cu $\varepsilon = \lambda/[2a(n-1)]$).

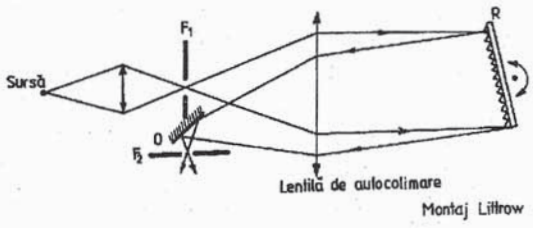


Fig.2.74. Schema generală a montajului Littrow (cu autocolimare).

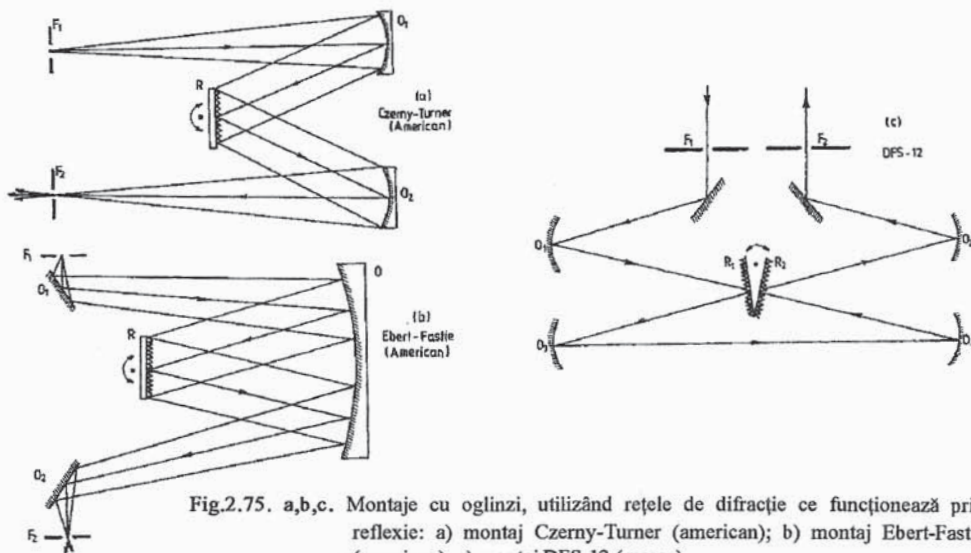


Fig.2.75. a,b,c. Montaje cu oglinzi, utilizând rețele de difracție ce funcționează prin reflexie: a) montaj Czerny-Turner (american); b) montaj Ebert-Fastie (american); c) montaj DFS-12 (rusec).

prezentat *montajul Czerny-Turner* (propus în anul 1930), în care O_1 este oglinda de colimare iar O_2 - oglinda de focalizare. Figura 2.75.b redă așa - numitul *montaj Ebert - Fastie* (propus în anul 1952), cu o singură oglindă, care îndeplinește atât rolul de colimare cât și pe cel de focalizare. Ambele tipuri de montaje (ca și montajul Littrow) lucrează cu rețele de profil funcționând prin reflexie. Ele sunt utilizate în monocromatoarele de bună calitate produse de firma americană Jarrell - Ash. În prezent, datorită simplității construcției (o singură oglindă) și ușurinței reglajelor, sunt preferate mai ales montajele de tip Fastie - Ebert.

Dublul monocromator rusesc DSF-12, funcționează conform montajului reprezentat în fig.2.75, c, în care există două rețele de difracție funcționând prin reflexie (R_1 și R_2) și patru oglinzi de colimare, respectiv focalizare.

Cu mult înaintea apariției montajelor cu rețele plane prezentate mai sus, eliminarea lentilelor a putut fi obținută prin utilizarea *rețelelor de difracție concave*, propuse de H.A. Rowland (1848 - 1901) spre sfârșitul secolului trecut (1882). O rețea concavă este o porțiune dintr-o oglindă concavă, cu suport metalic sau dielectric, având o rază de curbură mare, pe care sunt trasate zgârieturi paralele și echidistante. Între porțiunile zgâriate, rămân porțiuni paralele și echidistante reflectante. O astfel de rețea produce atât difracția luminii, cât și focalizarea ei - datorită curburii suprafeței reflectătoare. Multă vreme, alături de interferometrele Fabry - Pérot, rețelele concave au constituit principalele aparate spectrale de înaltă performanță.

Să analizăm cu atenție cum funcționează aceste rețele. Fie G_0G suprafața sferică reflectantă, cu centrul de curbură în C și de rază de curbură ρ (vezi fig.2.76), pe care sunt trasate zgârieturile paralele și echidistante, perpendiculare pe planul desenului. Fie d constanta rețelei de difracție, adică distanța dintre centrul a două zgârieturi paralele vecine.

Considerând că A_0 este o sursă luminoasă punctiformă, să stabilim ce condiții trebuie să fie îndeplinite pentru ca în punctul A , situat în același plan A_0OC , să se formeze (focalizeze) spectrul de difracție de ordinul m , furnizat de rețeaua concavă G_0OG . În cele

ce urmează, nu vom lua în considerare decât raze luminoase din planul A_0OAC , adică din planul xOy .

Fie $P(x, y)$ un punct difractant de pe rețea, (a_0, b_0) coordonatele punctului sursă A_0 și (a, b) coordonatele punctului A în care se focalizează spectrul de difracție de ordinul m . Notăm $A_0O = r_0$, $A_0P = u_0$, $OA = r$, $PA = u$. Pentru ca în A să se focalizeze spectrul de ordinul m este necesar și suficient ca diferența de drum dintre razele trimise de două trăsături vecine să fie egală cu $m\lambda$. Dacă presupunem că originea O (ca și punctul P) se află pe o trăsătură reflectantă a rețelei, putem exprima condiția maximumului de difracție de ordinul m în A sub forma

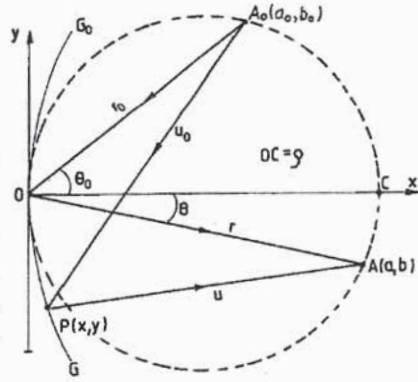


Fig.2.76. Rețea de difracție concavă (prin reflexie) de tip Rowland.

$u_0 + u = r_0 + r \pm nm\lambda$, unde n este numărul de trăsături reflectante dintre O și P . Pentru rețele cu extindere mică în lungul axei Oy avem aproximativ $n = \pm y/d$ și astfel putem scrie condiția

$$u_0 + u = r_0 + r \pm \frac{m\lambda}{d} y. \quad (2.359)$$

Din geometria figurii rezultă evident

$$u_0^2 = (y - b_0)^2 + (x - a_0)^2 = r_0^2 + x^2 + y^2 - 2(b_0y + a_0x). \quad (2.360)$$

Pe de altă parte, ecuația cercului de rază $OC = \rho$, pe care este gravată rețeaua, este $(x - \rho)^2 + y^2 = \rho^2$, de unde

$$x^2 + y^2 = 2\rho x. \quad (2.361)$$

Introducând $2x$ din (2.361) în relația (2.360) și scriind $a_0^2 = r_0^2 - b_0^2$ obținem

$$u_0^2 = \left(r_0 - \frac{b_0y}{r_0}\right)^2 + \left(\frac{a_0}{r_0} - \frac{1}{\rho}\right) a_0y^2 + \left(1 - \frac{a_0}{\rho}\right) x^2. \quad (2.362)$$

Folosind ecuația (2.361) a cercului de rază ρ , ne putem convinge ușor că, în vecinătatea originii O (y mici), al treilea termen din membrul drept al relației (2.362), este de ordinul al patrulea în y . De aceea, el poate fi neglijat față de ceilalți doi termeni din membrul drept al relației (2.362). Prin extragerea rădăcinii pătrate și dezvoltarea radicalului în serie obținem

$$u_0 = r_0 - \frac{b_0y}{r_0} + \frac{1}{2r_0} \left(\frac{a_0}{r_0} - \frac{1}{\rho}\right) a_0y^2 + O(y^3). \quad (2.363)$$

În același mod, se poate stabili și relația

$$u = r - \frac{by}{r} + \frac{1}{2r} \left(\frac{a}{r^2} - \frac{1}{\rho} \right) ay^2 + O(y^3) . \quad (2.364)$$

Precizăm că în aceste dezvoltări în serie am reținut numai termenii de ordinul 0, 1 și 2 în y . Revenind cu relațiile (2.363) și (2.364) în condiția (2.359) și identificând coeficienții aceluiași puteri în y obținem

$$\frac{b_0}{r_0} + \frac{b}{r} = \bar{m} \frac{\lambda}{d} , \quad (2.365)$$

$$\frac{a_0}{r_0} \left(\frac{a_0}{r_0^2} - \frac{1}{\rho} \right) + \frac{a}{r} \left(\frac{a}{r^2} - \frac{1}{\rho} \right) = 0 . \quad (2.366)$$

Dacă aceste relații sunt îndeplinite, rețeaua de difracție concavă are proprietățile focalizante specificate la început.

De pe desen se observă că $b_0/r_0 = \sin \theta_0$ și $b/r = \sin \theta$, astfel că relația (2.365) se poate scrie sub forma

$$d(\sin \theta_0 + \sin \theta) = \bar{m} \lambda , \quad (2.367)$$

pe care am mai întâlnit-o și la rețelele plane funcționând prin reflexie. Pentru un unghi de incidență θ_0 dat, ea determină direcția θ în care se găsește maximumul principal de difracție de ordinul m .

Relația (2.366) determină distanța r , respectiv poziția punctului A față de O , la/în care se formează maximumul de difracție de ordinul m . Astfel, cele două relații (2.365) și (2.366) definesc în mod univoc poziția punctului de focalizare A , cunoscând poziția A_0 a sursei luminoase. Scriind, conform figurii, că $a_0 = r_0 \cos \theta_0$ și $a = r \cos \theta$ putem transcrie ecuația (2.366) sub forma

$$\frac{\cos^2 \theta_0}{r_0} + \frac{\cos^2 \theta}{r} = \frac{\cos \theta_0 + \cos \theta}{\rho} . \quad (2.368)$$

Dacă unghiurile θ_0 și θ sunt mici, în ultima relație recunoaștem prima ecuație a lui Young (vezi ecuația (1.115)) a oglinzii concave cu raza de curbură ρ . Astfel, oricare ar fi poziția A_0 a sursei luminoase, există întotdeauna un punct A în planul figurii în care converg (în mod aproximativ; să nu uităm caracterul aproximativ al relațiilor (2.363), (2.364)) razele de lumină difractate de rețeaua concavă.

Pentru mai multă comoditate practică la poziționarea rețelei, adică pentru micșorarea preciziei necesare ca și pentru creșterea rezoluției liniilor spectrale, se lucrează în așa fel încât în ecuația (2.362) să nu fie prezent nici termenul proporțional în y^2 . Aceasta se realizează atunci când $a_0 \rho = r_0^2$ și din ecuația (2.366) rezultă imediat $\rho = r^2$. Putem transcrie aceste relații și sub forma

$$\rho \cdot (r_0 \cos \theta_0) = r_0^2 \quad \text{adică} \quad r_0 = \rho \cos \theta_0 , \quad (2.369)$$

respectiv

$$\rho \cdot (r \cos \theta) = r^2 \quad \text{adică} \quad r = \rho \cos \theta . \quad (2.370)$$

Relația (2.369) ne arată că sursa punctiformă A_0 trebuie să se afle pe o circumferință de diametru ρ , tangentă la suprafața rețelei în punctul O . Relația (2.370) ne spune că, atunci, razele luminoase difractate vor fi focalizate într-un punct A ce aparține aceleiași circumferințe, ce se numește *cercul lui Rowland*.

Dispersia unghiulară a rețelei $d\theta/d\lambda = m/(d \cos \theta)$ va fi independentă de unghiul θ , dacă spectrele de difracție se formează în vecinătatea lui $\theta = 0$, adică pentru unghiuri θ mici (până la $5^\circ - 6^\circ$). În acest caz putem scrie $\cos \theta \approx 1$ și unghiul θ variază liniar cu λ , adică spectrul este *normal*. Din aceste motive, în situațiile practice uzuale, rețeaua este dispusă față de sursă în așa fel încât spectrele care se produc (și se doresc a fi investigate) să se formeze în vecinătatea axului optic principal al rețelei concave.

Un montaj practic, a cărei funcționare se bazează direct pe teoria dezvoltată mai sus, a fost cel al lui Paschen, în care sursa A_0 era o fantă paralelă cu trăsăturile rețelei. Atât rețeaua cât și fanta se aflau în poziții fixe. Investigându-se ultravioletul, observarea se făcea cu ajutorul unei plăci fotografice, ușor curbate; aceasta era așezată într-un suport pe care se putea deplasa (pe cercul de diametru ρ). Mișcând placa fotografică de-a lungul suportului, se puteau investiga diferitele regiuni spectrale ale ultravioletului.

Marile rețele concave existente în prezent au, în ordinul întâi ($m = 1$), o putere de rezoluție spectrală R de ordinul $2 \cdot 10^5$. Ele pot separa încă radiații decalate unghiular cu $\Delta\theta = m \cdot \Delta\lambda / (d \cos \theta) = m\lambda / (R \cdot d \cdot \cos \theta)$, ceea ce înseamnă, la distanța $r \approx \rho$, variații spațiale $\Delta s = \rho \Delta\theta = m\lambda \rho / (R \cdot d \cdot \cos \theta) = (m/d)(\rho\lambda/R)$. Din această relație putem determina, de exemplu, ce rază de curbură ρ este necesară pentru evidențierea unei variații spațiale (spectrale) date. Să luăm $\Delta s = 0,01 \text{ mm}$, $m = 1$, $R = 2 \cdot 10^5$, $\lambda = 500 \text{ nm}$, $d = (1/600) \text{ mm}$; obținem $\rho \approx 7 \text{ m}$, adică o rază de curbură foarte mare.

Studiul teoretic prezentat mai sus nu se aplică decât razelor de lumină conținute în planul figurii. Un studiu mai profund arată că razele ce nu sunt conținute în acest plan formează *imagini astigmatice*, astfel că imaginea unei surse punctiforme plasată în A_0 se prezintă sub forma unui segment de dreaptă perpendiculară în A pe planul figurii. Astigmatismul crește odată cu unghiul de incidență θ_0 , adică odată cu ordinul spectrului. Dacă sursa luminoasă este o fantă, astigmatismul determină o micșorare a clarității imaginilor și a puterii de rezoluție, mai ales atunci când fanta nu este paralelă cu trăsăturile rețelei. De aceea, este extrem de important să se asigure paralelismul lor. Din același motiv, rețeaua concavă nu trebuie să aibă trăsături prea lungi.

Prezentăm în continuare montajul propus și utilizat de Rowland. La capetele unei tije rigide cu lungimea ρ (vezi fig.2.77) sunt fixate oglinda concavă O , pe care este trasată rețeaua, și placa fotografică PP_0 . Capetele tijei, prevăzută cu "patine", pot aluneca pe două șine OA_0 și AA_0 , formând între ele un unghi drept și la întretăierea cărora se află fanta A_0 (sursa luminoasă). Este evident că oricare ar fi poziția barei, punctele O , A_0 și A se vor găsi pe un cerc de diametru ρ . Astfel, condiția de punere la punct este realizată dacă raza de curbură a oglinzii G_0OG este egală cu ρ . Spectrul obținut în acest montaj este întotdeauna normal deoarece razele de lumină care ajung pe placa fotografică PP_0 sunt emise perpendicular pe rețea, adică $\theta = 0$. Din relația (2.367) rezultă $d \sin \theta_0 = m\lambda$ și, pe de altă parte, conform figurii, $AA_0 = \rho \sin \theta_0$. Astfel obținem

$$AA_0 = \rho \frac{m\lambda}{d}.$$

Cunoscând ρ și d , lungimea AA_0 este o măsură a lungimii de undă. De aceea, șina AA_0 este gradată direct în lungimi de undă (printr-o etalonare inițială).

Montajul lui Rowland prezintă un mare inconvenient, anume acela al gabariturii foarte mare. Un astfel de montaj nu poate fi menținut la o temperatură constantă și, de aceea, parametrii ρ și d , precum și gradația șinei AA_0 , variază semnificativ în timpul expunerilor de lungă durată. În plus, el este destul de scump. Lucrând în aer, un astfel de montaj nu poate fi folosit pentru studiul ultravioletului îndepărtat, deoarece pentru astfel de frecvențe aerul devine absorbant.

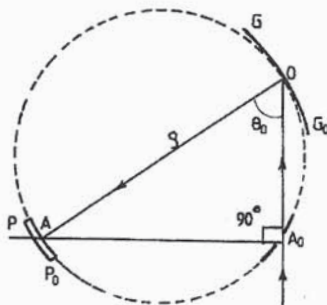


Fig.2.77. Montajul lui Rowland.

Acest ultim dezavantaj a fost înlăturat în *montajul* propus de *Eagle*, mai compact ca extindere spațială decât cel al lui Rowland, el putând fi introdus în spectrografe în care se face vid. Fanta A_0 și placa fotografică A se află practic în același loc pe cercul de diametru ρ (fie una în fața celeilalte, fie una deasupra celeilalte) - vezi fig.2.78. În acest montaj, unghiul de difracție θ este egal, în medie, cu cel de incidență și are același semn. Pentru a prinde pe placa fotografică PP_0 diferitele regiuni ale unui spectru, rețeaua G_0G trebuie să fie rotită în jurul unui ax perpendicular pe planul figurii. La fiecare nouă poziție se reglează distanța $PP_0 - GG_0$, în așa fel ca rețeaua și placa fotografică să se găsească pe cercul de diametru ρ , ceea ce e posibil deplasând rețeaua de-a lungul șinei reprezentate în figură și care este gradată în lungimi de undă.

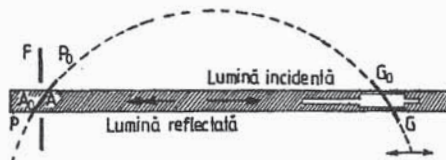


Fig.2.78. Montajul lui Eagle.

Încheiem aceste considerente cu mențiunea că există mai multe variante de montaje Eagle, și cu precizarea că, în prezent, sunt folosite mai ales *montajul Wadsworth* (care înlătură total astigmatismul) și schema *Seya - Namioka* (în care trecerea de la o lungime de undă la alta se realizează prin rotirea rețelei, fără deplasarea altor elemente ale aparatului) - vezi referința [55].

Cu ajutorul rețelelor concave studiul ultravioletului s-a putut extinde până la valori ale lungimii de undă de câteva zeci de angstromi, trecându-se astfel în domeniul razelor X.

2. 8. 7. Difracția undelor și microparticulelor pe rețele bi și tri-dimensionale

În secțiunile de până acum ale acestui capitol am considerat numai rețele de difracție unidimensionale, adică structuri spațiale ale căror proprietăți fizice (în particular, optice) variază de-a lungul unei singure direcții (Ox), cu o perioadă d , așa cum se arată în fig.2.79. Difracția în lumină paralelă (de tip Fraunhofer) pe o astfel de rețea este o împrăștiere elastică, adică este valabilă relația $|\vec{k}_i| = |\vec{k}_d| = k$, ce exprimă conservarea modulului vectorului de undă. După cum am văzut, condiția maximelor principale, care

determină direcția α a concentrațiilor de intensitate luminoasă în figura de difracție (maxime de interferență multiplă) este dată de relația

$$d(\cos \alpha - \cos \alpha_0) = m\lambda, \quad (2.371)$$

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

unde α_0 determină direcția fascicului paralel incident față de axa Ox (axa de periodicitate). Când vectorii \vec{k}_i și \vec{k}_d sunt conținuți în planul (x, z) - ca în figură - avem $\beta = \beta_0 = \pi/2$ și relațiile cosinurilor directori $\cos^2 \alpha_0 + \cos^2 \beta_0 + \cos^2 \gamma_0 = 1$, $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ degenează în

$$\cos^2 \alpha_0 + \cos^2 \gamma_0 = 1, \quad \cos^2 \alpha + \cos^2 \gamma = 1. \quad (2.372)$$

Rezultă că unghiul γ_0 , format de vectorul \vec{k}_i cu axa Oz este complementul lui α_0 (este egal cu θ_0) iar unghiul γ , format de vectorul \vec{k}_d cu axa Oz , este complementul lui α (este egal cu θ). Cu alte cuvinte, așa cum se vede și din figură, direcția de propagare, atât înainte de difracție cât și după difracție, este determinată practic de un singur unghi (α_0 , respectiv α).

În exemplele date în paragrafele anterioare, perioada d caracteriza distanța dintre două fante (trepte) transparente vecine - în cazul rețelelor prin transmisie, sau distanța dintre două fațete succesive reflectante - ale rețelelor prin reflexie (cu sau fără profil). Generalizând, putem considera însă, în loc de fante, o succesiune periodică de mici orificii (de exemplu circulare) sau, în loc de fațete reflectante, o serie de centre de difuzie (sub forma unor mici sfere, ca atomii dintr-un șir al unei rețele cristaline), care împrăștie lumina incidentă.

Construcția din fig.2.79 reprezintă însă fenomenul numai în planul desenului. Dacă luăm în considerare și cealaltă dimensiune spațială, vom constata că mai există și alte direcții în care vectorul \vec{k}_d formează același unghi α cu axa Ox . Toate direcțiile date de relația $\cos \alpha = \cos \alpha_0 + (m\lambda/d)$, care formează, pentru fiecare valoare concretă a lui m , același unghi (α) cu axa Ox , se așază pe suprafața unui con cu vârful în O și cu axa Ox ca axă de simetrie. De exemplu, pentru incidență normală, adică pentru $\alpha_0 = \pi/2$, obținem $\cos \alpha = m(\lambda/d)$ și forma conurilor pentru $m=0, \pm 1, \pm 2$, este redată în fig.2.80. Evident, sunt posibile numai situațiile în care $|\cos \alpha| \leq 1$, adică $|m| \leq d/\lambda$. Așezând paralel cu șirul de pe Ox un ecran (peliculă fotosensibilă), aceste conuri vor intersecta (impresiona) ecranul după curbe sub formă de hiperbole. Când ecranul este perpendicular pe axa Ox (a

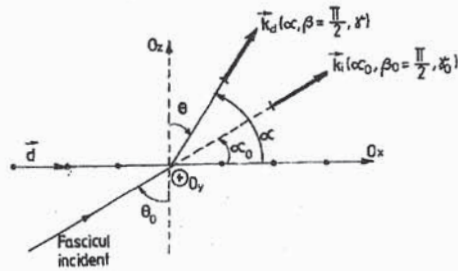


Fig.2.79. Schema difracției pe o rețea unidimensională.

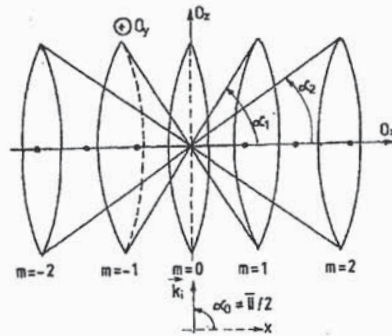


Fig.2.80. Suprafețe conice reprezentând maxime de difracție pe o rețea unidimensională (la incidență normală).

atomilor), curbele imagine vor fi cercuri concentrice iar la alte înclinări față de axă - elipse. Deoarece unghiurile α depind, în general ($m \neq 0$), și de lungimea de undă λ , dacă lumina incidentă (sau razele X, pe care le avem în vedere în continuare) nu este monocromatică, curbele imagine vor fi colorate.

După cum se știe, în difracția Fraunhofer pe o rețea, deci și a razelor X ($\lambda \cong 10^{-3} - 10 \text{ nm}$) pe cristale, intensitatea maximelor principale este puternic dependentă de numărul N al fantelor, adică al centrilor împrăștiatori: cu cât N este mai mare, cu atât intensitatea maximelor principale ($\sim N^2$) este mai mare. De aceea, în practică, este necesar să avem un șir cât mai lung de centri împrăștiatori (atomi). Această cerință intră însă în contradicție cu condiția producerii difracției Fraunhofer - problemă care a fost analizată în paragraful 2.6 (vezi formula (2.71)). Când lungimea șirului de atomi este ℓ , se poate considera că difracția este de tip Fraunhofer la distanțe $r \gg \ell^2/\lambda$, față de rețea. Referindu-ne la difracția unor raze X cu lungimea de undă $\lambda = 10^{-10} \text{ m} = 0,1 \text{ nm}$, pe un șir de atomi cu întinderea de numai un milimetru, $\ell = 1 \text{ mm}$ (cam $10^7 - 10^8$ atomi în șir), rezultă necesitatea îndeplinirii condiției $r \gg 10 \text{ km}$ - adică distanțe de observație foarte mari. La creșterea lui ℓ (pentru a mări numărul N , și deci intensitatea maximelor principale), distanțele de observație cresc ca ℓ^2 . Aceste distanțe nu pot fi scurtate prin utilizarea unor lentile de focalizare deoarece, pentru domeniul razelor X, astfel de lentile nu există (indicele de refracție este practic egal cu 1). Și totuși, în experiențele reale, fără lentile de focalizare, doar cu plăci fotografice așezate la distanțe de câteva zeci de centimetri (deci, de zeci sau sute de ori mai mici!), fenomenul se pune în evidență și el este în concordanță cu teoria difracției Fraunhofer (formula (2.371) se poate aplica). Acest lucru se dovedește a fi adevărat și în cazul rețelelor mai realiste, bi și tri-dimensionale, pe care le vom analiza în continuare.

Cum se explică acest paradox ? După cum se știe (vezi și secțiunea 3.15.2.), câmpul de unde care ia naștere în urma difracției pe o rețea plană, se poate reprezenta, la orice distanță, ca o superpoziție de unde plane*, cu vectori de propagare în toate direcțiile posibile (spectru unghiular). Această superpoziție conține desigur și unde neomogene (evanescente) - care se amortizează extrem de rapid la distanțe superioare perioadei d a rețelei și care, din acest motiv, nu joacă nici-un rol la distanțe de ordinul centimetrilor sau mai mari. Placa fotografică, pe care se înregistrează maximele principale, este așezată la distanțe mici (zeci de centimetri), unde se aplică încă legile opticii geometrice (vezi și fig.2.13), însă, în același timp, suficient de mari pentru ca undele plane transmise de rețea să fie separate spațial. Pentru a putea determina pozițiile maximelor de intensitate pe placa fotografică este suficient să fie cunoscute direcțiile de propagare ale acestor unde plane, care *nu depind de distanța față de cristal* (direcțiile de propagare în zona de valabilitate a opticii geometrice sunt aceleași ca și în zona de unde, adică în zona difracției Fraunhofer). Prin urmare, pentru determinarea poziției maximelor de intensitate pe placă, scrierea relației (2.371) este justificată. Totuși, aceste maxime "fotografiate" diferă de maximele de interferență din zona de unde, din cauza diferențelor de fază care apar în timpul propagării.

Este deosebit de important să extindem cele învățate până acum la cazul unor rețele bi și tri-dimensionale, căci acestea se întâlnesc mult mai frecvent în natură.

* În cazul unui singur șir de atomi (rețea liniară) este mai comod ca dezvoltarea în serie să se facă după unde cilindrice.

Rețeaua bidimensională este o structură spațială ale cărei proprietăți variază periodic în lungul a două direcții diferite (Ox , Oy), cu perioadele \vec{d}_1 , respectiv \vec{d}_2 , care definesc o *celulă elementară (primitivă) bidimensională* (vezi fig.2.81). Dacă $\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2 \neq 0$ rețeaua este *oblică* iar dacă $\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2 = 0$ rețeaua este *rectangulară*, adică celula elementară este un dreptunghi (sau un pătrat, când $d_1 = d_2$). Evident în ansamblul său, rețeaua bidimensională se obține prin repetarea translațională, pe cele două direcții, a celulei elementare.

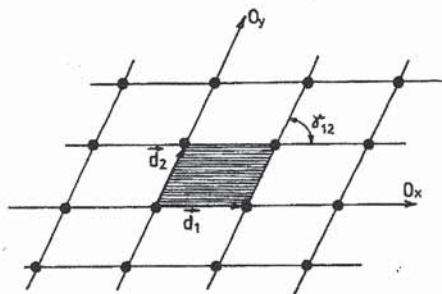


Fig.2.81. Schema unei rețele periodice bidimensionale.

În cristalografie se consideră că există cinci tipuri de rețele bidimensionale (A. Bravais, 1848), după cum urmează:

- 1). Oblică: $d_1 \neq d_2$; $\gamma_{12} \neq \pi/2$; celula = paralelogram;
- 2). Pătratică: $d_1 = d_2$; $\gamma_{12} = \pi/2$; celula = pătrat;
- 3). Hexagonală: $d_1 = d_2$; $\gamma_{12} = 2\pi/3$; celula = romb de 60° ;
- 4). Dreptunghiulară primitivă: $d_1 \neq d_2$; $\gamma_{12} = \pi/2$; celula = dreptunghi;
- 5). Dreptunghiulară centrată: $d_1 \neq d_2$; $\gamma_{12} = \pi/2$; celula = dreptunghi (cu un "atom" în centrul său).

O rețea optică bidimensională se poate obține practic prin încrucișarea a două rețele unidimensionale, adică prin suprapunerea acestora astfel ca trăsăturile uneia să formeze un unghi oarecare ($\gamma_{12} \neq 0; \pi$) cu trăsăturile celeilalte.

Se poate demonstra, fără nici-un fel de dificultate, că figura de difracție produsă de două rețele unidimensionale suprapuse constă din suprapunerea figurilor de difracție produse de fiecare rețea unidimensională în parte. Condiția maximelor principale, care determină direcția $(\alpha, \beta)^*$ de concentrare a intensității luminoase în difracția Fraunhofer, pe o astfel de rețea, este dată de două relații de forma (2.371), anume

$$\begin{cases} d_1(\cos \alpha - \cos \alpha_0) = n_1 \lambda, \\ d_2(\cos \beta - \cos \beta_0) = n_2 \lambda, \end{cases} \quad n_{1,2} = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (2.373)$$

unde unghiurile α_0, β_0 se referă la direcția fasciculului luminos, paralel, incident pe rețea. Astfel, de exemplu, figura de difracție Fraunhofer dată de o rețea bidimensională rectangulară ($\vec{d}_1 \perp \vec{d}_2$) la incidență normală (în lungul axei Oz), $\alpha_0 = \beta_0 = \pi/2$, este o "rețea reciprocă" formată din puncte luminoase care satisfac relațiile

$$\cos \alpha = n_1 \frac{\lambda}{d_1}, \quad \cos \beta = n_2 \frac{\lambda}{d_2}. \quad (2.374)$$

Rețeaua punctelor de concentrare luminoasă (maxime principale) se prezintă, într-o diagramă a cosinurilor, ca în fig.2.82. Fiecare "nod" din această rețea este caracterizat

* Unghiurile α, β se măsoară față de Ox , respectiv Oy .

printr-o pereche de numere întregi (n_1, n_2) și reprezintă un ordin de interferență constructivă. Evident, unghiul γ , format de vectorul \vec{k}_d cu axa Oz se determină din condiția geometrică a cosinurilor directori $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. Pentru exemplul dat avem

$$\cos\gamma = \left[1 - \left(n_1 \frac{\lambda}{d_1} \right)^2 - \left(n_2 \frac{\lambda}{d_2} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (2.375)$$

Realitatea radicalului impune limitări evidente numerelor n_1, n_2 .

Putem să ne formăm o imagine mai clară cu privire la distribuția spațială a maximelor principale raționând ca în situația rețelei unidimensionale. Să ne referim, pentru simplitate, la cazul unei incidențe luminoase normale pe planul rețelei bidimensionale ($\alpha_0 = \beta_0 = \pi/2$). Condiția $\cos\alpha = n_1 \lambda/d_1$, $n_1 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, este îndeplinită pentru direcții ce se așează pe suprafața unui con având axa Ox ca axă de simetrie (vezi fig.2.80). Analog, condiția $\cos\beta = n_2 \lambda/d_2$, $n_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, este îndeplinită pentru direcții ce se așează pe suprafața unui con având axa Oy ca axă de simetrie. Cele două condiții (2.373) sunt îndeplinite simultan de-a lungul curbelor ce reprezintă intersecțiile pânzelor celor două sisteme de conuri, având axele Ox , respectiv Oy , ca axe de simetrie (vezi fig.2.83). Pe un ecran plan, așezat perpendicular pe direcția vectorului \vec{k}_i (în cazul analizat, ecranul este deci paralel cu planul rețelei bidimensionale, adică cu planul xOy) se va obține o diagramă formată din două familii de hiperbole ce se întretaie. Ele reprezintă intersecția planului considerat cu cele două sisteme de conuri de difracție. În cazul incidenței normale, pe o rețea rectangulară, diagrama are aspectul prezentat în fig.2.84. Intersecțiile hiperbolelor din

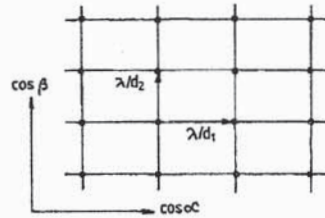


Fig.2.82. Rețeaua punctelor de concentrare luminoasă (maxime principale) într-o diagramă a cosinurilor directori.

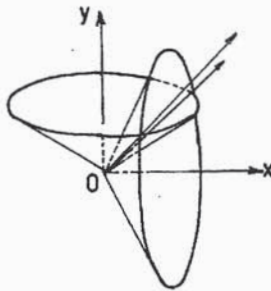


Fig.2.83. Intersecția a două suprafețe conice.

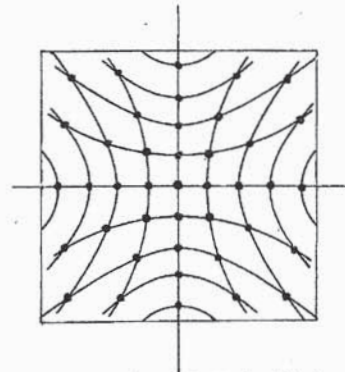


Fig.2.84. Intersecția a două familii de hiperbole (reprezintă puncte de concentrare a energiei luminoase în figura de difracție).

această diagramă corespund concentrărilor de energie luminoasă în figura de difracție de pe ecran, adică aceasta din urmă este formată din pete luminoase izolate.

Un exemplu uzual de rețea de difracție bidimensională este cel al unei țesături fine (ciorap de mătase, pânză de umbrelă) bine întinsă. Există și "rețele" neperiodice, care pot produce fenomene sesizabile de difracție. De pildă, un geam de sticlă, acoperit cu un strat neuniform de praf (și ca dimensiuni ale firicelilor de praf, dar și ca distribuție superficială) sau un geam înghețat din cauza gerului pot fi astfel de exemple. Figura de difracție obținută într-un astfel de caz este destul de complicată și nu posedă practic vreo simetrie previzibilă. În plus, ea este destul de ștearsă, căci este consecința suprapunerii aperiodice a unor maxime de diferite ordine. Studiul teoretic al difracției produse de o atare rețea (echivalentă cu un ansamblu de rețele simple cu toate orientările posibile și cu diverse perioade) poate fi realizat numai cu ajutorul metodei lui Rayleigh (vezi cap.III, §.3.15).

Figurile de difracție de raze X (lungimi de undă ≤ 10 nm) pe rețele bidimensionale cu structură necunoscută pot fi simulate prin difracția Fraunhofer a luminii vizibile pe măști bidimensionale convenabile. În acest fel, difractometria de raze X se transformă în difractometrie optică (luminoasă). Pentru a găsi masca (rețeaua) de difracție optică analoagă cu rețeaua fină bidimensională a cărei necunoscută se investighează prin difracție de raze X, se procedează prin metoda "încercare și eroare" ("trial and error"). Masca este confecționată prin mici găuri circulare într-un ecran opac, găurile ("atomii") fiind așezate în configurația atomică presupusă pentru rețeaua ce s-a studiat cu ajutorul difracției de raze X. Pe mască, în simetria presupusă a rețelei cristaline bidimensionale, celula elementară (formată de patru găuri) se reproduce translațional de un număr foarte mare de ori. Prin fotografiere, această mască este "redușă" la o scară adecvată producerii difracției Fraunhofer luminoase (prin transmisie). În cele din urmă, prin mai multe încercări, se poate găsi acea mască (rețea) care produce o figură de difracție analoagă (omotetică) celei produse de razele X pe rețeaua fină, bidimensională, cu structura necunoscută. Cu ajutorul unor relații de similitudine se pot obține astfel informații despre structura rețelei necunoscute (la nivelul căreia nu putem face măsurători directe).

Rețeaua tridimensională (sau *spațială*) se caracterizează prin existența unei periodicități pe trei direcții diferite, astfel că celula elementară are, în general, forma unui paralelipiped construit pe trei vectori necoplanari $\vec{d}_1, \vec{d}_2, \vec{d}_3$ (vezi fig.2.85). În ansamblu, structura tridimensională se obține prin repetarea translațională a celulei elementare.

În raport cu un nod oarecare al rețelei, ales ca origine, vectorul

$$\vec{r} = n_1 \vec{d}_1 + n_2 \vec{d}_2 + n_3 \vec{d}_3, \quad (2.376)$$

cu n_1, n_2 și n_3 numere întregi, determină poziția oricărui nod al rețelei. Evident, nodul $n_1 = n_2 = n_3 = 0$ corespunde originii alese.

Cele mai caracteristice exemple de rețele tridimensionale sunt furnizate de substanțele cristaline, la care particulele materiale (atomi, ioni sau molecule) sunt așezate ordonat, de-a lungul a trei direcții spațiale diferite. După valorile mărimilor d_1, d_2, d_3 și a unghiurilor $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ (vezi fig.2.85), care sunt constante de material și

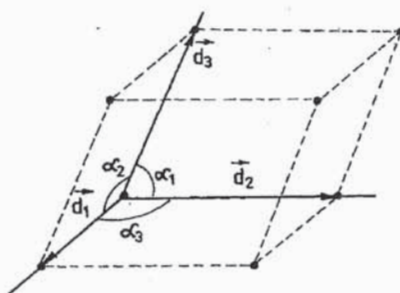


Fig.2.85. Celulă "elementară" într-o rețea tridimensională.

definesc metrica (baza) cristalului, distingem următoarele șapte sisteme cristalografice (A. Bravais, 1848):

- 1). Triclinic: $d_1 \neq d_2 \neq d_3$; $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \alpha_3 \neq \pi/2$;
- 2). Monoclinic: $d_1 \neq d_2 \neq d_3$; $\alpha_1 = \alpha_3 = \pi/2 \neq \alpha_2$;
- 3). Ortorombic: $d_1 \neq d_2 \neq d_3$; $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \pi/2$;
- 4). Tetragonal: $d_1 = d_2 \neq d_3$; $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \pi/2$;
- 5). Cubic: $d_1 = d_2 = d_3$; $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \pi/2$;
- 6). Romboedric (Trigonal): $d_1 = d_2 = d_3$; $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 \neq \pi/2 (< 2\pi/3)$;
- 7). Hexagonal: $d_1 = d_2 \neq d_3$; $\alpha_1 = \alpha_2 = \pi/2$, $\alpha_3 = 2\pi/3$.

Așadar, în general, rețeaua este oblică, dar în particular, în cazurile ortorombic, tetragonal și cubic ea este rectangulară.

Rețeaua este o construcție geometrică cu ajutorul căreia se pun în evidență, în spațiul cristalului, punctele omoloage, adică ea este doar o schemă de periodicitate tridimensională a distribuției particulelor din structura cristalului; un nod al rețelei nu trebuie să fie identificat neapărat cu o particulă materială, căci rețeaua redă doar simetria structurii, independent de faptul că un nod coincide cu un atom de un tip sau altul sau cu mijlocul (să zicem!) spațiului dintre doi atomi. Cu alte cuvinte, rețeaua reflectă simetria prin celula elementară, fără a determina însă și distribuția substanței în interiorul celulei elementare.

În majoritatea cazurilor, în corpurile cristaline, distanțele dintre atomii vecini sunt de ordinul a 0,2-0,5 nm, ceea ce înseamnă cam 10^{21} particule într-un volum de 1 mm^3 , adică un număr care poate fi considerat infinit de mare.

În acest paragraf ne vom ocupa mai detaliat de rețelele tridimensionale având în vedere că ele oferă cel mai natural cadru pentru studiul difracției undelor electromagnetice X ($\lambda_X \cong 10^{-3} - 10 \text{ nm}$) și al difracției fasciculelor monocromatice de particule (electroni, protoni, neutroni, atomi, molecule), care se comportă ondulatoriu (lungimea de undă de Broglie = h/mv).

După descoperirea razelor X (1895, W.C.Röntgen; premiul Nobel în 1901) s-au făcut mai multe încercări nereușite pentru punerea în evidență a difracției acestora pe rețele optice obișnuite. Motivul insucceselor poate fi înțeles ușor: dacă avem în vedere că la rețelele obișnuite $d \gg \lambda_X$, condiția maximelor principale de difracție ne dă $\sin \theta_{\max} = m\lambda_X/d$ adică devieri θ_{\max} semnificative au loc numai în ordine de interferență m foarte mari, a căror intensitate este practic anulată de factorul de difracție f_d .

În anul 1912, fizicianul german Max von Laue (premiul Nobel în 1914) a sugerat folosirea în acest scop a rețelilor cristaline care pot fi considerate rețele de difracție, periodice, naturale. Colaboratorii săi W. Friedrich și P. Knipping au trimis un fascicul de raze X, cu spectru continuu de lungimi de undă, pe un monocristal și au reușit să înregistreze pe o placă fotografică un sistem de pete discrete, repartizate în mod regulat, reprezentând figura de difracție a razelor X produsă de rețeaua cristalină. Prin această experiență fundamentală s-a demonstrat pentru prima dată *natura ondulatorie a razelor X*. S-au pus, totodată, bazele moderne ale fizicii corpului solid, făcându-se dovada experimentală a faptului că, structurile cristaline sunt constituite din particule (atomi, ioni, molecule) repartizate regulat și periodic în spațiu.

Procesul difracției se produce în felul următor: unda electromagnetică incidentă, de energie mare în cazul radiațiilor X, induce oscilații forțate ale electronilor periferici (sau chiar mai profunzi) din atomii cristalului, generându-se în felul acesta unde secundare huygensiene coerente *reale* (nu "fictive" ca în teoria Fresnel - Kirchhoff !), care, în anumite

condiții, pe anumite direcții, interferă constructiv. Petele discrete, puse în evidență (pe placa fotografică) de cei doi colaboratori ai lui Laue, nu sunt altceva decât materializarea maximelor de interferență.

Rețelele cristaline pot fi *simple (primitive)* sau *compuse*. Se spune că rețeaua este simplă, dacă ea este formată din atomi identici, celula elementară având opt atomi situați în vârfurile paralelipipedului. Rețeaua compusă este formată din mai multe rețele simple suprapuse într-un mod specific. Figura de difracție a razelor X pe rețeaua compusă apare astfel ca rezultat al însumării figurilor de difracție datorate rețelelor simple constitutive. De aceea, în cele ce urmează, ne vom ocupa numai de cazul difracției razelor X pe rețele simple.

Fie $\vec{k}_i(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ vectorul de propagare al unei plane ce vine pe o rețea cristalină simplă, cu axele Ox, Oy, Oz luate de-a lungul vectorilor $\vec{d}_1, \vec{d}_2, \vec{d}_3$. Unghiurile $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ se măsoară față de axele Ox, Oy , respectiv Oz și, în cazul unei rețele rectangulare, satisfac relația cosinuzilor directori $\cos^2\alpha_0 + \cos^2\beta_0 + \cos^2\gamma_0 = 1$. Condiția maximelor principale de interferență a undelor secundare coerente, generate de atomii rețelei, este dată în acest caz, de trei relații de forma (2.371), denumite și *condițiile lui Laue*

$$\begin{cases} d_1(\cos\alpha - \cos\alpha_0) = n_1\lambda, \\ d_2(\cos\beta - \cos\beta_0) = n_2\lambda, \\ d_3(\cos\gamma - \cos\gamma_0) = n_3\lambda, \end{cases} \quad (n_{1,2,3} = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (2.377)$$

Aici unghiurile α, β, γ , măsurate față de Ox, Oy și respectiv Oz , sunt unghiurile vectorului \vec{k}_d al undelor difractate și satisfac, în cazul unui sistem cartezian de axe, relația cosinuzilor directori $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Explicitând $\cos\alpha, \cos\beta$ și $\cos\gamma$ din relațiile (2.377), ridicând la pătrat ecuațiile astfel obținute și ținând cont de relațiile cosinuzilor directori, obținem

$$\lambda = -2 \frac{\frac{n_1}{d_1} \cos\alpha_0 + \frac{n_2}{d_2} \cos\beta_0 + \frac{n_3}{d_3} \cos\gamma_0}{\left(\frac{n_1}{d_1}\right)^2 + \left(\frac{n_2}{d_2}\right)^2 + \left(\frac{n_3}{d_3}\right)^2} \equiv \lambda^* \quad (2.378)$$

Cu $d_i, i = \overline{1,3}$ dați, la o direcție de incidență dată ($\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ - cunoscuți), un ansamblu de trei numere întregi (n_1, n_2, n_3) ne determină lungimea de undă λ^* pentru care se produce maximul de ordinul (n_1, n_2, n_3). Direcția ($\alpha^*, \beta^*, \gamma^*$) în care se formează respectivul maxim se determină apoi din relațiile (2.377), în care λ se înlocuiește cu λ^* . Rezultă, deci, că dacă o anumită lungime de undă dă un maxim, ea dă un singur maxim, într-o direcție bine determinată.

Totuși, în unele cazuri particulare, această ultimă afirmație trebuie relaxată, în sensul că, la o singură lungime de undă, pot să corespundă mai multe maxime, în direcții diferite. De pildă, dacă $\alpha_0 = 0, \beta_0 = \gamma_0 = \pi/2$ (fascicul incident în sensul pozitiv al axei Ox) avem $\cos\alpha_0 = 1, \cos\beta_0 = \cos\gamma_0 = 0$ și din relația (2.378) obținem

$$\lambda = -2 \frac{\frac{n_1}{d_1}}{\left(\frac{n_1}{d_1}\right)^2 + \left(\frac{n_2}{d_2}\right)^2 + \left(\frac{n_3}{d_3}\right)^2} \equiv \lambda^* . \quad (2.378')$$

Pe lângă tripletul (n_1, n_2, n_3) , din relația (2.378') obținem aceeași lungime de undă λ^* și pentru tripletele $(n_1, -n_2, n_3)$, $(n_1, n_2, -n_3)$, $(n_1, -n_2, -n_3)$. Așadar, în total există acum patru triplete distincte de numere întregi care determină aceeași lungime de undă și, prin relațiile (2.377), fiecărui triplet îi corespund unghiuri (α, β, γ) diferite pentru direcțiile maximelor principale respective. Prin urmare, lungimii de undă λ^* îi corespund acum patru maxime diferite.

Din punct de vedere practic este extrem de dificil să alegem lungimea de undă incidentă în așa fel încât să fie îndeplinită exact relația (2.378). De aceea, așa cum au lucrat Laue și colaboratorii săi, pentru observarea difracției într-o rețea tridimensională este mai comod să se utilizeze un spectru larg (nemonocromatic) de lungimi de undă. În spectrul larg (policromatic) de radiații există unde cu diferite lungimi de undă și, deci, între ele se vor găsi cu siguranță și lungimi de undă care vor satisface egalitatea (2.378) - pentru diferite valori întregi ale numerelor (n_1, n_2, n_3) . Fiecărei lungimi de undă λ_i^* de acest fel îi corespund, conform relațiilor lui Laue, valori determinate ale unghiurilor $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$, adică îi corespunde o direcție anumită în care se formează maximul (de "culoarea" λ_i^*). În acest fel, în planul focal (placă fotosensibilă) al lentilei care strânge fasciculele difractate, (nu este vorba neapărat de cazul razelor X!) se vor pune în evidență, în general vorbind, o serie de pete dispuse simetric, fiecare dintre ele corespunzând unei anumite lungimi de undă λ_i^* .

Nu vom continua studiul nostru înainte de a atrage atenția asupra necesității îndeplinirii unor condiții suplimentare pentru a putea evidenția fenomenele menționate, adică maximele de difracție. În cazul unei rețele unidimensionale, din relația (2.371) rezultă necesitatea îndeplinirii condiției $\lambda < 2d$ (se are în vedere faptul că diferența celor doi cosinusi nu poate depăși valoarea 2). Pe de altă parte, dacă constanta d a rețelei este cu mult mai mare decât lungimea de undă λ , vor apare maxime de ordine m foarte mari, la care figura de difracție este ștearsă (din cauza modulării introduse de factorul de difracție f_d). Condiții analoge trebuie să fie satisfăcute și în cazul difracției pe rețele bi și tridimensionale. Referindu-ne la rețelele spațiale, din relațiile lui Laue rezultă cu necesitate $\lambda < 2d_{\text{inf}}$, unde d_{inf} este cea mai mică dintre constantele de periodicitate d_1, d_2, d_3 . În același timp, pentru ca maximele să poată fi puse ușor în evidență pe placa fotosensibilă, este necesar ca d_{inf} să nu fie prea mare față de λ , adică doar de ordinul a câtorva lungimi de undă.

O situație oarecum similară difracției razelor X pe cristale (rețele tridimensionale) întâlnim la difracția luminii albe (ce vine de la Soare sau Lună) printr-o ceață nu prea deasă. Deși picăturile de ceață (analoage atomilor din rețelele cristaline) sunt distribuite *dezordonat*, distanțele dintre ele nu diferă, în general, prea mult unele de altele. Datorită acestui fapt, la trecerea luminii albe printr-o ceață mai puțin compactă, în jurul sursei luminoase (Soare, Lună) apar inele de difracție, cu roșu la exterior și violet la interior

* Având în vedere cele expuse în legătură cu relația (2.378'), există și posibilitatea ca mai multe pete să corespundă unei aceleiași lungimi de undă λ_i^* .

(unghiurile de difracție sunt mai mari pentru lungimile de undă mai mari). Aceste inele sunt, într-un anumit fel, analoge dispunerii simetrice a petelor de difracție de pe placa fotografică în experiența Friedrich-Knipping.

Condiții artificiale, care corespund unei rețele spațiale regulate, pot fi realizate și într-un alt mod, de exemplu cu ajutorul undelor ultrasonore staționare, într-un mediu transparent, lichid sau solid. În nodurile unei staționare longitudinale se formează maxime de densitate a mediului, care împrăștie lumina incidentă. Ca ordin de mărime, distanțele dintre nodurile unei ultrasonore staționare sunt de 10^{-4} cm, în timp ce $\lambda_{\text{vizibil}} \cong (0,4 - 0,7) \cdot 10^{-4}$ cm. Să ne imaginăm că într-un vas cu lichid se produc trei unde ultrasonore care se propagă după direcții perpendiculare între ele; reflectându-se pe pereții vasului ele vor da naștere unui sistem de unde staționare, ale căror noduri se vor dispune în formă de rețea spațială regulată. Difracția luminii vizibile pe o astfel de rețea este analogă difracției razelor X pe rețele cristaline. Lucrând în lumină monocromatică cu λ_e cunoscut, din observarea difracției putem determina constanta rețelei de difracție (distanța dintre nodurile unei staționare), care este egală cu jumătate din lungimea de undă a unei ultrasonore ($d = \frac{1}{2}\lambda_{\text{us}}$). Cunoscând frecvența generatorului ultrasonor (ν_{us}) aflăm astfel imediat viteza de propagare a unei ultrasonore în lichidul considerat ($\nu_{\text{us}} = \nu_{\text{us}} \cdot \lambda_{\text{us}} = 2d\nu_{\text{us}}$).

Mai precizăm că, în prezent, principiul schițat aici se utilizează cu deosebit succes în prelucrarea optoacustică a informației, adică în filtrajul spațial, în vizualizarea optoacustică a obiectelor de fază, la construirea transparentelor amplitudo-fazice, a corelatoarelor, la analizarea spectrelor radiosemnalelor, etc.

În cele ce urmează, vom trece la tratarea difracției razelor X pe cristale prin metoda preconizată de fizicienii W. H. Bragg (tatăl) și W. L. Bragg (fiul) - premiul Nobel în 1915, respectiv de cristalograful G.V. Wulf. Pentru aceasta, pe lângă vectorii $\vec{d}_1, \vec{d}_2, \vec{d}_3$ care definesc celula elementară a cristalului (sau *rețeaua directă*) vom mai introduce și așa-numiții *vectori de bază ai rețelei reciproce*

$$\vec{d}_1^* = \frac{1}{V}(\vec{d}_2 \times \vec{d}_3), \quad \vec{d}_2^* = \frac{1}{V}(\vec{d}_3 \times \vec{d}_1), \quad \vec{d}_3^* = \frac{1}{V}(\vec{d}_1 \times \vec{d}_2), \quad (2.379)$$

unde $V \equiv \vec{d}_1 \cdot (\vec{d}_2 \times \vec{d}_3)$ este volumul spațial al celulei elementare a rețelei directe. Evident, volumul celulei elementare a rețelei reciproce este $V^* = \vec{d}_1^* \cdot (\vec{d}_2^* \times \vec{d}_3^*)$. Deoarece

$$\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_1^* = \vec{d}_2 \cdot \vec{d}_2^* = \vec{d}_3 \cdot \vec{d}_3^* = 1 \quad (2.380)$$

și

$$\vec{d}_1^* \cdot \vec{d}_2 = \vec{d}_1^* \cdot \vec{d}_3 = \vec{d}_2^* \cdot \vec{d}_1 = \vec{d}_2^* \cdot \vec{d}_3 = \vec{d}_3^* \cdot \vec{d}_1 = \vec{d}_3^* \cdot \vec{d}_2 = 0, \quad (2.381)$$

se obține imediat $V^* = 1/V$ (dacă V se măsoară în m^3 , V^* se măsoară în $1/\text{m}^3$). Rețeaua reciprocă, în ansamblul său, se obține prin repetarea translațională, din aproape în aproape, a celulei elementare definită de vectorii $\vec{d}_1^*, \vec{d}_2^*, \vec{d}_3^*$ (vectorii \vec{d}_i , $i = \overline{1,3}$ sunt *covarianți* iar

vectorii \vec{d}_i^* , $i = \overline{1,3}$ sunt *contravarianți*; relațiile (2.380), (2.381) se mai pot scrie și sub forma $\vec{d}_i \cdot \vec{d}_j^* = \delta_i^j$).

Dacă vectorul \vec{r} definit prin relația (2.376), cu n_1, n_2 și n_3 numere întregi, determină poziția oricărui nod al rețelei directe, vectorul

$$\vec{K} = h_1 \vec{d}_1^* + h_2 \vec{d}_2^* + h_3 \vec{d}_3^* \quad (2.382)$$

cu h_1, h_2, h_3 numere întregi, determină poziția oricărui nod al rețelei reciproce, în raport cu originea $h_1 = h_2 = h_3 = 0$.

Să mai introducem și noțiunea de *plane cristaline (reticulare sau nodale)* în rețeaua directă, respectiv noțiunea de *indici Miller* (mineralog și optician englez din secolul al 19-lea) pentru specificarea orientării lor în spațiu, fără ca aceasta să însemne în același timp și specificarea poziției lor concrete în spațiu. Orice plan care trece prin trei noduri necoliniare ale rețelei directe se numește plan cristalin reticular, sau nodal. Evident, într-un cristal cu extindere spațială (tridimensională) infinită, există o infinitate de plane cristaline, echidistante, paralele cu un plan cristalin dat. Ansamblul acestora formează o *familie de plane cristaline* (sau de *plane Bragg* - cum se mai numesc uneori). Fiecare trei noduri necoliniare determină o altă familie de plane Bragg. Prin urmare, într-un cristal infinit ca extindere spațială există o infinitate de familii de plane cristaline, în fiecare familie fiind conținută o infinitate de plane.

Pentru specificarea orientării (numai a orientării) în spațiu a planelor dintr-o anumită familie, în anul 1839, Miller a propus următorul procedeu: 1) se alege un plan care trece prin trei noduri necoliniare (uneori, planul cel mai apropiat de originea O a sistemului de axe, cu O situat într-un nod, dar aceasta nu este obligatoriu) și se exprimă tăieturile respective (vezi fig.2.86) prin numere întregi, împărțind distanțele OA_1, OA_2, OA_3 , la d_1, d_2 și respectiv d_3 ; fie aceste numere (N_1, N_2, N_3) ; 2) se iau inversele acestor numere, adică tripletul $(1/N_1, 1/N_2, 1/N_3)$ și se scrie sub forma $(h/M, k/M, l/M)$, unde M este cel mai mic multiplu comun întreg al numerelor N_1, N_2 și N_3 ; 3)

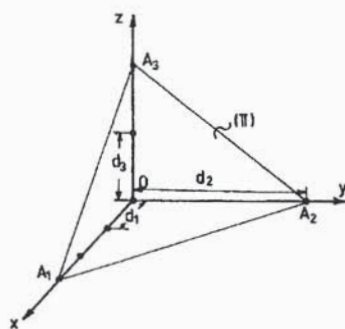


Fig.2.86. Plan "nodal" într-o rețea tridimensională.

tripletul de la numărătorii fracțiilor, adică (h, k, l) poartă denumirea de *indicii Miller* ai familiei considerate de plane cristaline. În exemplul dat în fig.2.86 avem $N_1 = 3, N_2 = 1, N_3 = 2$, al căror cel mai mic multiplu comun este $M = 6$. Tripletul invers $(1/3, 1/1, 1/2)$ se mai poate scrie ca $(2/6, 6/6, 3/6)$ de unde rezultă indicii Miller $(2, 6, 3)$ pentru familia considerată. Notăția (h, k, l) pentru indicii Miller este o notație clasică, consacrată*. Precizăm că, dacă o tăietură a axei este la infinit (planul este paralel cu axa respectivă), indicele Miller corespunzător este egal cu zero. De aceea, planele paralele cu planul xOy au indicii Miller $(0, 0, 1)$, cele paralele cu planul xOz au indicii Miller $(0, 1, 0)$,

* Cititorul nu trebuie să confunde indicele Miller k , cu modulul $|\vec{k}| = k$ al vectorului de propagare al unei unde.

iar cele paralele cu planul yOz au indicii Miller $(1, 0, 0)$. În fig.2.87 se prezintă (în secțiune) câteva familii de plane paralele cu axa Oz și indicii Miller corespunzători.

Pentru a evidenția importanța celor două noțiuni introduse mai sus (rețea reciprocă și indici Miller), vom demonstra acum următoarele teoreme:
Teorema 1. Orice vector al rețelei reciproce este perpendicular pe o familie de plane cristaline aparținând rețelei directe.

Demonstrație: Fie $\vec{d}_1, \vec{d}_2, \vec{d}_3$ vectorii celulei

elementare a rețelei directe și (h, k, ℓ) indicii Miller ai unei familii de plane cristaline din această rețea. În fig.2.88 este reprezentat unul din planele acestei familii, care taie axele de coordonate la distanțele $N_1 d_1, N_2 d_2$ și respectiv $N_3 d_3$ față de origine. Acest plan, notat prin (π) , este definit în mod univoc de vectorii $\vec{A}_1 A_2, \vec{A}_2 A_3$ și $\vec{A}_3 A_1$ care se pot scrie sub forma

$$\vec{A}_1 A_2 = N_2 \vec{d}_2 - N_1 \vec{d}_1, \vec{A}_2 A_3 = N_3 \vec{d}_3 - N_2 \vec{d}_2, \vec{A}_3 A_1 = N_1 \vec{d}_1 - N_3 \vec{d}_3 \quad (2.383)$$

A demonstra teorema enunțată înseamnă a arăta că vectorul $\vec{K}_{h,k,\ell} = h\vec{d}_1^* + k\vec{d}_2^* + \ell\vec{d}_3^*$ (al rețelei reciproce) în care (h, k, ℓ) sunt indicii Miller ai familiei de plane căreia îi aparține planul (π) , este perpendicular pe vectorii $\vec{A}_1 A_2, \vec{A}_2 A_3$ și $\vec{A}_3 A_1$.

Să calculăm produsul scalar

$$\vec{A}_1 A_2 \cdot \vec{K}_{h,k,\ell} = (N_2 \vec{d}_2 - N_1 \vec{d}_1) \cdot (h\vec{d}_1^* + k\vec{d}_2^* + \ell\vec{d}_3^*)$$

utilizând relațiile (2.380), (2.381). Obținem imediat

$$\vec{A}_1 A_2 \cdot \vec{K}_{h,k,\ell} = kN_2 - hN_1 \quad (2.384)$$

Având în vedere că $N_2 = M/k$ și $N_1 = M/h$, unde M este cel mai mic multiplu comun al numerelor (N_1, N_2, N_3) , rezultă imediat că produsul scalar de mai sus este egal cu zero. În

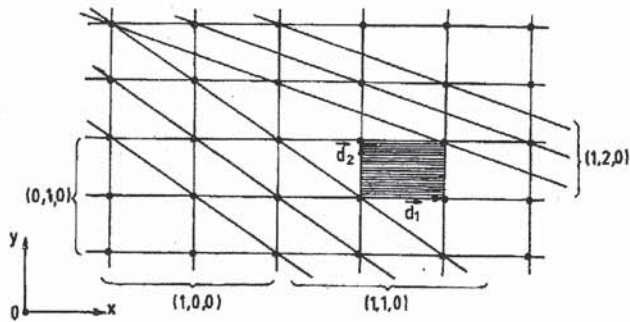


Fig.2.87. Câteva familii de plane cristaline (Bragg) într-o rețea rectangulară și indicii Miller corespunzători.

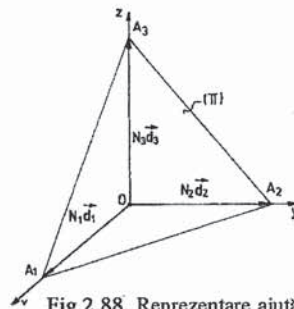


Fig.2.88. Reprezentare ajutătoare - pentru demonstrarea teoremei 1.

mod analog, se demonstrează că și celelalte produse scalare sunt egale cu zero, ceea ce înseamnă

$$\vec{K}_{h,k,\ell} \perp (\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_2A_3}, \overrightarrow{A_3A_1}),$$

adică vectorul \vec{K} este perpendicular pe planul (π) și pe toate celelalte plane din aceeași familie. Cu aceasta, teorema enunțată este demonstrată.

Având în vedere legătura dintre numerele (N_1, N_2, N_3) și indicii Miller (h, k, ℓ) putem scrie vectorii $\overrightarrow{A_iA_j}$ din (2.383) sub forma

$$\overrightarrow{A_1A_2} = M \left(\frac{\vec{d}_2}{k} - \frac{\vec{d}_1}{h} \right), \quad \overrightarrow{A_2A_3} = M \left(\frac{\vec{d}_3}{\ell} - \frac{\vec{d}_2}{k} \right), \quad \overrightarrow{A_3A_1} = M \left(\frac{\vec{d}_1}{h} - \frac{\vec{d}_3}{\ell} \right), \quad (2.385)$$

unde, cum am mai spus, M este cel mai mic multiplu comun al numerelor N_1, N_2 și N_3 . Planul cel mai apropiat de origine din familia (h, k, ℓ) corespunde lui $M = 1$, următorul lui $M = 2$, ș.a.m.d.

Planul ce trece prin origine corespunde lui $M = 0$.

Teorema 2. Modulul vectorului $\vec{K}_{h,k,\ell} = h\vec{d}_1^* + k\vec{d}_2^* + \ell\vec{d}_3^*$, unde numerele h, k, ℓ sunt numere întregi care nu au un divizor comun întreg (cu excepția unității), este egal cu inversul distanței dintre două plane alăturate ale rețelei directe, din familia caracterizată de indicii Miller (h, k, ℓ) .

Demonstrație: În fig.2.89 s-a reprezentat planul (h, k, ℓ) corespunzând lui $M = 1$, adică planul cel mai apropiat de origine, și vectorul $\vec{K}_{h,k,\ell}$ perpendicular pe acest plan, conform teoremei 1.

Distanța $d \equiv d_{h,k,\ell}$ ($= |OI|$), de la origine la primul plan, este distanța pe care trebuie să o calculăm.

Dacă \vec{n} este versorul direcției $\vec{K}_{h,k,\ell}$, conform figurii putem scrie

$$d \equiv d_{h,k,\ell} = \frac{d_2}{k} \sin \beta = \frac{\vec{d}_2 \cdot \vec{n}}{k}.$$

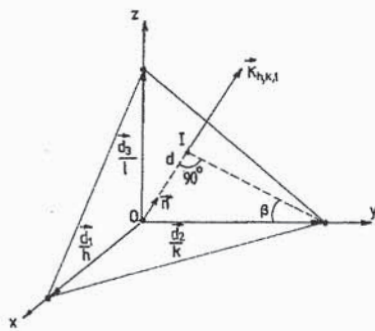


Fig.2.89. Reprezentare ajutătoare - pentru demonstrarea teoremei 2.

Deoarece $\vec{n} = \vec{K}_{h,k,\ell} / |\vec{K}_{h,k,\ell}|$, cu ajutorul proprietăților (2.380) și (2.381) rezultă

$$d_{h,k,\ell} = \frac{\vec{d}_2}{k} \cdot \frac{\vec{K}_{h,k,\ell}}{|\vec{K}_{h,k,\ell}|} = \frac{\vec{d}_2 \cdot (\vec{h}\vec{d}_1^* + \vec{k}\vec{d}_2^* + \vec{\ell}\vec{d}_3^*)}{k|\vec{K}_{h,k,\ell}|} = \frac{1}{|\vec{K}_{h,k,\ell}|}$$

Având în vedere că, în conformitate cu relația (2.382) și cu definițiile (2.379)

$$|\vec{K}_{h,k,\ell}| = \sqrt{(\vec{h}\vec{d}_1^*)^2 + (\vec{k}\vec{d}_2^*)^2 + (\vec{\ell}\vec{d}_3^*)^2} = \sqrt{\left(\frac{h}{d_1}\right)^2 + \left(\frac{k}{d_2}\right)^2 + \left(\frac{\ell}{d_3}\right)^2}$$

avem

$$d_{h,k,\ell} = \left[\left(\frac{h}{d_1}\right)^2 + \left(\frac{k}{d_2}\right)^2 + \left(\frac{\ell}{d_3}\right)^2 \right]^{-1/2} \quad (2.386)$$

Pentru a demonstra că aceasta este distanța dintre *oricare* două plane vecine din familia (h, k, ℓ) se poate proceda în felul următor: se repetă întregul raționament din demonstrația teoremei 2, pentru două plane vecine M și $M+1$, după care se face diferența $d_{M+1} - d_M$, obținându-se rezultatul (2.386). În acest fel, putem concluziona că toate planele familiei (h, k, ℓ) sunt *echidistante*, distanța dintre ele putându-se calcula ușor din cunoașterea constantelor de periodicitate ale rețelei directe și a indicilor Miller ai familiei.

Suntem datori cititorului o precizare: dacă definiția indicilor Miller este general-valabilă (atât pentru rețele rectangulare cât și pentru rețele oblice), formula (2.386) a distanței dintre plane a fost dedusă numai pentru cazul rețelelor rectangulare (ortorombice, tetragonale și cubice)*.

După această paranteză matematică, destul de lungă, dar absolut necesară, să revenim la problema difracției razelor X și a fasciculelor de microparticule pe cristale. Pentru aceasta, să ridicăm la pătrat condițiile maximelor principale (condițiile lui Laue), relațiile (2.377), și să ținem cont de proprietățile cosinurilor directori, atât pentru unda incidentă, și pentru unda difractată. Obținem

$$2 \left[1 - (\cos \alpha \cos \alpha_0 + \cos \beta \cos \beta_0 + \cos \gamma \cos \gamma_0) \right] = \lambda^2 \left[\left(\frac{n_1}{d_1}\right)^2 + \left(\frac{n_2}{d_2}\right)^2 + \left(\frac{n_3}{d_3}\right)^2 \right]$$

Fie $\vec{\tau}_i = \vec{k}_i/k$, $\vec{\tau}_d = \vec{k}_d/k$ versorii direcției de propagare ai undei incidente, respectiv ai celei difractate, caracterizați evident de componentele carteziene $(\cos \alpha_0, \cos \beta_0, \cos \gamma_0)$, respectiv $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$. Dacă notăm prin 2θ unghiul dintre cei doi vectori (vezi fig.2.90) putem scrie $\cos \alpha \cdot \cos \alpha_0 + \cos \beta \cdot \cos \beta_0 + \cos \gamma \cdot \cos \gamma_0 = \vec{\tau}_d \vec{\tau}_i = \cos(2\theta) = 1 - 2 \sin^2 \theta$ și relația anterioară devine

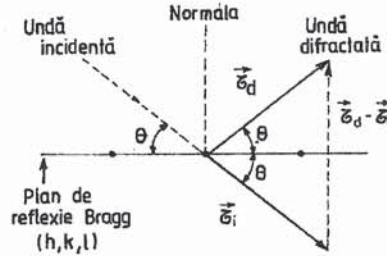


Fig.2.90. Reflexia unei unde incidente pe un plan cristalin (Bragg).

* Pentru detalii în legătură cu alte tipuri de rețele, recomandăm consultarea lucrării: Yu. G. Zagalskaia, G. Litvinskaia, *Geometriceskaia kristalografia*, Izd. Mosk. Univ., Moskva, 1973.

$$4 \sin^2 \theta = \lambda^2 \cdot \left[\left(\frac{n_1}{d_1} \right)^2 + \left(\frac{n_2}{d_2} \right)^2 + \left(\frac{n_3}{d_3} \right)^2 \right]. \quad (2.387)$$

Fie n cel mai mare divizor comun întreg al numerelor (n_1, n_2, n_3) și să introducem tripletul de numere întregi (h, k, ℓ) definit prin relațiile

$$h = \frac{n_1}{n}, \quad k = \frac{n_2}{n}, \quad \ell = \frac{n_3}{n}. \quad (2.388)$$

Obținem

$$4 \sin^2 \theta = \lambda^2 n^2 \left[\left(\frac{h}{d_1} \right)^2 + \left(\frac{k}{d_2} \right)^2 + \left(\frac{\ell}{d_3} \right)^2 \right] \equiv \frac{\lambda^2 n^2}{d^2},$$

unde mărimea d este definită prin relația (2.386) și reprezintă distanța dintre planele succesive ale familiei de plane cristaline (Bragg) specificate prin indicii Miller (h, k, ℓ) . Rezultă așa-numita *relație Wulf-Bragg*

$$2d \sin \theta = n\lambda, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.389)$$

absolut echivalentă condițiilor lui Laue pentru maximele principale de difracție. Această lege Wulf-Bragg corelează lungimea de undă λ și unghiul θ , în cazul unei anumite rețele cristaline (rectangulară), caracterizată prin constantele de periodicitate (d_1, d_2, d_3) pentru diferite plane cristaline, sau plane Bragg, (h, k, ℓ) posibile. Așa cum rezultă din fig.2.90, *difracția se produce ca o reflexie regulată (cu unghiul de reflexie egal cu unghiul de incidență) pe planele Bragg*.

Ce ne indică legea (2.389)? Ea arată că difracția razelor X pe cristale se produce în urma interferenței multiple a razelor X reflectate pe diversele plane Bragg din cristal, aparținând familiei (h, k, ℓ) . Într-adevăr, conform fig.2.91, diferența de drum a două unde reflectate pe plane *vecine* este $2d \sin \theta$, iar interferența ansamblului acestora este constructivă dacă respectiva diferență de drum este un multiplu întreg (n) de lungimi de undă (λ).

Referindu-ne la o anumită familie de

plane Bragg (h, k, ℓ) , observăm că unele incidente cad pe toate planele familiei, fiecare reflectând numai o mică fracțiune din energia incidentă (proporțională cu densitatea atomilor din acel plan), ca și cum ar fi vorba de o oglindă ușor reflectantă.

În general, conform legii Wulf-Bragg, unele cu λ arbitrar, incidente sub unghiuri θ arbitrare, nu se reflectă. O condiție *necesară* pentru producerea reflexiei Bragg rezultă din inegalitățile $\sin \theta \leq 1$ și $n \geq 1$; obținem $\lambda \leq 2d$, unde, pentru estimări, prin d putem înțelege cea mai mică valoare dintre constantele cristaline d_1, d_2, d_3 .

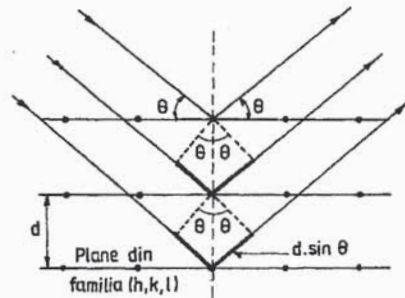


Fig.2.91. Difracția se produce ca o reflexie pe planele cristaline (Bragg) succesive.

În continuare, vom prezenta pe scurt esența a *trei metode experimentale* bazate pe difracția razelor X pe cristale, de importanță deosebită pentru dezvoltarea fizicii atomice și moleculare, respectiv a fizicii solidului, în secolul nostru, după anul 1912.

1. *Metoda Laue*. Este folosită în general pentru studiul monocristalelor. Un fascicul de raze X nemonocromatic (alb), îngust, delimitat cu ajutorul câtorva diafragme de plumb, cade asupra unui cristal subțire (plăcuță cu grosimea de 0,1 – 1 mm) și străbătându-l, ajunge la placa fotosensibilă P (vezi fig.2.92). După dezvoltare, pe placă (*lauegramă*) se observă

pata centrală, corespunzătoare direcției inițiale a razelor X, și o serie de alte pete, așezate regulat. Având în vedere cele discutate la rețelele atomice mono și bi-dimensionale, înțelegem ușor că aceste pete corespund maximelor de interferență a radiațiilor difractate și, regularitatea lor, corespunde simetriei rețelei cristaline, respectiv tipului de rețea. Dacă cristalul este cu celulă rectangulară și axele Ox, Oy ale celulei elementare sunt paralele cu

placa P, respectiv axa Oz este perpendiculară pe această placă, dispunerea petelor imagine se prezintă ca în fig.2.93. Ele sunt așezate la intersecția comună a două familii de hiperbole (intersecția conurilor de difracție având axele de simetrie Ox, Oy, cu planul plăcii fotografice) cu o familie de cercuri (intersecția conurilor de difracție având Oz ca axă de simetrie cu planul plăcii P). Și intersecțiile a câte două curbe (hiperbolă cu hiperbolă sau hiperbolă cu cerc) pot da naștere la pete (maxime de difracție bidimensională) pe placa P, însă mult mai slabe (uneori insesizabile).

Pentru reușita unei experiențe de tip Laue este necesar ca radiațiile X incidente să aibă un spectru continuu (alb) cât mai larg, astfel încât cele cu lungimea de undă convenabilă (vezi λ^* din (2.378)) să formeze "petele luminoase" din figura de difracție. Diferitele pete de pe lauegramă corespund, în general, la lungimi de undă diferite (nu ne referim la cele simetrice față de origine; în exemplul dat mai sus - vezi formula (2.378') acestea corespund aceleiași lungimi de undă). Metoda Laue, memorabilă mai ales din punct de vedere istoric, permite obținerea unor informații importante despre simetria internă a cristalului cercetat. Ea prezintă însă o mare deficiență: în general, din cauză că nu se poate face distincție între sens și contrasens, interpretarea lauegramei este dificilă; uneori simetria sa este superioară simetriei cristalului cercetat; metoda nu permite deosebirea claselor cristalografice cu sau fără centru de simetrie.

Suportul goniometric pe care este așezată plăcuța cristalină trebuie să permită orientarea sa sub diferite unghiuri față de fasciculul incident. La fiecare orientare *fixată* se face o expunere. Cristalul alege din spectrul larg de lungimi de undă incidente pe acelea

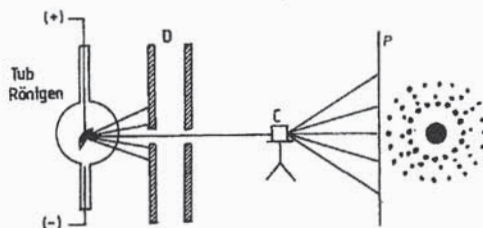


Fig.2.92. Producerea difracției razelor X prin metoda Laue (în partea dreaptă este arătată o lauegramă).

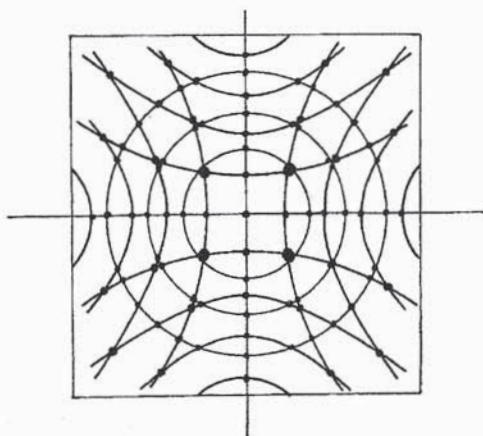


Fig.2.93. Formarea "nodurilor" de concentrare luminoasă pe o lauegramă.

care, la orientarea respectivă, satisfac simultan cele trei relații Laue, respectiv relația (2.378), cu (n_1, n_2, n_3) - numere întregi sau, echivalent, relația Wulf-Bragg. Modificarea distribuției petelor imagine de pe lauegramă în funcție de orientarea concretă a cristalului dă informații suplimentare despre orientarea vectorilor $(\vec{d}_1, \vec{d}_2, \vec{d}_3)$ ai celei elementare față de direcția fasciculului de raze X incident.

Revenind la dificultățile metodei observăm că, atunci când intervalul de lungimi de undă este larg, este posibil ca mai multe lungimi de undă λ_i^* să fie difractate - în diferite ordine - în același punct de pe lauegramă. În acest fel, înnegrirea locală este rezultatul (efectul) mai multor cauze și, în consecință, numai din informațiile culese de pe lauegramă, este dificil de determinat baza (celula) rețelei.

2. **Metoda Bragg (metoda cristalului rotitor).** Spre deosebire de metoda precedentă, în metoda Bragg se lucrează cu radiații X monocromatice, a căror lungime de undă, *cunoscută*, depinde numai de natura anticatodului (anodului) care le-a emis. Un astfel de fascicul, cât mai îngust, este îndreptat (printr-un sistem de diafragme și de filtre) spre un cristal așezat pe o măsută rotitoare (sau oscilantă) prevăzută cu posibilitatea măsurării unghiului, în interiorul unei camere de ionizare, cuplată cu un electrometru. În ansamblu, o astfel de instalație formează un *spectrograf de raze X*. La început, în locul camerei de ionizare cu electrometru, se folosea o cameră cilindrică, coaxială cu măsuta goniometrică a cristalului, pe peretele interior al căreia, de jur împrejur, era dispus filmul fotografic de sensibilitate corespunzătoare (vezi fig.2.94). Cristalul de studiat are fața reflectantă verticală, în prelungirea axului de rotație al goniometrului. Toate planele Bragg care sunt paralele cu axa verticală, reflectă razele X după o direcție orizontală și acestea intră în camera de ionizare (sau cad pe filmul fotografic). Când cristalul se rotește, camera de ionizare se rotește cu un unghi dublu. Ea este umplută cu un gaz greu (bromură de metil, argon, xenon sau kripton), ionizabil de către razele X reflectate, și se află la un potențial pozitiv de 300-400 V. Se începe rotirea cristalului de la o incidență razantă și se urmărește variația curentului detectat în funcție de unghiul θ (vezi fig.2.95). Maximele curbei $I(\theta)$ corespund condițiilor Bragg

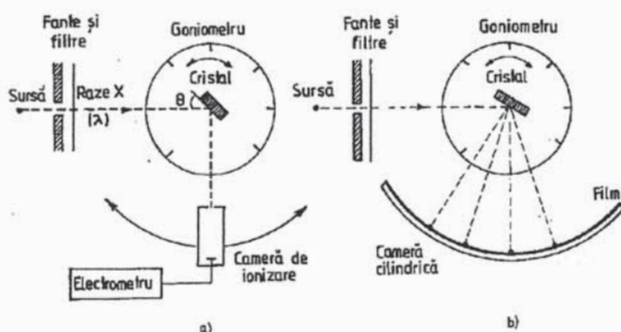


Fig.2.94. Producerea difracției razelor X prin metoda Bragg, a cristalului rotitor (montaj cu electrometru, în stânga, și cu înregistrare pe film, în dreapta).

$\sin \theta_n = n\lambda/2d$.

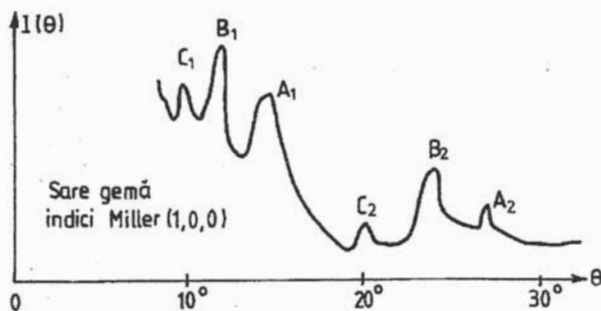


Fig.2.95. Dependența $I=I(\theta)$ la difracția razelor X pe planele (1,0,0) din sare gemă (NaCl).

Cunoscând lungimea de undă λ și determinând unghiurile θ_n ale maximelor (din curba $I(\theta)$ sau de pe film) se pot calcula distanțele $d_{h,k,\ell}$ dintre planele Bragg care au produs difracția (reflexia). Prin această metodă se pot calcula apoi constantele d_1, d_2, d_3 ale celei elementare a cristalului.

La început, în spectrografia de raze X, problema s-a pus invers: cunoscând distanțele dintre atomii cristalului, să se determine lungimea de undă a razelor X. În cazul cel mai simplu al cristalelor cubice de NaCl, considerând ionii de Na^+ și Cl^- ca mici sfere înscrise în cuburi de latură a , așezate compact unele lângă altele, din formula $2\text{Na}^3 = M/\rho$ (ρ = densitatea, M = masa molară, N = numărul lui Avogadro) cei doi Bragg au evaluat distanța dintre ioni ca fiind egală cu $a = 0,2814 \text{ nm}$. În acest fel, ei au reușit să determine, pentru linia $K\alpha_1$ emisă de anticatodul de cupru valoarea $\lambda = 0,15372 \text{ nm}$. Ulterior, cunoașterea exactă a lungimilor de undă, a permis utilizarea spectrografelor pentru investigarea structurilor spațiale din ce în ce mai complexe. Aceasta a dat un avânt fără precedent cercetărilor din fizica solidului, mineralogiei, chimiei și, în ultimul timp, chiar biologiei.

3. Metoda pulberilor. În primele două metode descrise mai sus nu se pot întrebuița decât cristale izolate, suficient de bine dezvoltate și cu orientarea cristalografică bine cunoscută, fapt care limitează mult posibilitățile de studiu. P. Debye și P. Scherrer (1916), respectiv A.N. Hull (1917), au imaginat o metodă foarte practică prin care cercetarea cu raze X a structurii a fost extinsă la toate substanțele cristalizate. În plus, în această metodă a fost evitată necesitatea rotirii probei de cercetat. Aceasta din urmă se prezintă sub formă de pulbere cristalină foarte fină, obținută prin măcinare, presată în interiorul unui mic cilindru, de colodiu sau de sticlă, cu diametrul de cel mult 1 mm. Alteori, pulberea cristalină se lipește pe o baghetă de sticlă extrem de subțire.

Înlocuind cristalul din experiența Laue-Friedrich-Knipping cu tubușorul cu pulbere și utilizând raze X *monocromatice*, Debye și Scherrer au obținut o figură de difracție formată dintr-o succesiune de cercuri concentrice de diferite intensități (și nu o distribuție discretă de pete). Explicația este cât se poate de simplă: datorită orientării haotice a monocristalelor din tubușor se vor găsi întotdeauna un număr suficient de cristale mici, dispuse sub un asemenea unghi față de direcția fascicului incident de raze X, încât să fie satisfăcută legea Wulf-Bragg. Razele X reflectate de totalitatea acestor cristale determină formarea unui cerc pe placa fotografică, iar ansamblul cercurilor de pe *debyegramă* corespund la diverse unghiuri, respectiv la diverse orientări (h, k, ℓ) a planelor Bragg din probă.

De regulă, filmul fotografic, sub formă de bandă, se așează, ca o căptușeală, în interiorul unei camere cilindrice coaxiale cu proba de cercetat, ca în fig.2.96, a și, după dezvoltare el are forma din fig.2.96, b.

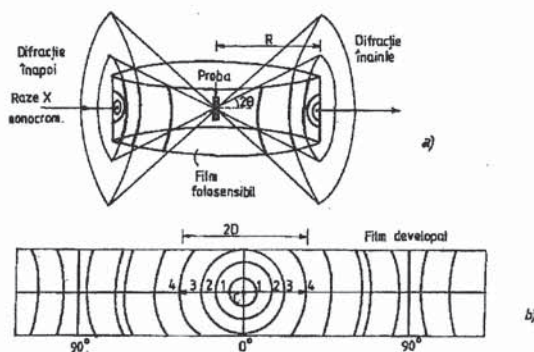


Fig.2.96. Producerea difracției razelor X prin metoda pulberilor (jos este arătată forma desfășurată a unei debyegramă).

Cum se procedează practic ? Se măsoară distanța $2D$ (vezi fig.2.97) între două linii simetrice de pe debyegramă și cunoscând raza R a camerei cilindrice se obține imediat valoarea unghiului θ

$$\theta^0 = \frac{90 \cdot D}{\pi R}. \quad (2.390)$$

Apoi din relația $2d \sin \theta = n\lambda$, obținem

$$d = \frac{n\lambda}{2 \sin \theta} \equiv d_{h,k,\ell} \quad (2.391)$$

cu $n = 4$ (vezi fig.2.96.b) în exemplul

dat, pentru familia de plane (h, k, ℓ) care a produs respectivul maxim de difracție.

La un cristal cubic, având celula elementară de latură a , putem scrie

$$\frac{a^2}{d_{h,k,\ell}^2} = h^2 + k^2 + \ell^2 \equiv N. \quad (2.392)$$

Prin urmare, cu $d_{h,k,\ell}$ cunoscut (prin determinarea unghiului θ), se caută acele valori ale lui a pentru care raportul $(a/d_{h,k,\ell})^2$ este un număr întreg N , nu foarte mare (din cauză că $\sin^2 \theta \leq 1$). Apoi, se determină, prin tatonări, combinațiile posibile (h, k, ℓ) care dau valoarea N prin suma pătratelor lor. Numărul N nu poate fi egal cu 7, 15, 23, ... deoarece aceste numere nu se pot obține ca o sumă de trei pătrate de numere întregi.

Evident, la alte tipuri de cristale, teoria nu mai este așa de simplă și, desigur, nici prelucrarea datelor furnizate de debyegrane. Pentru cititorii interesați, recomandăm lucrările [3, 6, 12, 18, 35, 39].

În încheierea acestui paragraf vom mai prezenta și unele aspecte referitoare la *difracția particulelor* pe rețele cristaline tridimensionale. După cum se știe (vezi și vol.II, optica fonică), undele electromagnetice se comportă uneori corpuscular, ca sisteme de fotoni, fiecare foton transportând energia $\varepsilon_f = h\nu$ și având impulsul $p_f = h/\lambda$; cantitatea de energie transportată în unitatea de timp, prin unitatea de suprafață, determinată ondulatoriu prin vectorul Poynting $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ ($\langle S \rangle = j/m^2 s$), se înlocuiește, într-o descriere corpuscular - fonică, prin produsul $\varepsilon_f \cdot N_f$, unde N_f este numărul de fotoni ce trec prin unitatea de suprafață în unitatea de timp ($\langle \varepsilon_f \cdot N_f \rangle = j/m^2 s$).

La fel, după cum a sugerat Louis de Broglie în 1924 (premiul Nobel în 1929), toate microparticulele (electroni, protoni, neutroni, nuclee, atomi, ioni, molecule) se manifestă, în mod direct, și printr-un comportament ondulatoriu. Conform ipotezei lui de Broglie, o microparticulă cu masa m și cu impulsul $p = mv$, are asociată o undă cu lungimea de undă $\lambda = h/p = h/mv$. Evidențierea acestei comportări ondulatorii, printr-un experiment de difracție cu fasciculul incident de microparticule, ar fi însemnat realizarea unei *mari unificări* în fizică, aceea a fizicii particulelor cu fizica undelor. După cum se știe, prezicerea lui de Broglie a fost genială căci, într-adevăr, experiențele au confirmat întru-totul ipotezele

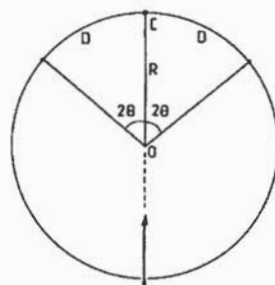


Fig.2.97. Secțiune transversală prin camera cilindrică în interiorul căreia se află depus, ca o căptușală, filmul fotosensibil.

teoretice. În acest fel, s-a fundamentat dualismul undă-corpusul și a apărut fizica cuantică modernă.

Experiențele de difracție a electronilor, efectuate în perioada anilor 1926-1930 (C. J. Davisson împreună cu L.N. Germer, G.P. Thomson*, M. Ponte, P.S. Tartakovski, Kikuchi, Szczeniowski, Rupp), sunt absolut analoage experimentelor de difracția razelor X pe cristale, efectuate de fizicienii menționați anterior, cu un deceniu (și ceva) mai devreme. Metodele prezentate mai sus, la studiul difracției razelor X, au fost adaptate pentru studiul difracției electronilor, deoarece, lungimile de undă de Broglie asociate au ordinul de mărime al lungimilor de undă pentru razele X. Într-adevăr, un electron accelerat la o diferență de potențial $U(> 0)$ are energia cinetică $p_e^2/2m_e = eU$, adică $p_e = \sqrt{2em_eU}$ și corespunzător $\lambda = h/p_e = h/\sqrt{2em_eU}$. Pentru $U = 100 \text{ V}$ obținem $\lambda_e = 0,123 \text{ nm}$, adică o valoare de ordinul spațiilor interatomice din cristale. În consecință, în loc să fie împrăștiați difuz de către atomii individuali ai cristalului, electronii trebuie să "se reflecte" pe planele cristalografice conform legii Wulf-Bragg, adică *exact* ca și undele electromagnetice X, de aceeași lungime de undă.

Prima evidențiere experimentală (întâmplătoare) a difracției electronilor pe cristale, conformă cu legea $2d \sin \theta = n\lambda$, λ fiind lungimea de undă asociată, a fost făcută, în anul 1925 de către Davisson. El a arătat atunci că, împrăștierea elastică a electronilor incidenți (direcție incidentă fixă) pe suprafețe metalice (cristale mari de Ni) prezintă maxime foarte pronunțate pentru anumite unghiuri de reflexie θ . Diagramele polare $I(\theta)$ se modificau semnificativ la modificarea unghiului de incidență și, pentru un unghi de incidență fix, ele se modificau la varierea tensiunii de accelerare U de la tunul electronic (adică la modificarea lui λ_e - de Broglie). Davisson a prezentat o parte din curbele obținute la *Congresul Asociației britanice pentru progresul științei*, ținut la Oxford, în anul 1926. M. Born, W. Elsasser și alți fizicieni renumiți, prezenți la Congres, și-au exprimat părerea că aceste diagrame polare pot fi interpretate cu ajutorul proprietăților ondulatorii ale electronilor incidenți, adică cu ajutorul ideilor lui de Broglie (dezvoltate între timp de E. Schrödinger). Revenit acasă, în S.U.A., Davisson a reluat experimentările într-o manieră nouă, comparând rezultatele proprii (obținute împreună cu Germer) cu cele ce corespundeau difracției razelor X. Pentru a-și da seama dacă electronii au sau nu proprietăți ondulatorii, Davisson și Germer au îndreptat asupra unui monocristal un fascicul de electroni, cu unghiul de incidență de 20° , au așezat colectorul sub același unghi față de normală, în cealaltă parte a acesteia, și au variat continuu tensiunea de accelerare U a electronilor incidenți (vezi fig.2.98). În conformitate cu relația de Broglie, lungimea de undă a electronilor variază după legea

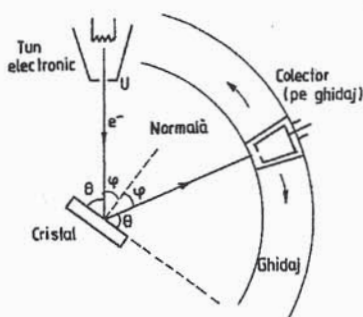


Fig.2.98. Instalația experimentală a lui Davisson și Germer (unghi de incidență fix, tensiune de accelerare variabilă).

$$\lambda_e = \frac{h}{p_e} = \frac{h}{\sqrt{2em_eU}} = \frac{12,25}{\sqrt{U}}, \quad (U \text{ în volți, } \lambda_e \text{ în } \text{Å}). \quad (2.393)$$

* Davisson și Thomson - premiul Nobel în anul 1937.

Reprezentând grafic intensitatea curentului detectat de colector în funcție de \sqrt{U} s-a obținut dependența din fig.2.99. Dacă electronii posedă într-adevăr proprietățile ondulatorii postulate de Louis de Broglie, atunci difracția lor trebuie să se producă în conformitate cu legea $2d \sin \theta = 2d \cos \varphi = n\lambda_e$, de unde pentru poziția maximelor, rezultă următoarele valori ale lui \sqrt{U} , anume

$$\sqrt{U} = \frac{nh}{2d\sqrt{2em_e} \cos \varphi} \equiv nC. \quad (2.394)$$

Distanța dintre două maxime succesive, corespunzând la $\Delta n = 1$, ar trebui să fie constantă, egală cu $C = h/2d\sqrt{2em_e} \cos \varphi$. Experimental s-a constatat că maximele sunt poziționate în concordanță aproape perfectă cu formula (2.394), pentru valori n mari ($n = 8, 7, 6$) dar apar abateri supărătoare când n devine din ce în ce mai mic.

În orice caz, dovada că, în acest experiment, electronii se comportă ondulatoriu era furnizată. Trebuia elucidat doar motivul pentru care maximele, pentru unele valori mai mici ale lui n , prezintă abateri în același sens (ele apar la valori ceva mai mici ale lui \sqrt{U} decât cele prezise teoretic de relația (2.394)). S-a ajuns repede la concluzia că factorul neglijat în analiza teoretică a fenomenului era indicele de refracție în interiorul probelor, care, nefiind egal cu unitatea, modifică într-o oarecare măsură lungimea de undă de Broglie în interior.

Într-adevăr, impulsul electronilor în interiorul cristalului este determinat nu numai de diferența de potențial U din exterior, ci și de către un câmp electric puternic, suplimentar, care îi accelerează în interior (atomii metalului, pierzând o parte din electronii pe care îi au se transformă în ioni pozitivi). În interior impulsul electronic poate fi scris sub forma $pe = \sqrt{2em_e(U + U_{\text{supl}})}$ și lungimea de undă asociată este $\lambda_e = h/\sqrt{2em_e(U + U_{\text{supl}})}$. În consecință, în locul relației (2.394) trebuie să considerăm

$$\sqrt{U} = \frac{nh}{2d\sqrt{2em_e} \cos \varphi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+U_{\text{supl}}/U}} = n \frac{C}{\sqrt{1+U_{\text{supl}}/U}}, \quad (2.394')$$

adică valori ceva mai mici decât cele prezise anterior. Corecția introdusă de factorul $(1 + U_{\text{supl}}/U)^{-1/2}$ este importantă mai ales la valori mici ale lui n , căci din relația $\sqrt{U + U_{\text{supl}}} = nC$ rezultă

$$\sqrt{U} = nC \sqrt{1 - \frac{U_{\text{supl}}}{n^2 C^2}} \quad (2.395)$$

și, pentru valori n mari, al doilea termen de sub radical este neglijabil. Din grafic, pentru valori n mici, se poate determina deplasarea $\sqrt{U_{n+1}} - \sqrt{U_n}$ și, cu ajutorul formulei anterioare, se determină tensiunea suplimentară, ce caracterizează câmpul intern. S-au

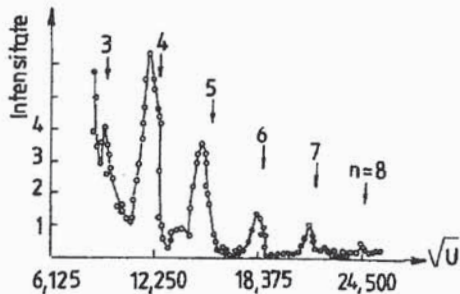


Fig.2.99. Intensitatea curentului detectat de colector în funcție de rădăcina pătrată a tensiunii de accelerare.

obținut valori de ordinul $U_{supl} \approx 10 - 15$ volți (valori mari față de potențialele de extracție ale metalelor respective, determinate prin studiul efectelor foto sau termoelectronice).

Deși prima dovadă incontestabilă a caracterului ondulatoriu a electronilor fusese făcută, Davisson și Germer au arătat că electronii suferă nu numai difracție Bragg ci și difracție Laue. În acest sens, au folosit monocristale de nichel (de tip cubic, cu fețe centrate), de dimensiuni convenabile, tăiate la unul din colțuri de-a lungul unui anumit plan, în așa fel încât el să conțină cel mai mare număr posibil de atomi de nichel (ca densitate superficială). Fasciculul de electroni era îndreptat de-a lungul unei direcții perpendiculare pe acest plan "dens" (vezi fig.2.100). Cristalul a fost montat pe un ax care se află în prelungirea

fasciculului incident de electroni iar colectorul se putea roti în planul figurii. Cristalul putea fi rotit astfel încât, față de planul figurii (care conține fasciculul incident și colectorul), planul tăieturii superioare să aibă poziții diferite. Aceasta înseamnă, până la urmă, o variație a fasciculului electronic față de cristal, respectiv față de planele sale reticulare. S-a constatat că, pentru anumite orientări privilegiate ale planelor reticulare ale cristalului în raport cu direcția de incidență (la

$U = \text{fix}$, deci $\lambda_e = \text{const}$) curentul detectat de colector avea valori maxime foarte pronunțate, diferite pentru diferitele poziții ale cristalului rotit. Acest rezultat poate fi explicat numai admitând un caracter ondulatoriu pentru fasciculul de electroni. Într-adevăr, dacă ținem cont că dimensiunile electronului sunt de ordinul a 10^{-15} m, în timp ce acelea ale atomilor de nichel, și ale distanțelor interatomice din cristal sunt de ordinul a 10^{-10} m, ar urma ca, într-un proces strict corpuscular de difuzie a unui electron să nu fie implicat decât un singur atom de nichel. Experiența arată însă că difuzia electronilor depinde esențial de orientarea planelor reticulare ale cristalului în raport cu fasciculul de electroni. Cum însă definirea unui plan reticular necesită cel puțin trei atomi, rezultă că în procesul de difuzie al fiecărui electron sunt implicați cel puțin trei atomi. Acest fapt este greu de acceptat în reprezentarea strict corpusculară; în schimb, el este foarte ușor de înțeles dacă fiecărui electron i se asociază un *pachet de unde* suficient de extins.

Un alt experiment de difracție a electronilor a fost realizat în anul 1927 de către G. P. Thomson, de la Universitatea din Aberdeen (Scoția), pe o instalație pusă la punct de A. Reid*. Spre deosebire de Davisson și Germer care lucrau cu tensiuni de accelerare de ordinul sutelor de volți, adică cu electroni lenți, G. P. Thomson a lucrat cu tensiuni de accelerare foarte mari (între 17,5 kV și 56,5 kV), deci cu electroni rapizi. Schema instalației utilizate este redată în fig.2.101. În interiorul tubului de sticlă se face vid de ordinul a $10^{-4} - 10^{-5}$ torr.

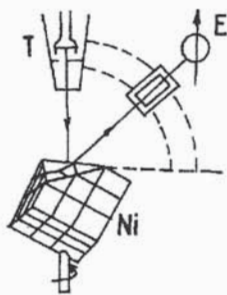


Fig.2.100. Schema celui de-al doilea experiment Davisson-Germer (cu cristal de Ni rotitor și U fixat).

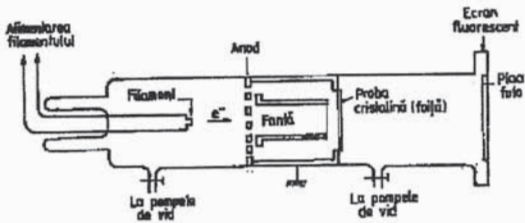


Fig.2.101. Dispozitivul experimental al lui G.P. Thomson.

* Student al Universității, decedat la numai 22 ani, într-un accident de automobil.

Electronii emiși de filament sunt accelerați în prima parte a instalației, trec printr-un filtru ce selecționează numai electroni de energie bine determinată, și cad pe proba de studiat, sub formă de strat subțire cu grosimee ordinul a 10 nm. Pe placa fotografică de la capătul opus filamentului apar inele "luminoase" alternând cu inele întunecate. Pentru a se convinge că figura de difracție era produsă de electroni, Thomson a deviat în lateral, cu ajutorul unui magnet permanent, fasciculul de electroni. Așa cum se aștepta, cercurile concentrice se deplasau toate în același sens.

În experiența Thomson, difracția electronilor se petrece ca și difracția razelor X în metoda pulberilor, căci, foița metalică, fiind policristalină, este formată dintr-un număr mare de microcristale, așezate la întâmplare. De aceea, pentru lungimea de undă λ_e , există numeroase microcristale orientate în așa fel încât să fie satisfăcută relația $2d \sin \theta = n\lambda_e$ sau aproximativ $2d \theta \approx n\lambda_e$. Dacă distanța de la foița metalică la placa foto este s , unghiul de difracție 2θ și raza r a unui anumit inel de maxim satisfac relația $tg 2\theta = r/s$ sau aproximativ $2\theta \approx r/s \approx n\lambda_e/d$.

Utilizând relația $\lambda_e = h/p_e$, unde p_e *trebuie calculat relativist*, în cele din urmă obținem (vezi relația (2.209))

$$\lambda_e = \frac{12,25}{\sqrt{U}} (1 - 0,489 \cdot 10^{-6} U), \quad (U = \text{volți}, \quad \lambda_e = \text{\AA}). \quad (2.209')$$

Ecuatia

$$2\theta = \frac{r}{s} = \frac{n\lambda_e}{d}, \quad \text{scrisă sub forma} \quad \frac{r}{\lambda_e} = \frac{ns}{d}, \quad (2.396)$$

ne arată că, la modificarea lungimii de undă λ_e (prin schimbarea tensiunii de accelerare), raza inelului de difracție corespunzător aceluiași ordin (număr) n trebuie să aibă o asemenea valoare încât raportul r/λ_e să rămână constant. Datele experimentale au verificat foarte bine această concluzie, rezultată din relația de Broglie. Mai mult, din relația (2.396) se poate calcula distanța d dintre planele atomice ale microcristalelor care produc reflexia selectivă. Pentru aluminiu, Thomson a obținut $d = 0,0403$ nm în timp ce din măsurători făcute cu ajutorul razelor X se găsea $d = 0,0405$ nm.

Experiența de difracție a electronilor efectuată, cam în aceeași perioadă (1928), de către Rupp nu folosește rețele naturale, cristaline, ci rețele artificiale, asemănătoare celor ce se utilizează în lumină vizibilă. Cu o rețea având 1300 trăsături pe milimetru, la incidență razantă de electroni (unghiul fasciculului față de rețea sub 5°), pe o placă fotografică așezată la 0,5 m față de rețea, Rupp a reușit să pună în evidență maxime de difracție până la ordinul ± 3 . Explicația reușitei experienței este dată prin formula (2.261), luată la incidență razantă.

În anul 1929, O. Stern și I. Estermann au reușit să pună în evidență, prin aceeași metodă a incidenței razante, difracția pe rețele cristaline de fluorură de litiu, a fasciculelor atomice de heliu și moleculare de hidrogen, neutre din punct de vedere electric (maxime de ordinul 0 și ± 1). Lungimea de undă de Broglie pentru atomii și moleculele fasciculului s-a calculat prin considerente cinetice (statistice), cu *viteza cea mai probabilă* $v_p = \sqrt{2kT/m}$, unde k este constanta Boltzmann, egală cu R/N_A . De aici $\lambda = h/mv_p = h/\sqrt{2mkT} = hN_A/\sqrt{2MRT}$, unde M este masa molară, R este constanta gazelor iar N_A - numărul lui Avogadro. Considerând $T = 300$ K, pentru heliu se obține $\lambda = 0,09$ nm, iar pentru hidrogen - $\lambda \approx 0,13$ nm, adică valori din domeniul lungimilor de undă al razelor X.

Difracția fasciculelor atomice și moleculare se deosebește totuși de cea a razelor X și electronilor prin aceea că interacția cu rețeaua are loc numai la nivelul planului cristalin exterior, adică la nivelul unei rețele bidimensionale (fasciculele nu pătrund în adâncimea cristalului).

După anul 1930, prin experiențe de difracție, au fost puse în evidență și proprietățile ondulatorii ale neutronilor, protonilor sau altor microparticule. În cazul neutronilor ($m_n \approx 2000m_e$), conform relației lui de Broglie, pentru a avea o lungime de undă de circa 0,1 nm, energia trebuie să fie de ordinul a 0,1 eV (neutroni lenți sau termici). Un astfel de fascicul cu $10^5 - 10^6$ neutroni/minut, cade pe o probă sub formă de pulbere iar "radiația" difractată este detectată cu un contor de neutroni. Neutronii interacționează cu nucleele din cristal astfel că informația culeasă prin studiul difracției lor poate completa foarte bine informația dată de difracția de raze X. De exemplu, când se studiază cristale feromagnetice sau antiferomagnetice, difracția de neutroni furnizează informații asupra orientării spinilor sau a compoziției izotopice. Din studiul împrăștierei inelastice a neutronilor termici (care au energii comparabile cu fononii - cuantele vibrațiilor termice ale rețelei) se pot obține informații precise referitoare la spectrul de vibrație al rețelelor. Primele experiențe de difracția neutronilor au fost realizate în 1936 de către D.P.Mitchell și P.N.Powers. Mai târziu, în 1948, ele au fost reluate de E.O.Wollan și C.G. Schull.

Deși efectuate mult mai târziu, experiențele de interferență cu electroni (G. Möllenstedt și H. Düker - 1955, Foget și Fert - 1956, Chambers - în 1960) au avut rolul de a ne completa imaginea ondulatorie despre microparticule. Nu intrăm în detaliile acestor experiențe, realizate cu multă abilitate practică, după ce au fost depășite multe greutăți; ne mulțumim să precizăm doar că principiul lor a urmat linia generală a interferenței luminii cu biprisma lui Fresnel (vezi vol.II).

ANEXE

1. INTEGRALELE LUI FRESNEL

w	C(w)	S(w)	w	C(w)	S(w)
0,00	0,0000	0,0000	2,90	0,5624	0,4101
0,10	0,1000	0,0005	3,00	0,6058	0,4963
0,20	0,1999	0,0042	3,10	0,5616	0,5818
0,30	0,2994	0,0141	3,20	0,4664	0,5933
0,40	0,3975	0,0334	3,30	0,4058	0,5192
0,50	0,4923	0,0647	3,40	0,4385	0,4296
0,60	0,5811	0,1105	3,50	0,5326	0,4152
0,70	0,6597	0,1721	3,60	0,5880	0,4923
0,80	0,7230	0,2493	3,70	0,5420	0,5750
0,90	0,7648	0,3398	3,80	0,4481	0,5656
1,00	0,7799	0,4383	3,90	0,4223	0,4752
1,10	0,7638	0,5365	4,00	0,4984	0,4204
1,20	0,7154	0,6234	4,10	0,5738	0,4758
1,30	0,6386	0,6863	4,20	0,5418	0,5633
1,40	0,5431	0,7135	4,30	0,4494	0,5540
1,50	0,4453	0,6975	4,40	0,4383	0,4622
1,60	0,3655	0,6389	4,50	0,5261	0,4342
1,70	0,3238	0,5492	4,60	0,5673	0,5162
1,80	0,3336	0,4508	4,70	0,4914	0,5672
1,90	0,3944	0,3734	4,80	0,4338	0,4968
2,00	0,4882	0,3434	4,90	0,5002	0,4350
2,10	0,5815	0,3743	5,00	0,5637	0,4992
2,20	0,6363	0,4557	5,05	0,5450	0,5442
2,30	0,6266	0,5531	5,10	0,4998	0,5624
2,40	0,5550	0,6197	5,15	0,4553	0,5427
2,50	0,4574	0,6192	5,20	0,4389	0,4969
2,60	0,3890	0,5500	5,25	0,4610	0,4536
2,70	0,3925	0,4529	5,30	0,5078	0,4405
2,80	0,4675	0,3915	5,35	0,5490	0,4662

w	C(w)	S(w)	w	C(w)	S(w)
5,40	0,5573	0,5140	6,20	0,4676	0,5398
5,45	0,5269	0,5519	6,25	0,4493	0,4954
5,50	0,4784	0,5537	6,30	0,4760	0,4555
5,55	0,4456	0,5181	6,35	0,5240	0,4560
5,60	0,4517	0,4700	6,40	0,5496	0,4965
5,65	0,4926	0,4441	6,45	0,5292	0,5398
5,70	0,5385	0,4595	6,50	0,4816	0,5454
5,75	0,5551	0,5049	6,55	0,4520	0,5078
5,80	0,5298	0,5461	6,60	0,4690	0,4631
5,85	0,4819	0,5513	6,65	0,5161	0,4549
5,90	0,4486	0,5163	6,70	0,5467	0,4915
5,95	0,4566	0,4688	6,75	0,5302	0,5362
6,00	0,4995	0,4470	6,80	0,4831	0,5436
6,05	0,5424	0,4689	6,85	0,4539	0,5060
6,10	0,5495	0,5165	6,90	0,4732	0,4624
6,15	0,5146	0,5496	6,95	0,5207	0,4591

2. VALORILE FUNCȚIEI $(\sin x)/x \equiv \text{sinc } x$

x	0,00	0,02	0,04	0,06	0,08
0,0	1,000000	0,999933	0,999733	0,999400	0,998934
0,1	0,998334	0,997602	0,996737	0,995739	0,994609
0,2	0,993347	0,991953	0,990428	0,988771	0,986984
0,3	0,985067	0,983020	0,980844	0,978540	0,976106
0,4	0,973546	0,970858	0,968044	0,965105	0,962040
0,5	0,958851	0,955539	0,952104	0,948547	0,944869
0,6	0,941071	0,937153	0,933118	0,928965	0,924696
0,7	0,920311	0,915812	0,911200	0,906476	0,901640
0,8	0,896695	0,891641	0,886480	0,881212	0,875840
0,9	0,870363	0,864784	0,859104	0,853325	0,847446
1,0	0,841471	0,835400	0,829235	0,822977	0,816628
1,1	0,810189	0,803661	0,797047	0,790348	0,783564
1,2	0,776699	0,769754	0,762729	0,755627	0,748450
1,3	0,741199	0,733875	0,726481	0,719018	0,711488

x	0,00	0,02	0,04	0,06	0,08
1,4	0,703893	0,696234	0,688513	0,680732	0,672892
1,5	0,664997	0,657046	0,649043	0,640988	0,632885
1,6	0,624734	0,616537	0,608297	0,600014	0,591692
1,7	0,583332	0,574936	0,566505	0,558042	0,549549
1,8	0,541026	0,532478	0,523904	0,515307	0,506689
1,9	0,498053	0,489399	0,480729	0,472047	0,463353
2,0	0,454649	0,445937	0,437220	0,428499	0,419775
2,1	0,411052	0,402330	0,393612	0,384900	0,376194
2,2	0,367498	0,358813	0,350141	0,341483	0,332842
2,3	0,324220	0,315617	0,307036	0,298479	0,289947
2,4	0,281443	0,272967	0,264523	0,256110	0,247732
2,5	0,239389	0,231084	0,222817	0,214592	0,206409
2,6	0,198270	0,190176	0,182130	0,174132	0,166185
2,7	0,158289	0,150446	0,142659	0,134927	0,127253
2,8	0,119639	0,112084	0,104592	0,097163	0,089798
2,9	0,082500	0,075268	0,068105	0,061012	0,053990
3,0	0,047040	0,040163	0,033361	0,026635	0,019985
3,1	0,013413	0,006920	0,000507	-0,005825	-0,012075
3,2	-0,018242	-0,024325	-0,030324	-0,036236	-0,042063
3,3	-0,047802	-0,053453	-0,059014	-0,064487	-0,069868
3,4	-0,075159	-0,080358	-0,085465	-0,090478	-0,095398
3,5	-0,100224	-0,104955	-0,109591	-0,114131	-0,118575
3,6	-0,122922	-0,127173	-0,131326	-0,135382	-0,139339
3,7	-0,143199	-0,146960	-0,150622	-0,154186	-0,157650
3,8	-0,161015	-0,164281	-0,167448	-0,170515	-0,173482
3,9	-0,176350	-0,179119	-0,181788	-0,184358	-0,186829
4,0	-0,189201	-0,191473	-0,193647	-0,195723	-0,197700
4,1	-0,199580	-0,201361	-0,203046	-0,204633	-0,206124
4,2	-0,207518	-0,208817	-0,210020	-0,211128	-0,212142
4,3	-0,213062	-0,213888	-0,214622	-0,215264	-0,215814
4,4	-0,216273	-0,216642	-0,216921	-0,217112	-0,217214
4,5	-0,217229	-0,217157	-0,217000	-0,216757	-0,216430
4,6	-0,216020	-0,215527	-0,214953	-0,214298	-0,213563
4,7	-0,212750	-0,211858	-0,210890	-0,209846	-0,208727

x	0,00	0,02	0,04	0,06	0,08
4,8	-0,207534	-0,206269	-0,204932	-0,203524	-0,202046
4,9	-0,200501	-0,198887	-0,197208	-0,195464	-0,193656
5,0	-0,191785	-0,189853	-0,187860	-0,185808	-0,183699
5,1	-0,181532	-0,179311	-0,177035	-0,174706	-0,172326
5,2	-0,169895	-0,167415	-0,164888	-0,162314	-0,159695
5,3	-0,157032	-0,154326	-0,151579	-0,148792	-0,145967
5,4	-0,143105	-0,140206	-0,137273	-0,134307	-0,131309
5,5	-0,128280	-0,125222	-0,122137	-0,119024	-0,115887
5,6	-0,112726	-0,109543	-0,106338	-0,103114	-0,099871
5,7	-0,096611	-0,093336	-0,090046	-0,086743	-0,083429
5,8	-0,080104	-0,076770	-0,073428	-0,070080	-0,066726
5,9	-0,063369	-0,060009	-0,056648	-0,053287	-0,049927
6,0	-0,046569	-0,043216	-0,039867	-0,036524	-0,033189
6,1	-0,029863	-0,026546	-0,023240	-0,019947	-0,016667
6,2	-0,013402	-0,010152	-0,006919	-0,003703	-0,000507
6,3	0,002669	0,005824	0,008956	0,012066	0,015151
6,4	0,018211	0,021244	0,024250	0,027228	0,030177
6,5	0,033095	0,035983	0,038838	0,041661	0,044449
6,6	0,047203	0,049922	0,052604	0,055249	0,057857
6,7	0,060425	0,062955	0,065444	0,067892	0,070299
6,8	0,072664	0,074986	0,077264	0,079498	0,081688
6,9	0,083832	0,085930	0,087982	0,089987	0,091945
7,0	0,093855	0,095717	0,097530	0,099293	0,101008
7,1	0,101267	0,104286	0,105849	0,107361	0,108822
7,2	0,110232	0,111589	0,112895	0,114149	0,115350
7,3	0,116498	0,117594	0,118637	0,119627	0,120563
7,4	0,121447	0,122277	0,123055	0,123779	0,124449
7,5	0,125067	0,125631	0,126142	0,126600	0,127005
7,6	0,127358	0,127658	0,127905	0,128100	0,128243
7,7	0,128334	0,128373	0,128361	0,128297	0,128183
7,8	0,128018	0,127803	0,127539	0,127224	0,126861
7,9	0,126448	0,125988	0,125479	0,124923	0,124320
8,0	0,123670	0,122974	0,122232	0,121446	0,120615
8,1	0,119739	0,118821	0,117859	0,116855	0,115810

x	0,00	0,02	0,04	0,06	0,08
8,2	0,114723	0,113596	0,112429	0,111223	0,109978
8,3	0,108695	0,107376	0,106019	0,104627	0,103200
8,4	0,101738	0,100243	0,098714	0,097154	0,095562
8,5	0,093940	0,092287	0,090606	0,088896	0,087159
8,6	0,085395	0,083605	0,081790	0,079951	0,078089
8,7	0,076203	0,074296	0,072369	0,070421	0,068453
8,8	0,066468	0,064465	0,062445	0,060410	0,058359
8,9	0,056294	0,054217	0,052127	0,050025	0,047913
9,0	0,045791	0,043660	0,041521	0,039375	0,037223
9,1	0,035066	0,032904	0,030738	0,028569	0,026399
9,2	0,024227	0,022055	0,019884	0,017714	0,015547
9,3	0,013382	0,011222	0,009066	0,006916	0,004772
9,4	0,002636	0,000507	-0,001612	-0,003722	-0,005822
9,5	-0,007911	-0,009987	-0,012051	-0,014101	-0,016138
9,6	-0,018159	-0,020165	-0,022154	-0,024126	-0,026081
9,7	-0,028017	-0,029933	-0,031830	-0,033707	-0,035562
9,8	-0,037396	-0,039207	-0,040995	-0,042760	-0,044500
9,9	-0,046216	-0,047906	-0,049570	-0,051208	-0,052819
10,0	-0,054402	-0,055957	-0,057484	-0,058982	-0,060450

**3. ZEROURILE FUNCȚIEI $J_0(x)$ ȘI VALORILE
CORESPUNZĂTOARE ALE FUNCȚIEI $J_1(x)$**

n	x_n	$J_1(x_n)$	n	x_n	$J_1(x_n)$
1	2,404826	+0,519147	11	33,775820	+0,137297
2	5,520078	-0,340265	12	36,917098	-0,131325
3	8,653728	+0,271453	13	40,058426	+0,126070
4	11,791534	-0,232460	14	43,199792	-0,121397
5	14,930918	+0,206546	15	46,341188	+0,117211
6	18,071064	-0,187729	16	49,482610	-0,113429
7	21,211637	+0,173266	17	52,624052	+0,109991
8	24,352472	-0,161702	18	55,765511	-0,106848
9	27,493480	+0,152181	19	58,906984	+0,103960
10	30,634606	-0,144166	20	62,048469	-0,101293

BIBLIOGRAFIE

1. R. Annequin, J. Boutigny, *Optique 2*, Librairie Vuibert, Paris, 1975;
2. E. Bădărău, *Optica ondulatorie*, Tipografia Universității din București, 1948;
3. D. Bally, ș.a., *Difracția razelor X și a neutronilor*, Editura Tehnică, București, 1972;
4. M. Born, E. Wolf, *Principles of optics*, Pergamon Press, Oxford, 1986;
5. G. G. Brătescu, *Optica*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1982;
6. G. Bruhat, *Optique*, sixième édition, Masson et Cie, Paris, 1965;
7. E. I. Butikov, *Optika*, Izd. Vișșaiia Șkola, Moskva, 1986;
8. F. P. Carlson, *Applied optics for engineers*, Acad. Press, New York, 1977;
9. F. S. Crawford jr., *Cursul de fizică Berkeley*, vol. III (*Unde*), Editura Didactică și Pedagogică, București, 1983;
10. R. W. Ditchburn, *Light*, Blackie and Sons, London, 1963;
11. P. Fleury, J. P. Mathieu, *Lumière*, Ed. Eyrolles, Paris, 1965;
12. E. Flint, *Essentials of crystallography*, Mir Publishers, Moscow, 1971;
13. G. R. Fowles, *Introduction to modern optics*, Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York, 1975;
14. M. Françon, *Diffraction (cohérence en optique)*, Gauthier - Villars, Paris, 1964; *Vibrations lumineuses, optique cohérente*, Dunod, Paris, 1970; *Optique (formation et traitement des images)*, Masson et Cie, Paris, 1972;
15. S. E. Friș, A. V. Timoreva, *Curs de fizică generală*, vol.III, Editura Tehnică, București, 1954;
16. A. Ghatak, K. Thyagarajan, *Contemporary Optics*, Plenum Press, 1978;
17. N. M. Godjaev, *Optika*, Izd. Vișșaiia Șkola, Moskva, 1977;
18. A. Guinier, *Théorie et technique de la radiocristallographie*, Dunod, Paris, 1956;
19. E. Hecht, A. Zajac, *Optics*, Addison Wesley Publ. Comp., London, 1974;
20. E. Hegedüs, *Introducere în optică*, vol. I și II, Tipografia Univ. din Timișoara, 1974;
21. G. Huțanu, *De la optica clasică la optica modernă*, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1984;
22. E. N. Iliceva, Yu. A. Kudeiarov, A. N. Matveev, *Metodika reșenia zadaci optiki*, Izd. Moskovskogo Universiteta, Moskva, 1981;
23. I. Iova, *Elemente de optică aplicată*, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1977;
24. A. G. Jiglinskii, V. V. Kucinskii, *Realinii interferometr Fabry - Pérot*, Izd. Mașinostroenie, Leningrad, 1983;
25. N. I. Kalitéevski, *Optique onduloire*, Ed. Mir, Moscou, 1980;
26. M. V. Klein, *Optics*, John Willey and Sons, Inc., New York, 1970;
27. S. G. Landsberg, *Optica*, Editura Tehnică, București, 1958 (și ediția a doua, în limba rusă, Moscova, 1976);
28. S. G. Lipson, H. Lipson, *Optical physics*, Cambridge Univ. Press, 1981;
29. A. Maréchal, M. Françon, *Diffraction, structure des images*, Masson et Cie, Paris, 1970;
30. A. N. Matveev, *Optics*, Mir Publishers, Moscow, 1988;

31. J. R. Meyer - Arendt, *Introduction to classical and modern optics*, Prentice - Hall, Inc., 1972;
32. G. C. Moisil, E. Curatu, *Optică, teorie și aplicații*, Editura Tehnică, București, 1986;
33. K. D. Möller, *Optics*, Univ. Science Books, Mill Valley, 1988;
34. I. M. Naghibina, *Interferența și difracția sveta*, Izd. Mașinostroenie, Leningrad, 1974;
35. V. Niculescu, *Raze X*, Tipografia Univ. din Cluj, 1974;
36. J. Ph. Pérez, *Optique (géométrique, matricielle et ondulatoire)*, Masson, Paris, 1984;
37. F. L. Pedrotti, L. S. Pedrotti, *Introduction to Optics*, Prentice - Hall, 1993;
38. J. Petykiewicz, *Wave Optics*, Kluwer Acad, Dordrecht, 1992;
39. I. Pop, V. Niculescu, *Structura corpului solid*, Editura Academiei, București, 1971;
40. V. Pop, *Optica*, vol. II, partea a doua, Tipografia Univ. "Al. I. Cuza" din Iași, 1986;
41. I. M. Popescu, *Teoria electromagnetică macroscopică a luminii*, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1986;
42. B. Rossi, *Optics*, Addison - Wesley Publ. Comp., London, 1959;
43. M. Rousseau, J. P. Mathieu, *Problèmes d'Optique*, Dunod, Paris, 1960;
44. D. Sivoukhine, *Cours de Physique Générale*, tome IV, *Optique*, Première partie, Ed. Mir, Moscou, 1984;
45. F. G. Smith, J. H. Thomson, *Optics*, Wiley, 1988;
46. A. Sommerfeld, *Optik*, Wiesbaden, 1950;
47. J. M. Stone, *Radiation and optics*, McGraw-Hill Book Comp., Inc., New York, 1963;
48. H. Țintea, *Optică și spectroscopie*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1972;
49. R. Țițeica, I. I. Popescu, *Fizică generală*, vol. II, Editura Tehnică, București, 1973;
50. F. Uliu, *Optică și spectroscopie*, partea a II-a, *Optica ondulatorie*, Reprografia Univ. din Craiova, Craiova, 1975;
51. Em. Vasiliu, *Lumina - undă electromagnetică ?*, Editura Albatros, București, 1973; *Lumina - undă sau corpuscul ?*, Editura Albatros, București, 1976;
52. M. B. Vinogradova, O. V. Rudenko, A. P. Suhoruhov, *Teoria voln*, Izd. Nauka, Moskva, 1979;
53. M. Young, *Optics and Lasers*, Springer - Verlag, Berlin, 1984;
54. Yu. G. Zagaliskaia, G. P. Litvinskaia, *Geometricescaia cristalografia*, Izd. Moskovskogo Universiteta, Moskva, 1973;
55. A. N. Zaidel, G. V. Ostrovskaia, I. I. Ostrovski, *Tehnica și practica spectroscopiei*, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1984;
56. * * * *Sbornic zadaci po obščemu kursu fiziki (Optika)*, pod redacția D. V. Sivoukhina, Izd. Nauka, Moskva, 1977.

Capitolul III

BAZELE ANALIZEI ȘI OPTICII FOURIER

§. 3. 1. Considerente introductive și scurt istoric

Acest penultim capitol al primului volum poate fi considerat ca o punte de legătură spre cel de-al doilea volum al cărții noastre și este dedicat prezentării principalelor aspecte matematice și fizice ale analizei Fourier a semnalelor mono și bidimensionale. El a fost introdus în acest prim volum din cel puțin două motive:

a) pe de o parte, semnalele de care ne vom ocupa vor fi, ca și în capitolele precedente, *semnale scalare*, adică, deocamdată, nu vom ține cont de starea de polarizare, respectiv de natura vectorial - electromagnetică a luminii;

b) pe de altă parte, istoricește vorbind, începuturile utilizării analizei Fourier în optică sunt strâns legate de problematica difracției luminii, tratată în capitolul anterior. Dincolo de aceste motive, care argumentează mai ales plasarea capitolului în structura de ansamblu a lucrării, există și o motivație majoră, aceea a aplicațiilor practice recente (ultimul sfert de secol), de importanță deosebită, care pot fi înțelese numai pe baza analizei Fourier (mono, bi și chiar tridimensională).

Prima aplicație practică a analizei Fourier în optică, la început calitativă, datează din anul 1873 și este datorată fizicianului german E. Abbe (1840-1905) - care a studiat amănunțit, în context ondulatoriu, problema formării imaginii obiectelor periodice în microscop, în cazul limită al iluminării total coerente. Atunci s-a putut înțelege, pentru prima oară, că procesul formării imaginilor în microscop nu este chiar așa de simplu cum îl prezintă optica geometrică. Mai mult, din teorie rezulta în mod nemijlocit posibilitatea influențării și controlării imaginii microscopice printr-un procedeu pe care în prezent îl denumim *filtraj spațial*. Cu aceeași ocazie, Abbe a arătat că puterea de rezoluție a microscopului este dependentă și de modul de iluminare a preparatului ce se dorește a fi observat.

Ulterior, în anul 1874, și apoi în 1896, fizicianul englez R. W. Strutt (1824-1919), cunoscut mai ales ca Lord Rayleigh, a studiat și el formarea imaginilor produse de rețelele de difracție, în lumină coerentă, elaborând o metodă matematică originală (care-i poartă astăzi numele) pentru calculul "câmpului de unde" dincolo de rețea.

În anul 1883, germanul G. Kirchhoff (1824-1887), savant cu contribuții semnificative în mai multe domenii ale fizicii și chimiei, a pus bazele *teoriei scalare a difracției luminii*, dând o formulare matematică adecvată* principiului Huygens - Fresnel.

Pentru un obiect iluminat coerent, corespondența dintre termenii seriei Fourier care descrie structura obiectului și ordinele de difracție, precum și procesul reconstituirii lor în imaginea finală cu ajutorul unei lentile, au fost analizate destul de detaliat, în 1906, de către A. B. Porter (fără să știe că lordul Rayleigh întreprinsese investigații similare cu mult înaintea sa). A devenit astfel evident că problematica difracției și influența acesteia asupra formării imaginii pot și trebuie să fie abordate riguros numai cu ajutorul transformatei Fourier.

* Rigurozitatea teoriei lui Kirchhoff a fost contestată, pe bună dreptate, de către H. Poincaré (1854-1912) în anul 1892 și de către A. Sommerfeld (1868-1951) în perioada 1894-1896. În prezent ea este considerată doar ca "o primă aproximație".

Așadar, inserând acest capitol după cel în care a fost prezentată teoria scalară a difracției undelor luminoase, vom avea posibilitatea să extindem considerentele din capitolul precedent și să urmărim drumul pe care s-a dezvoltat, în secolul nostru, teoria prelucrării optice a informației, atât înainte cât și, mai ales, după apariția surselor luminoase coerente-laserii (1960).

La începutul secolului nostru, în primele trei decenii, teoria și practica prelucrării optice a informației nu a stârnit un interes prea mare și a avansat extrem de lent. Prima lucrare referitoare la utilizarea transformatelor Fourier (și a noțiunii de *convoluție*), în optică, în care se reconsideră teoria Abbe-Strutt-Porter a formării imaginilor prin diferite instrumente optice, datorată francezului P. M. Duffieux, apare abia în anul 1935. Tot în această perioadă este pusă la punct prima metodă (Schlieren) de vizualizare a obiectelor de fază (cu transmitanță de amplitudine constantă dar neomogene din punct de vedere optic), bazată pe filtrarea cu o "lamă de cuțit" - metodă preconizată de A. Toepler (1864). Apoi, în anul 1935, fizicianul olandez F. Zernike (1888-1966) a inventat o nouă metodă de vizualizare a obiectelor de fază și, pe această bază, printr-o filtrare spațială eficientă, realizată cu ajutorul unei lame de fază, a construit primul *microscop cu contrast de fază* (premiul Nobel în 1953).

La sfârșitul deceniului al 5-lea al secolului nostru (mai exact în anii 1948-1949), fizicianul englez D. Gabor (1900-1979) inventează *holografia*, care va revoluționa apoi întregul domeniu al prelucrării optice a informației. Pentru această descoperire, care avea să rămână aproape 15 ani în fază de proiect teoretic, profesorul D. Gabor a fost încununat cu premiul Nobel pe anul 1971.

După anul 1950 se dezvoltă sistematic *filtrarea spațială* în lumină coerentă, prin contribuțiile francezilor A. Maréchal și M. Françon, și în lumină necoerentă, prin lucrările de pionierat ale japonezului K. Sayanagi, în vederea îmbunătățirii calității imaginilor respectiv a fotografiilor. O. Schade utilizează metoda transformărilor liniare în sistemele optice pentru a analiza și optimiza funcționarea lentilelor de la camerele de luat vederi.

În anul 1951, olandezul Van Hill obține primele fibre optice, de sticlă, capabile să transmită imagini. Tot atunci, încep să apară primele articole referitoare la legătura dintre optică și teoria comunicațiilor, respectiv teoria prelucrării informației (P. Elias, 1952 și E. L. O'Neill, 1956). În Anglia, în anii 1958-1959, Kapany, Hopkins și Hirschowitz reușesc să obțină primele *fibre optice* cu diametrul filamentului de 5 micrometri și încep producerea primelor fibre optice cu manta, al căror nivel de pierderi coboară la 800 dB/km. Aceste prime realizări fac posibilă, începând cu anul 1961, trecerea la fabricarea fibrelor optice pe scară industrială și apariția, în 1964, a principiului telefoniei cu fibre optice multimodale (cu indice de refracție cu prag - la început, și apoi, cu indice gradual). Perfecționările tehnologice realizate până în prezent au condus la coborârea nivelului de pierderi optice din fibre până la valori de 0,15 dB/km și, în consecință, la lărgirea nebănuită a gamei de aplicații practice ale acestora*.

Apariția *laserilor*, în anul 1960, a revoluționat optica din toate punctele de vedere.

* În S.U.A., încă din perioada 1978-1980, s-au instalat linii telefonice cu fibre optice în statele Missouri, Pennsylvania, California, Georgia și Massachussets; în Germania, în 1980, s-a instalat primul cablu aerian cu fibre optice în Alpi; după 1984, s-au dat în exploatare primele linii telefonice submarine și transoceanice (TAT-TransAtlantica și TPC - TransPacifică); în prezent se lucrează la instalarea rețelei SMW III, cu lungime de 20000 km, ce va lega Europa de Vest de Asia de Sud-Est (Singapore).

Pe de o parte, au crescut distanțele de coerență de la valorile lor clasice, de ordinul zecimilor de milimetru, până la valori de ordinul zecilor de metri și chiar mai mari. Pe de altă parte, monocromaticitatea foarte bună, direcționalitatea și intensitatea luminoasă foarte mare, erau calități pe care opticienii le așteptau de multă vreme pentru a putea realiza proiectele lor îndrăznețe. Odată cu apariția laserilor, toate aceste calități au devenit realitate și renașterea opticii nu a mai mirat pe nimeni, căci era firească.

În anul 1961, fizicienii americani E. N. Leith și J. Upatnieks, folosind surse laser și înclinând fasciculul de referință față de axa optică (pentru separarea imaginilor conjugate), realizează prima *hologramă*. În Rusia, în anul 1962, fizicianul Yu. Denisiuk sugerează ideea holografiei tridimensionale și concepe înregistrarea hologramelor prin împrăștierea înapoi a unei obiect. La sfârșitul anului 1965, prin combinarea metodei interferometrice cu metoda holografică, apare *interferometria holografică*, domeniu nou al opticii cu nenumărate aplicații practice. Tot în 1965, G. W. Stroke inventează *holografia Fourier* și publică prima carte de optică coerentă și holografie.

În anii care au urmat au apărut idei noi ce au contribuit nu numai la dezvoltarea spectaculoasă a holografiei ci și a unor domenii ramificate din acest trunchi. Progresele rapide ale prelucrării și transmiterii optice a informației s-au datorat, pe de o parte, evoluției dinamice a holografiei și, pe de altă parte, sistematizării multor concepte și tehnici din optică pe baza teoriei generale a sistemelor (lucru care devenise evident încă din anii 1952-1956, prin lucrările lui P. Elias și O'Neill și apoi, în perioada 1960-1963, prin lucrările unui grup de la Universitatea din Michigan, condus de L. J. Cutrona). În acest fel a luat naștere așa-numita *optică Fourier modernă*, sau mai general, *optica transformărilor*. În prezent, dispunem în acest domeniu de multiple posibilități de realizare a filtrației spațiale și de efectuare, prin metode optice, a unor operații matematice ca transformările Fourier, Hankel sau Hilbert, derivarea, integrarea, medierea statistică, efectuarea produselor de convoluție sau de corelație etc. Grație progreselor realizate în domeniul stocării optice a informației, respectiv al memoriilor optice și holografice, au apărut deja calculatoarele hibride, electrono-optice, și vor apare cu siguranță, în viitor, calculatoarele optice de mare performanță. În epoca exploziei informaționale pe care o trăim, memoriile optice și holografice au început să concureze serios memoriile semiconductoare, benzile și discurile magnetice ale calculatoarelor electronice și oamenii de știință sunt aproape unanimi în aprecierile lor când afirmă că viitorul va fi al calculatoarelor optice mult mai rapide și cu o capacitate de stocare sensibil crescută.

Pentru a înțelege de unde derivă acest optimism, ne vom referi pe scurt și la un domeniu relativ independent al opticii contemporane, cunoscut sub denumirea de *optică integrată*, ce s-a dezvoltat vertiginos după anul 1970. Prima lucrare în care apare această sintagmă a fost publicată în anul 1969. Autorul ei, cercetătorul S. E. Miller (S.U.A.) definește optica integrată ca fiind acea parte a fizicii care se ocupă cu studiul propagării undelor electromagnetice luminoase în straturi dielectrice foarte subțiri, adică în ghiduri de undă peliculare, cu studiul generării, modulării, detectării, comutării, etc. undelor în aceste "circuite peliculare". Considerată inițial ca o extindere a teoriei și practicii transmiterii optice a informației prin fibre optice, optica integrată s-a pretins a fi, și deja este în mare măsură, o extindere a electronicii cu elemente semiconductoare în domeniul frecvențelor foarte mari ($\approx 10^{15}$ Hz), purtătorul de informație fiind acum, în locul curentului de electroni, curentul de fotoni, adică lumina. Progresele paralele ale fizicii laserilor miniaturali, ale fizicii cristalelor lichide și ale tehnologiilor de fabricație pentru componentele și circuitele peliculare optice, au permis depășirea multor dificultăți apărute în realizarea proiectelor

opticii integrate. Descoperirea *bistabilității optice* (A. Szöke și colaboratorii, 1969) și studiul său detaliat (Mc Call - 1974, Gibbs și Venkatesan - 1976, Bonifacio și Lugiato - 1978, etc.) au dat un impuls deosebit cercetărilor în acest domeniu; astfel a fost posibilă construirea așa numitului *tranzistor optic*, care joacă în prezent același rol - în optica integrată, pe care l-a jucat, în anii de după cel de-al doilea război mondial, tranzistorul bipolar - în electronică. Cu ajutorul său se pot construi amplificatoare de semnale optice, continue sau în impulsuri, generatoare de impulsuri, diverse circuite optice logice, elemente de comutare, etc.

Înainte de a încheia acest paragraf, introductiv, vom mai spune că, apariția laserilor a dat contururi noi și unui alt domeniu al opticii - *optica neliniară*, ale cărei începuturi istorice datează din deceniul al treilea al secolului nostru. Atunci, în anul 1925, fizicianul rus S. Vavilov, (1891-1951) a pus în evidență primul efect optic neliniar, anume creșterea transparenței unui mediu sub acțiunea unui flux luminos incident de intensitate mare. Excepționala sa intuiție științifică i-a permis să înțeleagă, chiar și în lipsa altor experimente confirmatoare, realitatea fizică a fenomenelor neliniare în optică. Acest lucru rezultă cât se poate de clar din monografia *Microstructura luminii*^{*}, pe care a publicat-o în anul 1950 și în care este introdusă și folosită în mod adecvat denumirea de "optică neliniară". Începuturile renașterii opticii neliniare, după apariția surselor laser, de intensitate luminoasă foarte mare, sunt legate de numele fizicianului american P. Franken și a colaboratorilor săi, care, în anul 1961, au reușit să genereze armonica a doua a laserului cu rubin, într-un cristal de cuarț. Tot în anul 1961, fizicianul armean G. Askarian a prezis teoretic efectul de autofocalizare care a fost confirmat experimental în anul 1963. Începând cu anii 1964-1965, prin lucrările teoretice și experimentale ale lui N. Bloembergen (S.U.A) - laureat al premiului Nobel pentru fizică în 1981 - respectiv R. Hohlov și S. Ahmanov (Rusia), optica neliniară s-a constituit ca un domeniu de sine stătător al opticii moderne, dar cu ramificații bine conturate atât în cercetarea fundamentală cât și în cea aplicativă. Menționăm, pe scurt, câteva din realizările acestui domeniu: obținerea de radiații coerente cu alte frecvențe decât cele furnizate de laserii utilizați ca surse primare, prin generare de armonici, mixaj optic, generare parametrică, efect Raman stimulat; efecte parametrice optice, ca amplificarea și generarea parametrică a undelor electromagnetice sau a undelor ultrasonore și hipersonore; modularea temporală și spațială a fasciculelor luminoase și utilizarea acestora în sistemele de comunicații optice; generarea și utilizarea impulsurilor ultrascurte de lumină, etc.

Progresele înregistrate în diversele domenii ale opticii moderne, al căror scurt istoric am încercat să-l schițăm mai sus, se influențează reciproc în mod benefic și fac ca optica să fie în momentul de față una din cele mai dinamice ramuri ale fizicii. Chiar dacă cititorul nu va fi capabil să înțeleagă încă, în suficientă măsură, amploarea și importanța implicațiilor practice ce derivă din direcțiile de dezvoltare de care am vorbit în acest paragraf introductiv, am considerat că este oportun să le menționăm acum deoarece ele concurează în mod armonios la progresul extraordinar al teoriei și practicii prelucrării optice a informației.

În acest capitol, în continuare, ne vom referi numai la problematica analizei Fourier a semnalelor mono și bi-dimensionale, într-un cadru sistematic, consecvent, urmând ca, în capitolele celui de-al doilea volum, la momentul potrivit, să dezvoltăm unele aspecte specifice, după ce vom vorbi despre dispersie, interferență, coerență, polarizare, propagarea luminii în medii anizotrope, etc., luând în considerare natura vectorial - electromagnetică sau cuantică a luminii.

* Vezi traducerea în limba română, Ed. Academiei, 1953.

§. 3. 2. Analiza Fourier a semnalelor monodimensionale

Deși ideile de bază ale analizei Fourier au apărut în prima jumătate a secolului trecut*, această metodă și-a dovedit forța predictivă și importanța practică mai ales în secolul nostru și, cu precădere, după anul 1930. În prezent, analiza Fourier a semnalelor de diverse naturi, a devenit o metodă larg răspândită în numeroase domenii ale științei și tehnicii. Teoria transmiterii și prelucrării informației, în general, și optica modernă, în particular, au beneficiat din plin de aportul analizei Fourier mono și bi-dimensionale, fără de care practic nu mai pot fi concepute.

În acest paragraf, și în câteva din cele care urmează, prezentăm pe scurt, acele aspecte matematice ale analizei Fourier care sunt importante pentru aplicațiile din domeniul opticii (și al teoriei sistemelor, în general), fără a insista prea mult asupra deplinei rigurozității. Intenția noastră este doar aceea de a pune la îndemână cititorului o unealtă, respectiv o metodă, fără de care nu se mai poate lucra în domeniul opticii actuale și a cărei înțelegere și aprofundare îi va fi utilă și pentru abordarea altor capitole ale fizicii.

Vom analiza mai întâi problematica *seriilor Fourier* în cazul funcțiilor (semnalelor) de o *variabilă reală*, pentru a putea înțelege corect compoziția spectrală a semnalelor periodice. Apoi, vom trece la studiul *integrălelor Fourier*, pentru funcții de una sau două *variabile reale*, cu ajutorul cărora se poate face analiza fenomenelor neperiodice, respectiv a fenomenelor tranzitorii - atât de frecvent întâlnite în fizică și tehnică.

Toate funcțiile cu care vom opera vor fi *funcții scalare*, reale sau complexe, depinzând de situația fizică pe care o avem în vedere.

Celor dornici să-și completeze cunoștințele în domeniul analizei Fourier sau să aprofundeze subiectul din punctul de vedere al rigurozității matematice, le recomandăm consultarea lucrărilor [1-10].

În încheiere subliniem că, în general, prin *semnal* vom înțelege un purtător fizic de informație, electric sau electromagnetic (în particular optic), măsurabil, prin intermediul căruia se realizează transmiterea informațiilor. Sensul mai exact al conceptului se va preciza și va putea fi înțeles pe parcurs, prin exemplificările ce se vor da.

3. 2. 1. Serii Fourier

În analiza matematică se demonstrează că, în condiții destul de generale (condițiile lui Dirichlet), care de regulă sunt îndeplinite în situațiile fizice pe care le avem în vedere, o funcție periodică $f(t)$, cu perioada T (vezi fig.3.1.), pentru care $f(t+T) = f(t)$, poate fi dezvoltată în seria Fourier

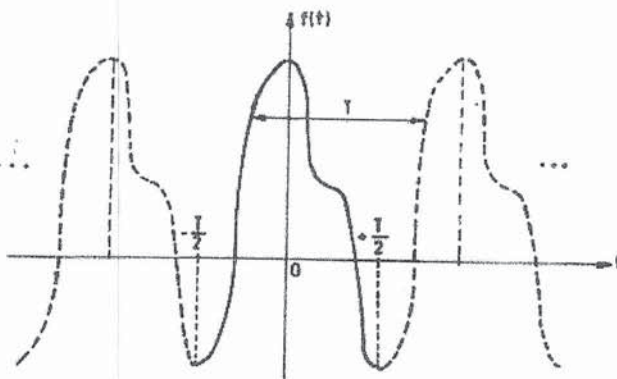


Fig.3.1. O funcție periodică $f(t)$ ce îndeplinește condițiile lui Dirichlet.

* În anul 1822 J. B. Fourier (1768-1830) a publicat, la Paris, lucrarea *Teoria analitică a căldurii*, în care a studiat riguros conductibilitatea termică și transmiterea căldurii. Subliniem că Fourier a fost nu numai matematician, fizician și inginer, ci și un remarcabil istoric (însoțindu-l pe Napoleon în campania din Africa, a scris apoi o istorie a Egiptului).

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \quad (3.1)$$

unde $\omega = 2\pi/T$ și

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) \cos n\omega t dt, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.2.a)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) \sin n\omega t dt, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.2.b)$$

În afara domeniului fundamental $[-T/2; +T/2]$, pe care considerăm că este definită funcția, adică pentru $|t| > T/2$, expresia (3.1) reprezintă o prelungire periodică a funcției $f(t)$.

Pentru aplicațiile ulterioare avem în vedere ca variabila t să fie timpul iar ω - pulsația temporală. Dacă funcția f este spațial-periodică, cu perioada L , adică $f(z) = f(z+L)$, dezvoltarea (3.1) rămâne valabilă cu utilizarea următoarelor corespondențe: $t \rightarrow z$, $T \rightarrow L$, $\omega \rightarrow k = 2\pi/L$ (pulsația spațială).

Cu ajutorul formulei lui Euler, $\exp(\pm i\alpha) = \cos \alpha \pm i \sin \alpha$, seria (3.1) poate fi transcrisă sub forma complexă

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t} \quad (3.3)$$

unde

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) e^{-in\omega t} dt. \quad (3.4)$$

Nu este greu de arătat că coeficienții c_n , în general complexi, sunt legați de coeficienți a_n, b_n , prin relațiile

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.5)$$

$$c_n = \frac{1}{2}(a_{-n} + ib_{-n}), \quad n = -1, -2, -3, \dots \quad (3.6)$$

Observație: În legătură cu determinarea coeficienților din dezvoltarea (3.1), este util să precizăm următoarele. Dacă suma $\Sigma_N(t)$ din membrul drept ar conține un număr finit, N , de termeni, adică $n = 1, 2, 3, \dots, N$, și am nota cu $\varepsilon_N(t) = f(t) - S_N(t)$ eroarea comisă la aproximarea funcției $f(t)$ prin expresia $S_N(t) = \frac{a_0}{2} + \Sigma_N(t)$, atunci *eroarea pătratică medie*, definită în sensul lui Gauss ca

$$\langle \varepsilon_N^2(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \varepsilon_N^2(t) dt \quad (3.7)$$

este minimă atunci când coeficienții a_n și b_n ai dezvoltării au tocmai forma (3.2). Cititorul poate demonstra simplu această afirmație.

Problema convergenței seriei (3.1), la limita $N \rightarrow \infty$, rămâne o problemă distinctă, ce trebuie analizată separat; ea este dependentă de ansamblul proprietăților matematice ale funcției $f(t)$.

Să transcriem termenii seriei Fourier (3.1) sub forma ($n \neq 0$)

$$a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \left(\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \cos n\omega t + \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \sin n\omega t \right) \equiv \\ \equiv A_n \cos(n\omega t - \varphi_n)$$

unde

$$\begin{cases} A_n = +\sqrt{a_n^2 + b_n^2}, & \operatorname{tg} \varphi_n = \frac{b_n}{a_n}, \\ \cos \varphi_n = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}, & \sin \varphi_n = \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \end{cases} \quad (3.8)$$

În consecință putem scrie

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t - \varphi_n), \quad (3.9)$$

unde $A_0 \equiv a_0$. Ansamblul mărimilor A_n poartă denumirea de *spectru al amplitudinilor* funcției $f(t)$ iar mulțimea φ_n - de *spectru al fazelor*. Prin definiție, în seriile (3.1), (3.9), pulsațiile $\omega, 2\omega, 3\omega, \dots$ au valori pozitive. Pulsația ω se numește *fundamentală* iar pulsațiile $2\omega, 3\omega, 4\omega, \dots$ - *armonice superioare*.

O transcriere similară se poate realiza și pentru seria Fourier complexă (3.3). Dacă funcția $f(t)$ este reală, adică $f^*(t) = f(t)$, din (3.4) rezultă imediat că $c_n^* = c_{-n}$ (semnul * desemnează conjugarea complexă). În acest caz, din relațiile (3.5) - (3.6) obținem

$$a_0 = 2c_0, \quad a_n = 2\operatorname{Re}c_n, \quad b_n = -2\operatorname{Im}c_n, \quad (3.10)$$

Re desemnând partea reală iar Im - partea imaginară a mărimii (sau expresiei) care urmează. Din (3.8) și (3.10) rezultă

$$A_0 = 2c_0, \quad A_n = 2|c_n|, \quad \operatorname{tg} \varphi_n = -\frac{\operatorname{Im}c_n}{\operatorname{Re}c_n}. \quad (3.11)$$

Prin urmare, spectrul de amplitudini și de faze poate fi aflat și din cunoașterea coeficienților complexi ai dezvoltării în serie sub forma (3.3).

Dacă funcția $f(t)$ este pară ($f(t) = f(-t)$) sau impară ($f(t) = -f(-t)$) dezvoltarea în serie capătă forme speciale. În primul caz, coeficienții b_n sunt egali cu zero, pentru toate valorile lui n , și obținem doar o serie de funcții cosinus; în al doilea caz, sunt egali cu zero coeficienții a_n , inclusiv a_0 , și obținem o serie numai de funcții sinus. Aceste rezultate sunt cât se poate de firești, dacă avem în vedere că orice funcție $f(t)$ poate fi exprimată ca suma dintre o funcție pară $f_p(t)$ și o funcție impară $f_i(t)$, adică sub forma $f(t) = f_p(t) + f_i(t)$, unde

$$f_p(t) = \frac{1}{2}[f(t) + f(-t)], \quad f_i(t) = \frac{1}{2}[f(t) - f(-t)].$$

Să demonstrăm acum așa-numita *teoremă de multiplicare*, exprimată matematic prin relația

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f_1(t) \cdot f_2(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n^{(1)} \cdot c_{-n}^{(2)}, \quad (3.12)$$

în care funcțiile $f_1(t)$ și $f_2(t)$ au aceeași perioadă T . Folosind relațiile (3.3), (3.4) avem succesiv

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f_1(t) f_2(t) dt &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n^{(1)} e^{in\omega t} \right] f_2(t) dt = \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n^{(1)} \int_{-T/2}^{+T/2} f_2(t) e^{in\omega t} dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n^{(1)} \cdot c_{-n}^{(2)}. \end{aligned}$$

Dacă funcția $f_2(t)$ este reală, avem $c_{-n}^{(2)} = c_n^{(2)*}$ și membrul drept al ultimei relații se poate transcrie corespunzător

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f_1(t) f_2(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n^{(1)} \cdot c_n^{(2)*}.$$

Pentru $f_1 = f_2 = f$, din relația (3.12) rezultă imediat așa-numita *teoremă a lui Parseval*

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f^2(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n c_{-n}, \quad (3.13)$$

iar dacă $f(t)$ este o funcție *reală*, adică $c_{-n} = c_n^*$

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f^2(t) dt &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n c_n^* = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{4} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n^2 = \\ &= \frac{1}{4} A_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} A_n^2 = \frac{1}{4} a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2). \end{aligned} \quad (3.13')$$

Observație: În cazul general, al unor funcții complexe, de aceeași perioadă T , teorema de multiplicare se dă uneori sub forma

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f_1(t) f_2^*(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n^{(1)} c_n^{(2)*} \quad (3.12')$$

sau echivalent

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f_1^*(t) f_2(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n^{(1)*} c_n^{(2)}, \quad (3.12'')$$

iar teorema lui Parseval-sub forma

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2. \quad (3.13''')$$

După cum ne vom putea convinge mai târziu, teorema lui Parseval, aplicată unor semnale fizice (de exemplu, câmpurile electric și magnetic ale unei unde electromagnetice), exprimă analitic *legea conservării energiei*. Membrul stâng al relațiilor (3.13) este proporțional cu energia medie a semnalului, pe o perioadă, iar membrul drept - cu suma energiilor medii pentru componentele Fourier ale semnalului.

3. 2. 2. Exemple de semnale periodice

Utilizând formulele prezentate în secțiunea anterioară, să analizăm acum structura spectrală a câtorva funcții (semnale) care apar destul de frecvent în științele fizice în general și în optică în particular.

1. Succesiune infinită de impulsuri dreptunghiulare.

Reprezentarea grafică a acestei forme de semnal, infinit din punct de vedere temporal, este dată în fig. 3.2, unde T este perioada iar τ - durata unui impuls. Fie f_0 amplitudinea (înălțimea) fiecărui impuls. Funcția fiind pară, avem $b_n = 0$, iar pentru $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

$$a_n = \frac{2}{T} f_0 \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} \cos n\omega t dt = 2f_0 \frac{\tau}{T} \operatorname{sinc}\left(\frac{n\omega\tau}{2}\right), \quad \omega \equiv \frac{2\pi}{T},$$

unde funcția

$$\operatorname{sinc} \rho \equiv \frac{\sin \rho}{\rho} \rightarrow 1 \text{ pentru } \rho \rightarrow 0 \quad (3.14)$$

poartă denumirea de *sinus cardinal*. Rezultă imediat următorul spectru de amplitudini și de faze

$$A_n = |a_n| = 2f_0 \left(\frac{\tau}{T}\right) \left| \operatorname{sinc}\left(\frac{n\omega\tau}{2}\right) \right|, \quad \varphi_n = 0. \quad (3.15)$$

Spectrul amplitudinilor este redat în fig.3.3, unde avem valoarea maximă $A_0 = 2f_0(\tau/T)$.

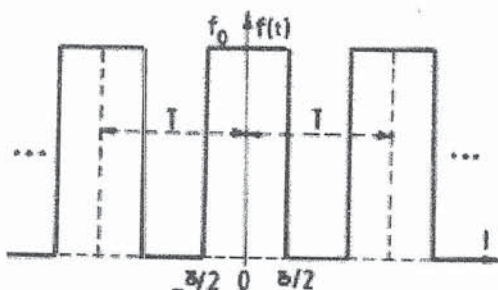


Fig.3.2. Semnal sub formă de succesiune de impulsuri dreptunghiulare.

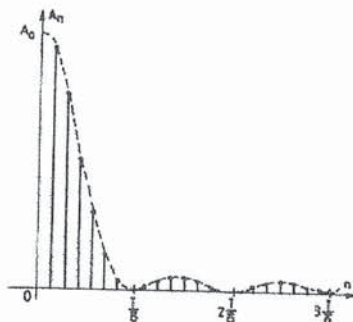


Fig.3.3. Spectrul amplitudinilor semnalului din figura anterioară.

Deoarece $n\frac{\omega\tau}{2} = n\pi(\tau/T)$, ajungem la concluzia că numărul armonicelor dintre două zerouri consecutive ale amplitudinii depinde semnificativ de raportul τ/T : cu cât este mai scurtă durata unui impuls (τ), în comparație cu perioada (T), cu atât este mai mare numărul armonicelor ($\Delta n = T/\tau$). Se poate demonstra ușor că maximele secundare sunt localizate în punctele ce corespund rădăcinilor ecuației transcendente $\operatorname{tg}\rho_n = \rho_n$, unde $\rho_n = n\omega\tau/2$. Cu o aproximație rezonabilă (eroare foarte mică pentru valori mari ale lui n), soluțiile ecuației sunt $\rho_n^{(\max)} \cong \pi(m + \frac{1}{2})$, $m = 1, 2, 3, \dots$, adică $n_{\text{sec}}^{(\max)} \cong \frac{T}{\tau}(m + \frac{1}{2})$. Revenind în (3.15), pentru înălțimile maximelor secundare obținem aproximativ

$$\frac{A_{n,\text{sec}}^{(\max)}}{A_0} \leq \frac{1}{\rho_{n,\text{sec}}^{(\max)}} \cong \frac{2}{\pi(2m+1)}, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

adică cel mult 0,217; 0,130; 0,091; 0,071 etc. din înălțimea maximului principal A_0 . Considerând că $|A_n|^2$ reprezintă intensitățile componentelor Fourier ale semnalului (vezi teorema Parseval) și, comparând intensitățile maximelor secundare succesive cu intensitatea maximului principal, obținem șirul de valori maxime: 1; 0,047; 0,017; 0,008; 0,005 etc.

Este interesant să considerăm și cazul limită al impulsurilor foarte înguste, adică cu τ foarte mic, la limită tinzând spre zero. Putem scrie

$$A_n \cong 2f_0 \left(\frac{\tau}{T} \right) = 2f_0 v\tau, \quad v = 1/T, \quad (3.16)$$

adică spectrul amplitudinilor devine constant, independent de n . Acum avem de-a face cu un spectru infinit de linii, de aceeași amplitudine, egal distanțate. Funcția de timp $f(t)$ pe care am considerat-o are însă exact aceeași formă. Spunem că funcțiile de acest tip, care au aceeași formă când sunt reprezentate ca funcții de timp ca și atunci când sunt reprezentate ca funcții de frecvență (spectru) sunt *autoreciproce*.

La limită, când $\tau \rightarrow 0$, rezultă $A_n \rightarrow 0$ și toate amplitudinile spectrale sunt nule. Acum funcția $f(t)$ este formată din vârfuri de înălțime finită și de durată nulă, iar în reprezentarea spectrală toți termenii au devenit foarte mici, dar la fel de importanți, numărul lor fiind însă infinit de mare.

În conformitate cu teorema Parseval (3.13), în care integrarea se restrânge la intervalul $(-\tau/2; +\tau/2)$, energia medie a semnalului $f_0^2 \frac{\tau}{T}$, este nulă când $\tau \rightarrow 0$ și atunci, evident, suma energiilor componentelor spectrale trebuie să fie de asemenea nulă. Cum numărul termenilor din membrul drept al relației (3.13) este infinit, rezultă cu necesitate că toate amplitudinile spectrale sunt nule. Am ajuns, în acest fel, la aceeași concluzie ca mai sus, însă de data aceasta prin considerente energetice.

Trebuie să atragem atenția asupra faptului că forma seriei Fourier depinde nu numai de forma semnalului ci și de alegerea originii pe scala temporală, adică, în particular, și de valoarea $f(0)$ a funcției la momentul $t = 0$. De exemplu, dacă în fig.3.2 originea timpului ar fi translatată cu $0 < \Delta t < \tau/2$ la dreapta sau la stânga, funcția periodică $f(t)$ nu ar mai fi o funcție pară (simetrică). Din această cauză, acum ar fi diferiți de zero atât coeficienții a_n , cât și coeficienții b_n , seria Fourier conținând atât funcții sinus, cât și funcții cosinus.

În consecință, spectrul fazelor φ_n nu ar mai fi trivial. Sugerăm cititorului să calculeze singur coeficienții a_n și b_n , respectiv amplitudinile spectrale A_n și fazele φ_n , pentru cazurile în care originea timpului este translatată cu $\tau/4$ și cu $\tau/2$ spre dreapta, sau spre stânga.

2. Spectrul impulsurilor "dinte de ferăstrău".

Să considerăm semnalul, înfișat temporal, compus din impulsuri sub formă de dinte de ferăstrău, ca în fig.3.4. În intervalul $0 \leq t \leq T$, dreapta cu panta negativă are ecuația $f(t) = f_0(1 - t/T)$ și din formulele generale (3.2) obținem

$$a_0 = f_0, \quad a_n = 0, \quad b_n = \frac{f_0}{n\pi}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.17)$$

Spectrul amplitudinilor și fazelor se dă prin formulele

$$A_0 = f_0, \quad A_n = \frac{f_0}{n\pi}, \quad \varphi_n = \pi/2, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.18)$$

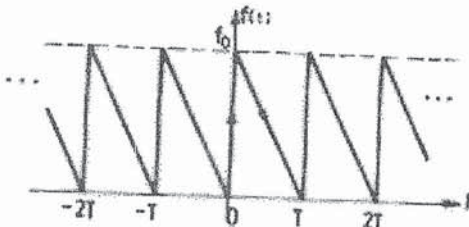


Fig.3.4. Semnal sub formă de impulsuri "dinte de ferăstrău".

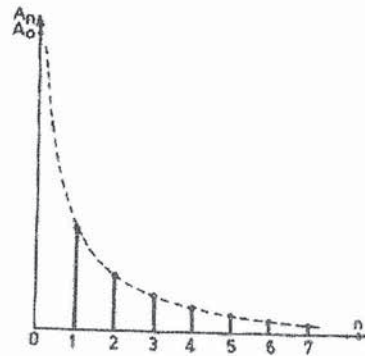


Fig.3.5. Spectrul de amplitudini al semnalului din fig.3.4.

care sunt independente de perioada T a semnalului. Se poate remarca faptul că, de data aceasta, spectrul fazelor este netrivial, adică $\varphi_n \neq 0$ pentru orice $n \geq 1$. Pe de altă parte, amplitudinile spectrale A_n scad invers proporțional cu ordinul $n \neq 0$ al armonice (arc de hiperbolă echilaterală) - fig.3.5. Amplitudinea A_0 este constantă, egală cu f_0 .

3. Semnal cosinusoidal redresat în ambele alternanțe .

Un astfel de semnal, cunoscut din electronică, are forma reprezentată în fig.3.6. Semiperioadele pozitive nu sunt afectate de redresare, însă cele negative sunt inversate. Proprietatea $F(t+T) = f(t)$ este evidentă de pe desen.

Perioada funcției cosinusoidale din care a rezultat funcția redresată era $2T$.

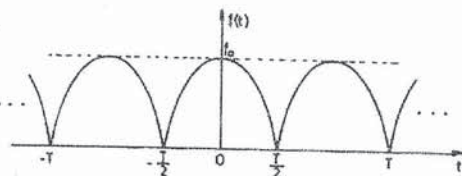


Fig.3.6. Semnal cosinusoidal redresat în ambele alternanțe.

În intervalul $-T/2 < t < +T/2$, semnalul reprezentat în figură se exprimă analitic sub forma

$$f(t) = f_0 \cos\left(\pi \frac{t}{T}\right), \quad (3.19)$$

funcția fiind pară ($f(t) = f(-t)$). Cu formulele (3.2) obținem $b_n = 0$ și

$$a_n = \pm \frac{4}{\pi(4n^2 - 1)}, \quad (3.20)$$

semnul plus corespunzând valorilor n impare ($n = 1, 3, 5, \dots$), iar semnul minus - valorilor n pare ($n = 0, 2, 4, \dots$). Prin urmare, spectrul amplitudinilor și fazelor este $A_n = |a_n|$ și $\varphi_0 = 0$. El este independent de perioada T a semnalului redresat. Se poate remarca rapida descreștere a amplitudinilor spectrale la creșterea ordinului n al armonicilor (vezi fig. 3.7), mai rapidă decât în exemplul precedent.

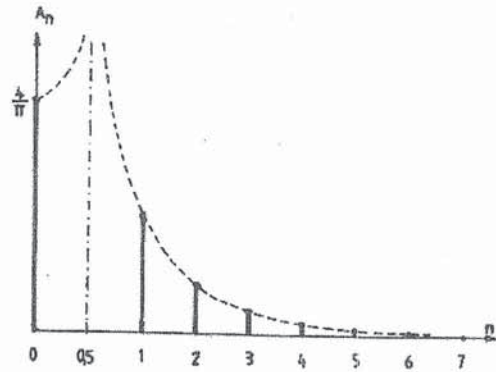


Fig.3.7. Spectrul de amplitudini al semnalului din fig. 3.6.

4. Unda dreptunghiulară.

Să considerăm unda rectangulară, de amplitudine f_0 și perioadă T , reprezentată în fig.3.8. Alegând originea timpului ca în figură, funcția $f(t)$ este impară și, în consecință, coeficienții a_n (inclusiv a_0) sunt egali cu zero. Calculul coeficienților b_n ne conduce la rezultatul

$$b_n = \frac{2f_0}{n\pi}(1 - \cos n\pi) = n\pi f_0 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } n \text{ par,} \\ \frac{4f_0}{n\pi} & \text{pentru } n \text{ impar.} \end{cases} \quad (3.21)$$

Spectrul amplitudinilor $A_n = |b_n|$ este reprezentat în fig.3.9. Remarcăm prezența

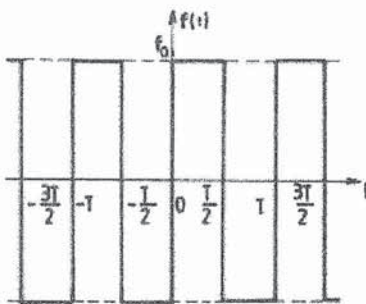


Fig.3.8. Semnal de tip "undă dreptunghiulară".

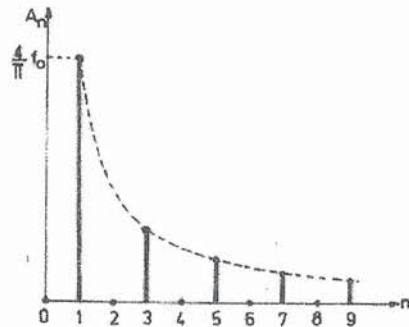


Fig.3.9. Spectrul de amplitudini al semnalului "undă dreptunghiulară".

numai a armonicilor impare, din ce în ce mai slabe (descreștere de tip $1/n$ ca în exemplul 2).

Dacă în fig.3.8 am translata originea timpului cu $\Delta t = T/4$ spre dreapta, funcția $f(t)$ ar deveni simetrică (pară); acum $b_n = 0$ și, pentru $n = 1, 2, 3, \dots$,

$$a_n = \frac{4f_0}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 2f_0 \operatorname{sinc}\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} \frac{4f_0}{n\pi} & \text{pentru } n = 1, 5, 9, \dots \\ -\frac{4f_0}{n\pi} & \text{pentru } n = 3, 7, 11, \dots \end{cases} \quad (3.22)$$

iar $a_0 = 0$ și $a_n = 0$ pentru n par. Spectrul corespunzător al amplitudinilor $A_n = |a_n|$, care conține tot numai armonice impare, este reprezentat în aceeași figură 3.9, deși seria Fourier conține acum numai termeni cu cosinus.

Cele două situații analizate se deosebesc, însă, prin spectrul de faze. Dacă în primul caz $\varphi_n = \pi/2$ pentru toate armonicele impare, în al doilea caz, $\varphi_n = 0$ pentru $n = 1, 5, 9, \dots$ și $\varphi_n = \pi$ - pentru $n = 3, 7, 11, \dots$

5. Unda triunghiulară.

Fie unda periodică

$$f(t) = \begin{cases} f_0 \left(1 + 4\frac{t}{T}\right), & \text{pentru } -\frac{T}{2} < t < 0, \\ f_0 \left(1 - 4\frac{t}{T}\right), & \text{pentru } 0 < t < +\frac{T}{2}, \end{cases} \quad (3.23)$$

reprezentată grafic în fig.3.10. Funcția $f(t)$ este pară și deci $b_n = 0$. Prin calculul direct obținem $a_0 = 0$ și

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{pentru } n \text{ par,} \\ \frac{8f_0}{\pi^2 n^2}, & \text{pentru } n \text{ impar.} \end{cases} \quad (3.24)$$

Spectrul, cu armonice impare, are $\varphi_n = 0$ și amplitudinile $A_n = |a_n| \sim 1/n^2$ (vezi fig.3.11).

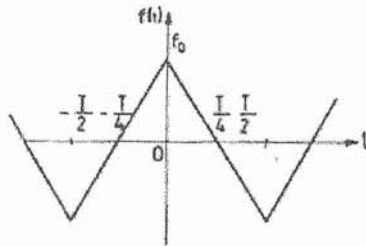


Fig.3.10. Semnal de tip "undă triunghiulară".

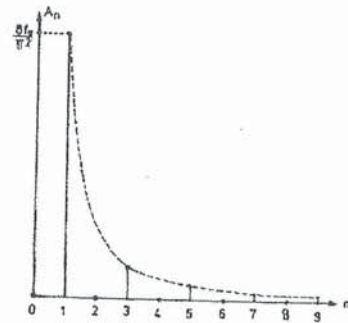


Fig.3.11. Spectrul de amplitudini al semnalului de tip "undă triunghiulară".

3. 2. 3. Integrale Fourier

În mod obișnuit, o funcție $f(t)$ neperiodică (vezi fig.3.12) nu poate fi dezvoltată în serie Fourier. Dacă însă funcția este continuă pe porțiuni, sau are un număr finit de puncte de

discontinuitate de speța întâia*, are un număr finit de extremumuri și este absolut integrabilă, ea poate fi reprezentată ca *integrală Fourier* sub forma

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos[\omega(t-\tau)] d\tau. \quad (3.25)$$

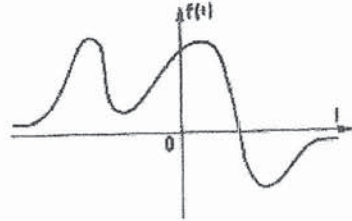


Fig.3.12. O funcție neperiodică $f(t)$ dezvoltabilă ca integrală Fourier.

Pentru a argumenta această dezvoltare putem porni de la formulele (3.1) - (3.2), valabile în cazul funcțiilor periodice de perioadă T . Presupunând că domeniul fundamental de definiție al funcției, $-T/2 \leq t \leq +T/2$, se extinde prin creșterea lui T și, la limită, când $T \rightarrow \infty$, el devine $-\infty < t < +\infty$, ajungem la concluzia că spectrul pulsațiilor $n\omega = \frac{2\pi}{T}n$, devine continuu, căci pentru $\Delta n = 1$ și $T \rightarrow \infty$ avem $2\pi/T \rightarrow 0$. Din această cauză suma din dezvoltarea (3.1) se poate transcrie ca o integrală.

Într-adevăr, substituind coeficienții (3.2) în dezvoltarea (3.1) obținem ușor

$$f(t) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(\tau) d\tau + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(\tau) \cos[n\omega(\tau-t)] d\tau. \quad (3.26)$$

Având în vedere absolut - integrabilitatea funcției $f(t)$, prima integrală din membrul drept al relației (3.26) tinde la zero când $T \rightarrow \infty$

$$\left| \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(\tau) d\tau \right| \leq \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |f(\tau)| d\tau \leq \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(\tau)| d\tau \rightarrow 0, \quad T \rightarrow \infty.$$

În al doilea termen, din același membru drept al relației (3.26), putem nota $n\omega = \Omega$ și pentru $\Delta n = 1$ avem $\Delta\Omega = \omega = 2\pi/T$. De aici, $2/T = \Delta\Omega/\pi$ și, la limită, când $T \rightarrow \infty$, $2/T \rightarrow d\Omega/\pi$, suma după n putând fi transcrisă ca o integrală. În acest fel, rezultă imediat formula (3.25), adică reprezentarea integrală Fourier.

Utilizând formulele lui Euler, invocate și în secțiunea 3.2.1, putem transcrie dezvoltarea (3.25) sub forma

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (3.27)$$

unde

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (3.28)$$

Funcțiile $f(t)$ și $F(\omega)$ formează o *pereche de transformate Fourier*. Dacă numim funcția $f(t)$ *semnal*, atunci funcția $F(\omega)$ este *imagea* sa Fourier. Imaginea Fourier $F(\omega)$ se mai numește și *spectrul complex* al funcției $f(t)$ sau pur și simplu *spectrul* funcției $f(t)$. Relațiile de mai sus se pot scrie simbolic sub forma

* Fie $t = \tau$ un astfel de punct de discontinuitate. Se spune că el este *de speța întâia* dacă limitele $f(\tau+0)$ și $f(\tau-0)$ sunt finite.

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}, \quad f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\}, \quad (3.29)$$

prima relație fiind transformarea Fourier *directă*, iar cea de-a doua - transformarea Fourier *inversă*.

Relația (3.27) se mai poate scrie și sub forma

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} [F(\omega)e^{i\omega t} + F(-\omega)e^{-i\omega t}] d\omega. \quad (3.30)$$

În cazul unor semnale $f(t)$ *reale*, avem evident $F^*(\omega) = F(-\omega)$ și atunci

$$F(\omega)e^{i\omega t} + F(-\omega)e^{-i\omega t} = F(\omega)e^{i\omega t} + [F(\omega)e^{i\omega t}]^* = 2\operatorname{Re}[F(\omega)e^{i\omega t}],$$

adică

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \operatorname{Re}[F(\omega)e^{i\omega t}] d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} [\cos \omega t \cdot \operatorname{Re}F(\omega) - \sin \omega t \cdot \operatorname{Im}F(\omega)] d\omega. \quad (3.31)$$

Scriind relația (3.31) sub forma (analoagă cu (3.9))

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} A(\omega) \cos(\omega t - \varphi(\omega)) d\omega \quad (3.32)$$

și, comparând (3.32) cu (3.31), obținem

$$A(\omega) \cos \varphi(\omega) = 2\operatorname{Re}F(\omega), \quad A(\omega) \sin \varphi(\omega) = -2\operatorname{Im}F(\omega), \quad (3.33)$$

sau invers

$$\begin{cases} A(\omega) = 2 \cdot \sqrt{(\operatorname{Re}F(\omega))^2 + (\operatorname{Im}F(\omega))^2} = 2|F(\omega)|, & \operatorname{tg} \varphi(\omega) = -\frac{\operatorname{Im}F(\omega)}{\operatorname{Re}F(\omega)}, \\ \cos \varphi(\omega) = \frac{\operatorname{Re}F(\omega)}{|F(\omega)|}, & \sin \varphi(\omega) = -\frac{\operatorname{Im}F(\omega)}{|F(\omega)|}. \end{cases} \quad (3.34)$$

Mărimile $A(\omega)$ și $\varphi(\omega)$ reprezintă *amplitudinea*, respectiv *faza* spectrului funcției *reale* $f(t)$. Se observă, deci, că spectrul complex $F(\omega)$ determină atât amplitudinea spectrală, cât și faza spectrală a semnalului $F(t)$.

Prezența factorului $1/2\pi$ în formula (3.32) ne arată că $A(\omega) = A(2\pi\nu) \equiv \tilde{A}(\nu)$ este densitatea de amplitudine relativă la frecvență ($\nu = \omega/2\pi$) și nu la pulsație (ω), căci relația (3.32) se poate scrie sub forma

$$f(t) = \int_0^{+\infty} A(2\pi\nu) \cos[2\pi\nu t - \varphi(2\pi\nu)] d\nu. \quad (3.32')$$

În cazul unor funcții $f(t)$ *complexe* (putem întâlni astfel de situații în studiul modulației optice, când, de exemplu, $f(t) \sim h(t) \cdot \exp(i\Omega t)$, cu $h(t)$ funcție reală), integrala Fourier are forma (3.30), dar $F(-\omega) \neq F^*(\omega)$. Acum, din (3.28) obținem

$$\begin{cases} \operatorname{Re}F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} [\cos \omega t \cdot \operatorname{Re}f(t) + \sin \omega t \cdot \operatorname{Im}f(t)] dt, \\ \operatorname{Im}F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} [\cos \omega t \cdot \operatorname{Im}f(t) - \sin \omega t \cdot \operatorname{Re}f(t)] dt \end{cases}, \quad (3.35)$$

unde

$$\operatorname{Re}f(t) = \frac{1}{2}(f(t) + f^*(t)), \quad \operatorname{Im}f(t) = \frac{1}{2i}(f(t) - f^*(t)). \quad (3.36)$$

Putem defini *transformata sinus* a funcției $f(t)$ prin

$$F_S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt \quad (3.37)$$

și, analog, *transformata cosinus* a funcției $f(t)$ prin

$$F_C(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt, \quad (3.38)$$

obținând

$$\begin{cases} \operatorname{Re}F(\omega) = \operatorname{Re}F_C(\omega) + \operatorname{Im}F_S(\omega) \\ \operatorname{Im}F(\omega) = \operatorname{Im}F_C(\omega) - \operatorname{Re}F_S(\omega) \end{cases} \quad (3.39)$$

adică

$$F(\omega) = \operatorname{Re}F(\omega) + i\operatorname{Im}F(\omega) = F_C(\omega) - iF_S(\omega), \quad (3.40)$$

cu $F_C(\omega)$ și $F_S(\omega)$ la rândul lor funcții complexe. Prin urmare, spectrul complex $F(\omega)$ se poate determina ușor, prin calcularea separată a transformatelor sinus ($F_S(\omega)$) și cosinus ($F_C(\omega)$).

Din definițiile (3.37) și (3.38) observăm următoarele *proprietăți de paritate*

$$F_S(-\omega) = -F_S(\omega) \quad \text{și} \quad F_C(-\omega) = F_C(\omega), \quad (3.41)$$

adică $F_C(\omega)$ este o funcție *pară*, iar $F_S(\omega)$ - o funcție *impară*. Din aceleași relații rezultă că dacă funcția $f(t)$ este o funcție *pară*, adică $f(t) = f(-t)$, atunci

$$F_S(\omega) = 0 \quad \text{și} \quad F_C(\omega) = 2 \int_0^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt, \quad (3.42)$$

iar dacă funcția $f(t)$ este *impară*, adică $f(t) = -f(-t)$, atunci

$$F_C(\omega) = 0 \quad \text{și} \quad F_S(\omega) = 2 \int_0^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt. \quad (3.43)$$

Având în vedere relația (3.40) rezultă că, în cazul funcțiilor $f(t)$ *pare*, amplitudinea $A(\omega)$ și faza $\varphi(\omega)$ ale spectrului, se calculează direct cu formulele (3.34) în care $F(\omega) = F_C(\omega)$; în cazul funcțiilor $f(t)$ *impare*, din expresia (3.40) avem $F(\omega) = -iF_S(\omega) = -\text{Im}F_S(\omega) - i\text{Re}F_S(\omega)$ și formulele (3.34) ne dau

$$A(\omega) = 2|F_S(\omega)|, \quad \text{tg}\varphi(\omega) = \frac{\text{Re}F_S(\omega)}{\text{Im}F_S(\omega)} \quad (3.34')$$

căci $\text{Re}F(\omega) = \text{Im}F_S(\omega)$ și $\text{Im}F(\omega) = -\text{Re}F_S(\omega)$.

Dacă funcția complexă $f(t)$ este arbitrară și nu are proprietăți de paritate, ea se poate descompune sub forma

$$f(t) = f_p(t) + f_i(t) \quad (3.44)$$

cu

$$f_p(t) = \frac{1}{2}(f(t) + f(-t)), \quad f_i(t) = \frac{1}{2}(f(t) - f(-t)) \quad (3.45)$$

și se analizează Fourier ca mai sus, separat prin partea sa pară $f_p(t)$, respectiv impară $f_i(t)$.

Înainte de a merge mai departe, este necesar să elucidăm problema pulsațiilor negative, care au fost introduse în mod tacit, cu ocazia dezvoltărilor în formă complexă (vezi (3.3) și (3.27)). După cum se știe, numărul complex $\exp(i\omega t) = \cos\omega t + i\sin\omega t$ se poate reprezenta ca un vector unimodular, cu originea în originea comună a axelor Ox (axa reală) și Oy (axa imaginară), care, la creșterea lui t (timpul) se rotește în sens pozitiv (trigonometric) cu viteza unghiulară ω . Acest sens pozitiv este asociat sensului (Oz) în care înaintează un burghiu drept care se rotește astfel încât să aducă axa Ox peste axa Oy pe drumul cel mai scurt. Numărul complex $\exp(-i\omega t) = \cos\omega t - i\sin\omega t$, care se obține din cel anterior prin înlocuirea $\omega \rightarrow -\omega$, se reprezintă ca un vector unimodular care, la creșterea lui t (timpul), se rotește, cu viteza unghiulară ω în sens negativ (sens orar). Observăm că în formula (3.27), în care variabila de integrare ω ia valori de la $-\infty$ la $+\infty$, spectrul complex $F(\omega)$ va avea și argumente pozitive și argumente negative. În virtutea celor de mai sus, pentru $\omega > 0$, $F(\omega)$ descrie densitatea spectrală a componentelor de pulsație ω care se rotesc în sens pozitiv iar $F(-\omega)$ descrie densitatea spectrală a componentelor de aceeași pulsație ω care se rotesc în sens negativ (vezi și fig.3.13).

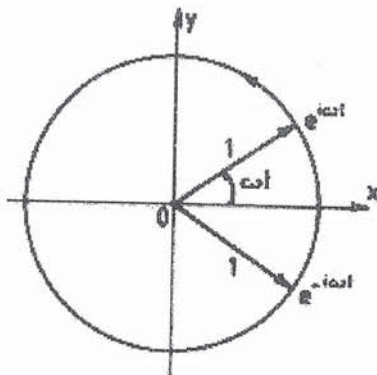


Fig.3.13. Vectorii unimodulari $\exp(\pm i\omega t)$.

Să trecem acum la enunțarea și demonstrarea așa-numitelor *teoreme de deplasare*:

1. Dacă spectrul funcției $f(t)$ este $F(\omega)$, atunci spectrul funcției $f(t-T)$ este $\exp(-i\omega T)F(\omega)$ sau, simbolic

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\omega) \Rightarrow \mathcal{F}\{f(t-T)\} = \exp(-i\omega T)F(\omega); \quad (3.46)$$

2. Dacă semnalul reprezentat de $F(\omega)$ este $f(t)$, atunci semnalul reprezentat de $F(\omega - \Omega)$ este $\exp(i\Omega t)f(t)$, adică

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} \Rightarrow \exp(i\Omega t)f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega - \Omega)\}. \quad (3.47)$$

Prima teoremă se demonstrează în felul următor: Să notăm prin $F_{-T}(\omega)$ transformata Fourier a funcției $f(t - T)$. Avem

$$F_{-T}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - T)e^{-i\omega T} dt$$

și, cu schimbarea de variabilă $t' = t - T$, obținem imediat $F_{-T}(\omega) = \exp(-i\omega T)F(\omega)$, adică tocmai rezultatul (3.46).

Analog, introducând notația

$$f_{-\Omega}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega - \Omega)e^{i\omega t} d\omega$$

și făcând schimbarea de variabilă $\omega' = \omega - \Omega$ obținem $f_{-\Omega}(t) = \exp(i\Omega t)f(t)$, adică tocmai rezultatul (3.47).

De importanță practică deosebită sunt și așa-numitele *teoreme de dualitate*:

3. Dacă spectrul funcției $f(t)$ este $F(\omega)$, atunci spectrul funcției $F(t)$ este $2\pi f(-\omega)$, sau simbolic

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\omega) \Rightarrow \mathcal{F}\{F(t)\} = 2\pi f(-\omega); \quad (3.48)$$

4. Dacă semnalul reprezentat de $F(\omega)$ este $f(t)$, atunci semnalul reprezentat de $f(\omega)$ este $\frac{1}{2\pi}F(-t)$, adică

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} \Rightarrow \frac{1}{2\pi}F(-t) = \mathcal{F}^{-1}\{f(\omega)\}. \quad (3.49)$$

Demonstrația celor două teoreme este directă. Scriind, conform ipotezelor din enunț, relația (3.27) și schimbând $t \rightarrow -t$ avem

$$f(-t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{-i\omega t} d\omega.$$

Dacă aici schimbăm între ele variabilele t și ω și înmulțim în ambele părți cu 2π obținem

$$2\pi f(-\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t)e^{-i\omega t} dt,$$

rezultat ce demonstrează teorema 3 (adică relația (3.48)).

Pornind de la formula (3.28) și schimbând $\omega \rightarrow -\omega$ avem

$$F(-\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i\omega t} dt.$$

Intervertind aici variabilele t și ω și împărțind apoi în ambele părți prin 2π obținem

$$\frac{1}{2\pi}F(-t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega)e^{i\omega t} d\omega,$$

rezultat ce demonstrează teorema 4 (relația 3.49).

Având în vedere *liniaritatea* operațiilor implicate de formulele (3.27) și (3.28), putem ajunge direct la *teorema superpoziției*:

5. Dacă $(f_1(t); F_1(\omega))$, respectiv $(f_2(t); F_2(\omega))$ sunt două perechi de transformate Fourier, expresia $c_1F_1(\omega) + c_2F_2(\omega)$ este transformata Fourier a expresiei $c_1f_1(t) + c_2f_2(t)$, unde c_1, c_2 sunt numere complexe arbitrare.

O altă proprietate importantă, care rezultă direct din formulele (3.27), (3.28) este cea de *simetrie*:

6. Dacă $F(\omega)$ este imaginea Fourier a semnalului $f(t)$, imaginea Fourier a funcției $f^*(t)$ este $F^*(-\omega)$. Simbolic, această proprietate se exprimă sub forma

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} \Rightarrow F^*(-\omega) = \mathcal{F}\{f^*(t)\}. \quad (3.50)$$

În acest context, să analizăm câteva cazuri particulare:

a) Dacă $f(t)$ este funcție *reală*, adică $f^*(t) = f(t)$, atunci

$$F^*(-\omega) = F(\omega) \text{ sau } F^*(\omega) = F(-\omega).$$

b) Dacă $f(t)$ este o funcție *reală și pară*, atunci

$$f(t) = f^*(t) = f(-t) = f^*(-t) \text{ și deci } F(\omega) = F(-\omega) = F^*(-\omega) = F^*(\omega),$$

adică funcția $F(\omega)$ este, la rândul său, *reală și pară*.

c) Dacă $f(t)$ este o funcție *reală și impară*, adică $f(t) = -f(-t) = -f^*(-t) = f^*(t)$, atunci $F(\omega) = F^*(-\omega) = -F(-\omega) = -F^*(\omega)$. Funcția $F(\omega)$ este deci *impară și pur imaginară*.

d) Dacă $f(t)$ este o funcție *pur imaginară*, adică $f^*(t) = -f(t)$, atunci $F^*(-\omega) = -F(\omega)$ sau $F^*(\omega) = -F(-\omega)$.

Să trecem acum la demonstrarea *teoremei transformării de scală*:

7. Dacă a este un număr *real* și $F(\omega)$ este imaginea Fourier a semnalului $f(t)$, atunci transformata Fourier a funcției $f(at)$ este $\frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$. Simbolic avem

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} \Rightarrow \frac{1}{|a|} \cdot F\left(\frac{\omega}{a}\right) = \mathcal{F}\{f(at)\}. \quad (3.51)$$

Demonstrația teoremei pornește de la relația (3.28) scrisă pentru funcția $f(at)$. Cu schimbarea de variabilă $t' = at$, pentru $a > 0$ obținem

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(at)e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t')e^{-i\frac{\omega}{a}t'} dt' = \frac{1}{a}F\left(\frac{\omega}{a}\right) = \frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

Analog, în cazul $a < 0$ obținem

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(at)e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{a} \int_{+\infty}^{-\infty} f(t')e^{-i\frac{\omega}{a}t'} dt' = -\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t')e^{-i\frac{\omega}{a}t'} dt' = -\frac{1}{a}F\left(\frac{\omega}{a}\right) = \frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

Prin urmare, dilatarea scalei temporale, înseamnă contractarea scalei pulsațiilor și invers. În particular, pentru $a = -1$, rezultă că transformata Fourier a funcției $f(-t)$ este $F(-\omega)$.

Această teoremă reprezintă o formulare generală a *relațiilor de incertitudine* introduse de W. Heisenberg în mecanica cuantică. Într-adevăr, lărgimea "ferestrei" temporale (durata trenului de unde) se află în raport de invers proporționalitate cu "fereastra" spectrală (energetică) corespunzătoare.

8. O problemă practică de mare importanță este cea a stabilirii transformatei Fourier pentru *derivata* unei funcții. Fie $(f(t); F(\omega))$ o pereche Fourier cunoscută. Care este transformata Fourier a derivatei $f'(t)$ a funcției $f(t)$? Răspunsul se poate găsi ușor, derivând în raport cu t în ambele părți ale relației (3.27). Avem

$$f'(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} i\omega F(\omega)e^{i\omega t} d\omega. \quad (3.52)$$

Comparând (3.52) cu (3.27) rezultă că transformata Fourier a funcției $f'(t)$ este $i\omega F(\omega)$. Acest rezultat se poate extinde imediat la derivatele de ordin superior scriind în mod simbolic

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\omega) \Rightarrow \mathcal{F}\{f^{(n)}(t)\} = (i\omega)^n F(\omega), \quad (3.53)$$

sau invers

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} = f(t) \Rightarrow \mathcal{F}^{-1}\{(i\omega)^n F(\omega)\} = f^{(n)}(t). \quad (3.54)$$

Ultima corespondență este adevărată numai în cazul în care derivata $f^{(n)}(t)$ există. Pentru aceasta este necesar și suficient ca funcția $t^n f(t)$ să fie absolut integrabilă.

9. *Transformata Fourier a unei integrale.* Vom demonstra acum următoarea proprietate:

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\omega) \Rightarrow \mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^t f(x) dx\right\} = \frac{F(\omega)}{i\omega}. \quad (3.55)$$

Să notăm

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx$$

și fie $\phi(\omega)$ transformata Fourier a funcției $\varphi(t)$, adică $\mathcal{F}\{\varphi(t)\} = \phi(\omega)$. Din relația de mai sus rezultă

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = f(t).$$

Conform proprietății 8 și ipotezei din enunțul (3.55), transformatele Fourier corespunzătoare sunt legate prin relația

$$i\omega\phi(\omega) = F(\omega) \text{ adică } \phi(\omega) = \frac{F(\omega)}{i\omega}.$$

10. *Derivarea în raport cu pulsația.* Să derivăm relația (3.28) în raport cu ω , de n ori. Avem

$$F^{(n)}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)(-it)^n e^{-i\omega t} dt,$$

adică

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\omega) \Rightarrow \mathcal{F}\{t^n f(t)\} = \frac{F^{(n)}(\omega)}{(-i)^n}. \quad (3.56)$$

11. *Teorema momentelor.* Prin definiție, mărimea

$$m_n = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n f(t) dt, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.57)$$

se numește *moment de ordinul n* al funcției $f(t)$. Se observă că m_0 este transformata Fourier a funcției $f(t)$ luată pentru $\omega = 0$, adică $m_0 = F(0)$. Teorema momentelor afirmă că

$$m_n = \frac{1}{(-i)^n} \left(\frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n} \right)_{\omega=0} \equiv \frac{F^{(n)}(0)}{(-i)^n}. \quad (3.58)$$

Valabilitatea relației (3.58) pentru $n = 0$ a fost arătată mai sus. Să analizăm acum cazul $n \neq 0$, dezvoltând în serie de puteri (Taylor) funcțiile $\exp(-i\omega t)$ și $F(\omega)$. Avem

$$e^{-i\omega t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\omega t)^n}{n!}, \quad F(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{(n)}(0) \frac{\omega^n}{n!}.$$

Relația (3.28) se poate scrie deci sub forma

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\omega t)^n}{n!} \right] dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\omega)^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} t^n f(t) dt = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \frac{\omega^n}{n!} m_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega^n}{n!} F^{(n)}(0). \end{aligned}$$

De aici, rezultă imediat proprietatea conținută în enunțul (3.58) al teoremei momentelor. Relația (3.58) este adevărată dacă momentele funcției $f(t)$ sunt finite. Afirmația inversă nu este adevărată; existența derivatelor $F^{(n)}(0)$ nu garantează caracterul finit al momentelor m_n .

12. *Proprietăți de simetrie ale modului și fazei imaginii Fourier*

Fie $f(t)$ o funcție *reală* a cărei transformată Fourier poate fi transcrisă sub forma

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \equiv \mathcal{A}(\omega) e^{i\Phi(\omega)}, \quad (3.59)$$

$\mathcal{A}(\omega)$ și $\Phi(\omega)$ fiind *modulul* (real), respectiv *faza* (reală) ale funcției $F(\omega)$. Să demonstrăm că $\mathcal{A}(\omega)$ este o funcție pară iar $\Phi(\omega)$ - o funcție *impară* de argumentul ω . Ultima afirmație implică relația $\Phi(0) = 0$.

Pornim de la relația (3.59) și facem transformarea $\omega \rightarrow -\omega$. Obținem

$$F(-\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega t} dt = \mathcal{A}(-\omega) e^{i\Phi(-\omega)}.$$

Conform teoremei 6, pentru funcțiile $f(t)$ *reale* avem $F(-\omega) = F^*(\omega)$ și deci

$$F(-\omega) = \mathcal{A}(-\omega) e^{i\Phi(-\omega)} = \mathcal{A}(\omega) e^{-i\Phi(\omega)} \equiv F^*(\omega).$$

De aici rezultă

$$\mathcal{A}(-\omega) = \mathcal{A}(\omega), \quad \Phi(-\omega) = -\Phi(\omega). \quad (3.60)$$

Importanța teoremei rezidă în următoarele: *în cazul unui semnal real pulsațiile negative nu conțin nici o informație suplimentară față de cele pozitive.*

Să corelăm acum funcțiile $\mathcal{A}(\omega)$ și $\Phi(\omega)$ de momentele m_n definite prin relația (3.57). Dacă dezvoltăm în serie de puteri funcțiile $\mathcal{A}(\omega)$ și $\Phi(\omega)$, din (3.60) urmează că, în primul caz, seria conține numai puteri pare ale lui ω iar, în al doilea caz - numai puteri impare ale lui ω . Fie

$$\mathcal{A}(\omega) = a_0 + \frac{a_2}{2!} \omega^2 + \dots, \quad \Phi(\omega) = b_1 \omega + \frac{b_3}{3!} \omega^3 + \dots,$$

a_0, a_2, \dots respectiv b_1, b_3, \dots fiind coeficienții dezvoltărilor respective. Corespunzător,

$$e^{i\Phi(\omega)} = 1 + i\Phi(\omega) + \dots = 1 + ib_1 \omega + i \frac{b_3}{3!} \omega^3 + \dots$$

și din (3.59) obținem

$$F(\omega) = \left(a_0 + \frac{a_2}{2!} \omega^2 + \dots \right) \left(1 + ib_1 \omega + i \frac{b_3}{3!} \omega^3 + \dots \right) = a_0 + ia_0 b_1 \omega + \frac{a_2 - a_0 b_1^2}{2!} \omega^2 + \dots$$

De aici rezultă

$$a_0 = F(0), \quad ia_0 b_1 = F'(0), \quad a_2 - a_0 b_1^2 = F''(0), \dots$$

sau

$$a_0 = m_0, \quad -a_0 b_1 = m_1, \quad a_0 b_1^2 - a_2 = m_2, \dots$$

Prin urmare

$$b_1 = -\frac{m_1}{a_0} = -\frac{m_1}{m_0}, \quad a_2 = \frac{m_1^2}{m_0} - m_2, \dots \quad (3.61)$$

adică toți coeficienții de dezvoltare în serie a funcțiilor $\mathcal{A}(\omega)$ și $\Phi(\omega)$ se pot corela de momentele funcției $f(t)$.

Prin definiție, mărimile

$$t_0 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt} = \frac{m_1}{m_0} \quad (3.62)$$

și

$$\sigma^2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} (t-t_0)^2 f(t)dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt} = \frac{m_2 m_0 - m_1^2}{m_0^2} \quad (3.63)$$

se numesc *coordonata centrului* semnalului $f(t)$, respectiv *abaterea pătratică medie* (*dispersia*) a semnalului $f(t)$ de la centrul determinat de t_0 . Ținând cont de relațiile stabilite mai sus, rezultă imediat

$$t_0 = -b_1 = -\frac{d\Phi(0)}{d\omega} \quad (3.64)$$

și

$$\sigma^2 = -\frac{a_2}{a_0} = -\frac{1}{\mathcal{A}(0)} \cdot \frac{d^2 \mathcal{A}(0)}{d\omega^2}. \quad (3.65)$$

Se desprinde ușor concluzia că derivata de ordinul întâi a fazei $\Phi(\omega)$, cu semn schimbat, luată pentru $\omega = 0$, determină centrul semnalului $f(t)$ iar expresia $-\mathcal{A}'(0)/\mathcal{A}(0)$, calculată cu ajutorul amplitudinii $\mathcal{A}(\omega)$, determină dispersia semnalului față de centrul său.

3. 2. 4. Exemple tipice de transformate Fourier

În același mod în care seriile Fourier, respectiv coeficienții a_n, b_n prezenți în acestea, ne dau posibilitatea analizării spectrale a funcțiilor periodice, integralele Fourier se dovedesc a fi extrem de utile în studiul fenomenelor (semnalelor) neperiodice și tranzitorii. Acest subparagraf ne va face cunoștință cu câteva exemple tipice, întâlnite în optică sau în alte capitole ale fizicii.

1. Impulsul dreptunghiular izolat

Fie funcția $f(t)$ definită sub forma

$$f(t) = \begin{cases} f_0 & \text{pentru } -T/2 \leq t \leq +T/2 \text{ cu } f_0 > 0, \\ 0 & \text{în rest} \end{cases} \quad (3.66)$$

și reprezentată grafic în fig.3.14. Transformata sa Fourier $F(\omega)$, calculată cu ajutorul formulei (3.28), este

$$F(\omega) = f_0 T \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T}{2}\right). \quad (3.67)$$

Această funcție se anulează pentru $\omega T = 2m\pi$, cu $m = 1, 2, 3, \dots$ adică pentru $\omega = 2m\pi/T$. Pentru $\omega = 0$, sinusul cardinal este egal cu 1 și deci $F(0) = f_0 T$. Când ω crește continuu numărătorul sinusului cardinal oscilează mereu între -1 și +1 în timp ce numitorul său

($\omega T/2$) crește liniar. De aceea, oscilațiile funcției sinc($\omega T/2$) se amortizează și, în cele din urmă, pentru $\omega \rightarrow \pm\infty$, se anulează (vezi fig.3.15). Conform formulelor (3.34) avem amplitudinea spectrală $A(\omega) = 2|F(\omega)| > 0$ și faza spectrală $\varphi(\omega) = 0$.

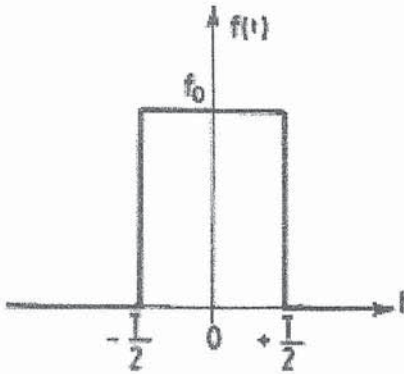


Fig.3.14. Funcția "impuls dreptunghiular izolat".

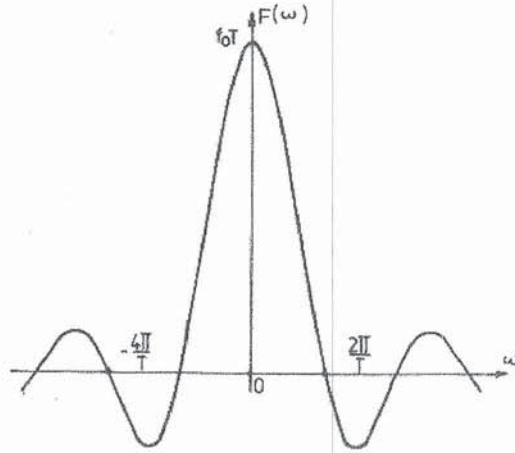


Fig.3.15. Transformata Fourier a funcției reprezentate în figura anterioară.

2. Funcția exponențială descrescătoare

Să determinăm spectrul de amplitudini și faze pentru funcția

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } -\infty < t < 0, \\ f_0 e^{-t/\tau} & \text{pentru } 0 < t < +\infty, \quad f_0 > 0, \tau > 0, \end{cases} \quad (3.68)$$

al cărei grafic este redat în fig. 3.16. Cu ajutorul formulei (3.28) obținem

$$F(\omega) = \frac{f_0 \tau}{1 + i\omega\tau} = f_0 \tau \cdot \frac{1 - i\omega\tau}{1 + \omega^2 \tau^2}. \quad (3.69)$$

De aici rezultă

$$\operatorname{Re}F(\omega) = \frac{f_0 \tau}{1 + \omega^2 \tau^2}, \quad \operatorname{Im}F(\omega) = -\frac{f_0 \omega \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2} \quad (3.70)$$

și apoi

$$A(\omega) = 2|F(\omega)| = \frac{2f_0 \tau}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \quad (3.71)$$

respectiv

$$\operatorname{tg}\varphi(\omega) = \omega\tau. \quad (3.72)$$

Dacă avem în vedere definițiile (3.62) - (3.63) și relațiile (3.64) - (3.65), pentru centrul și abaterea pătratică medie a semnalului (3.68) obținem

$$t_0 = -\Phi'(0) = \tau, \quad \sigma^2 = \frac{A''(0)}{A(0)} = \tau^2. \quad (3.73)$$

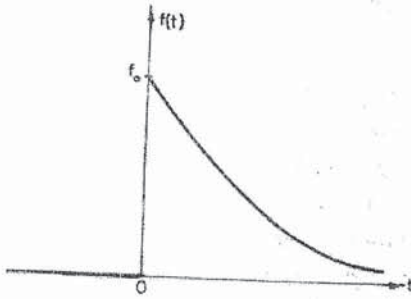


Fig.3.16. Funcția "exponențială descrescătoare".

În figura 3.17 se dau reprezentările grafice ale funcțiilor $A(\omega)$ și $\varphi(\omega)$ pentru un anumit τ_0 . Când τ crește, maximul funcției $A(\omega)$ se înalță iar grosimea "liniei de rezonanță" se îngustează căci $\Delta\omega = 2\sqrt{3}/\tau$.

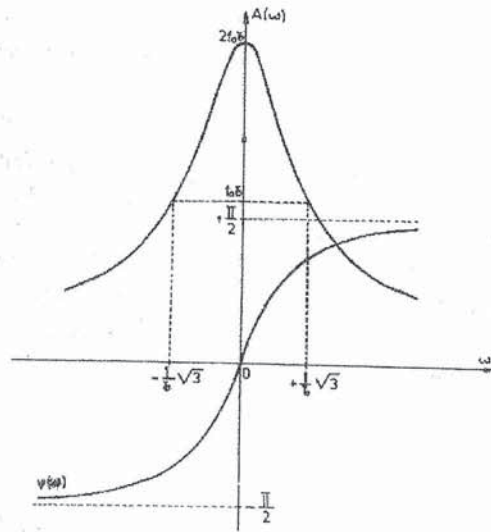


Fig.3.17. Amplitudinea și faza spectrului funcției $f(t)$ din (3.68).

3. Funcția gaussiană

Prin definiție, funcția $f(t) = f_0 \cdot \exp(-t^2/\tau^2)$ cu t aparținând intervalului $(-\infty; +\infty)$ se numește funcție gaussiană și îndeplinește toate condițiile cerute pentru ca dezvoltarea (3.27) să poată fi scrisă. Pentru determinarea imaginii sale Fourier $F(\omega)$ ne folosim de integrala lui Poisson bine-cunoscută

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/\tau^2} dt = \tau\sqrt{\pi}. \quad (3.74)$$

Prin derivarea acestei relații în ambele părți, de n ori, în raport cu $1/\tau^2$, obținem

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^{2n} \cdot e^{-t^2/\tau^2} dt = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi} \cdot \tau^{2n+1}. \quad (3.75)$$

Din cauza imparității integrandului pe intervalul $(-\infty; +\infty)$, avem de asemenea

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^{2n-1} \cdot e^{-t^2/\tau^2} dt = 0. \quad (3.76)$$

Având în vedere definiția (3.57) a momentelor de ordinul n , constatăm că relațiile (3.75), (3.76), înmulțite cu f_0 , sunt momentele de ordin par, respectiv impar, ale funcției

gaussiene, ultimele fiind evident nule. Conform cu (3.64) și (3.65), coordonata centrului, respectiv abaterea pătratică medie a semnalului gaussian sunt $t_0 = 0$ și $\sigma^2 = \tau^2/2$.

Din (3.28'), sau direct din (3.28) și (3.74), obținem

$$F(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \frac{\omega^n}{n!} m_n = f_0 \sqrt{\pi} \tau \exp\left(-\frac{\omega^2 \tau^2}{4}\right). \quad (3.77)$$

Comparând expresia spectrului $F(\omega)$ cu semnalul $f(t)$ ajungem la concluzia că ele sunt *autoreciproce*. Avem evident $A(\omega) = 2|F(\omega)|$ și $\varphi(\omega) = 0$.

Este interesant de remarcat că funcția gaussiană face parte dintr-o clasă mai largă de funcții, anume din *clasa funcțiilor lui Hermite*

$$H_n(t) = \frac{d^n}{dt^n} \left(e^{-t^2/\tau^2} \right). \quad (3.78)$$

Se observă că funcția $f(t)$ considerată mai sus este chiar $f_0 \cdot H_0(t)$. Pentru calcularea transformatei Fourier corespunzând lui $H_n(t)$ se utilizează direct expresia (3.77) și proprietatea (3.53).

4. Semnal cosinusoidal de durată finită

Fie funcția $f(t)$ definită prin

$$f(t) = \begin{cases} f_0 \cos \omega_0 t, & \text{pentru } -T/2 \leq t \leq +T/2, \\ 0, & \text{pentru } |t| > T/2 \end{cases} \quad (3.79)$$

și reprezentată grafic în fig.3.18. La prima vedere, acest semnal pare a fi monocromatic, de pulsație ω_0 . Totuși, după cum ne vom putea convinge, din cauză că durata sa este finită, semnalul nu este monocromatic. Spectrul său se obține din relația (3.28), restrânsă ca integrală definită de la $-T/2$ la $+T/2$. Observând că funcția $f(t)$ este pară, putem scrie $F(\omega) = F_c(\omega)$ și, prin calcul direct rezultă

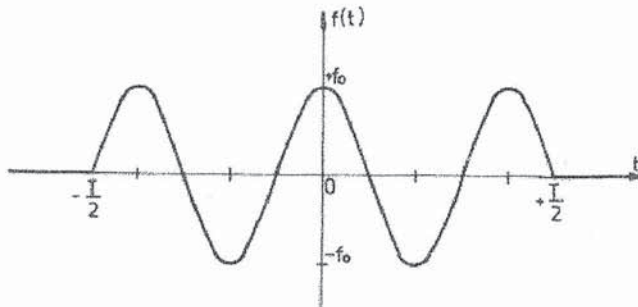


Fig.3.18. Semnal cosinusoidal de durată finită.

$$F(\omega) = f_0 \int_{-T/2}^{+T/2} \cos \omega_0 t \cdot \cos \omega t \cdot dt = f_0 \frac{T}{2} \left[\operatorname{sinc}\left(\frac{T}{2}(\omega - \omega_0)\right) + \operatorname{sinc}\left(\frac{T}{2}(\omega + \omega_0)\right) \right]. \quad (3.80)$$

Numărul de perioade $T_0 = 2\pi/\omega_0$ cuprinse în durata T a impulsului este $T/T_0 = \omega_0 T/2\pi$. Dacă acest număr este mare, al doilea termen din (3.80) este neglijabil de mic, în domeniul $\omega > 0$, și spectrul $F(\omega)$ este dat numai de primul termen, adică de curba sinc x centrată pe $\omega = \omega_0$. Invers, dacă $\omega_0 T/2\pi$ este mic, adică în durata T a impulsului sunt cuprinse un număr mic de perioade T_0 (fie din cauză că ω_0 este mic fie pentru că T este mic), atunci al doilea termen din (3.80) aduce o contribuție importantă la $F(\omega)$ și curba respectivă își schimbă forma. De exemplu, în cazul $\omega_0 T = \pi$, adică $\omega_0 T/2\pi = 1/2$, avem un singur semi-ciclu (vezi fig.3.19) și din (3.80) rezultă

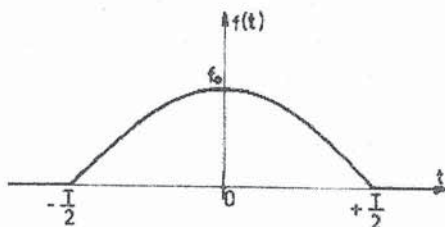


Fig.3.19. O singură alternanță a semnalului cosinusoidal ($|t| \leq T/2$).

$$F(\omega) = 2f_0 \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos\left(\frac{\pi \omega}{2 \omega_0}\right). \quad (3.81)$$

Maximul principal al acestei funcții se obține pentru $\omega = 0$ și are valoarea $2f_0/\omega_0$. Prin ridicarea nedeterminării, pentru $\omega \rightarrow \omega_0$ rezultă $F(\omega_0) = \pi f_0/2\omega_0$. Spectrul $F(\omega)$ se anulează în punctele în care $\omega = \pm(2m+1)\omega_0$ cu $m = 1, 2, 3, \dots$. Numărătorul său rămânând finit, cuprins între $-2f_0\omega_0$ și $+2f_0\omega_0$, iar numitorul crescând în valoare absolută odată cu creșterea lui $|\omega|$, rezultă că $|F(\omega)|$ descrește necontenit și, când $|\omega| \rightarrow \infty$, $|F(\omega)| \rightarrow 0$ (vezi fig.3.20).

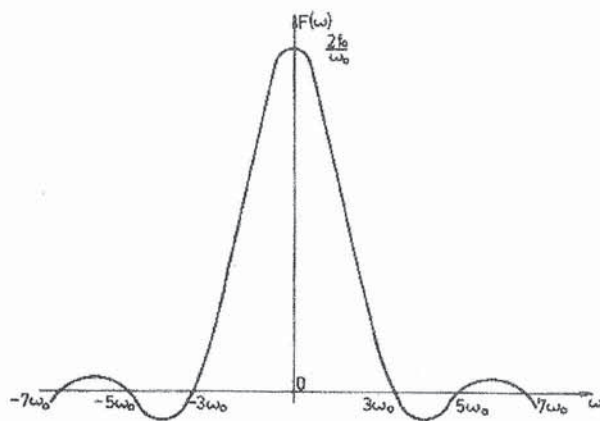


Fig.3.20. Funcția $F(\omega)$ dată prin formula (3.81).

Revenind la cazul general, observăm că spectrul $F(\omega)$, dat de relația (3.80), este format din două curbe de forma sinc x , una centrată în punctul $\omega = \omega_0$, iar cealaltă în punctul $\omega = -\omega_0$. Când ω_0 scade, aceste curbe se apropie de origine, una venind din stânga iar cealaltă din dreapta.

La valori foarte mari ale produsului $\omega_0 T$ (în comparație cu 2π) cele două ramuri sunt independente (fig.3.21). Ramura centrată

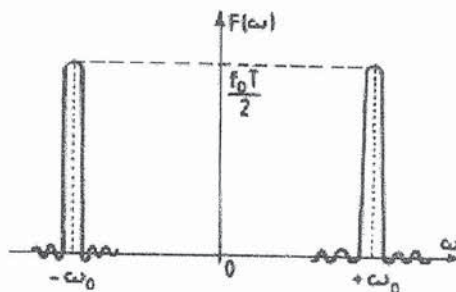


Fig.3.21. Funcția $F(\omega)$ dată prin formula (3.80) în cazul $\omega_0 T \gg 2\pi$.

pe $\omega = -\omega_0$ devine neglijabil de mică pe domeniul în care ramura centrată pe $\omega = +\omega_0$ este importantă.

Când $\omega_0 T$ scade, la un moment dat, se ajunge la situația în care cele două curbe încep să se suprapună, astfel încât, curba centrată $\omega = -\omega_0$ are și ea o valoare apreciabilă în domeniul pe care este importantă cealaltă curbă, centrată pe $\omega = +\omega_0$, și reciproc. Din acest moment, adică începând cu punctul în care încălecarea devine importantă, forma curbei spectrale $F(\omega)$ nu mai este determinată de un singur sinus cardinal, ci de rezultatul adunării lor. Cazul particular $\omega_0 T = \pi$, analizat mai sus, corespunde situației în care componenta continuă ($\omega = 0$) începe să domine asupra componentelor spectrale propriu-zise ($\omega \neq 0$).

5. Impulsul triunghiular

Fie semnalul

$$f(t) = \begin{cases} f_0 \left(1 - \frac{|t|}{\tau}\right), & \text{pentru } |t| < \tau, \\ 0, & \text{pentru } |t| > \tau, \end{cases} \quad (3.82)$$

reprezentat grafic în fig.3.22. Utilizând formula (3.28), pentru spectrul $F(\omega)$ obținem

$$F(\omega) = f_0 \tau \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right), \quad (3.83)$$

funcție care este reprezentată grafic în fig.3.23. Ecuația $F(\omega) = 0$ are soluțiile $\omega = \pm 2m\pi/\tau$ cu $m = 1, 2, 3, \dots$. Maximele secundare, dintre minimele nule, localizate aproximativ la $\omega = \pm \frac{\pi}{\tau}(2m + 1)$, cu $m = 1, 2, 3, \dots$ au înălțimi foarte mici în comparație cu maximul principal $F(0) = f_0 \tau$. Observăm că amplitudinea spectrală $A(\omega) = 2|F(\omega)|$ are valori semnificative numai pentru $|\omega| < 2\pi/\tau$.

Funcția $F(\omega)$ fiind reală, faza spectrală $\varphi(\omega)$ este peste tot nulă.

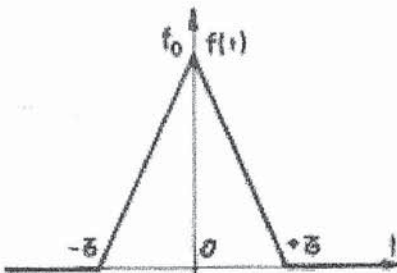


Fig.3.22. Impuls triunghiular.

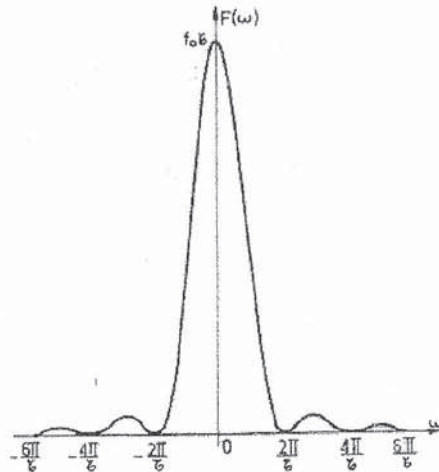


Fig.3.23. Funcția $F(\omega)$ dată prin formula (3.83).

6. Semnal armonic, amortizat

Să considerăm semnalul

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{pentru } t < 0, \\ f_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right) \sin\left(\frac{t}{\tau_2}\right), & \text{pentru } t > 0, \end{cases} \quad (3.84)$$

cu $\tau_1 > 0$, $\tau_2 > 0$, a cărui formă este reprezentată în fig.3.24. Cu ajutorul formulei (3.28), în urma unor calcule destul de laborioase, obținem spectrul complex

$$F(\omega) = \frac{f_0}{\tau_2} \cdot \frac{\frac{1}{\tau_1^2} + \frac{1}{\tau_2^2} - \omega^2 - i\frac{2\omega}{\tau_1}}{\left(\frac{1}{\tau_1^2} + \frac{1}{\tau_2^2} - \omega^2\right)^2 + \frac{4\omega^2}{\tau_1^2}}, \quad (3.85)$$

pentru care avem amplitudinea spectrală

$$A(\omega) = 2|F(\omega)| = \frac{1}{\tau_2} \cdot \frac{2f_0}{\left[\left(\frac{1}{\tau_1^2} + \frac{1}{\tau_2^2} - \omega^2\right)^2 + \frac{4\omega^2}{\tau_1^2}\right]^{1/2}} \quad (3.86)$$

și faza spectrală

$$\varphi(\omega) = \arctg \left[\frac{2\omega}{\tau_1 \left(\frac{1}{\tau_1^2} + \frac{1}{\tau_2^2} - \omega^2\right)} \right]. \quad (3.87)$$

Pentru a reprezenta grafic funcțiile $A(\omega)$ și $\varphi(\omega)$ să considerăm cazul $\tau_2 < \tau_1$ (al amortizării lente). Rezolvând ecuația $A'(\omega) = 0$ obținem $\omega = 0$ și $\omega_m^2 = \tau_2^{-2} - \tau_1^{-2}$. Corespunzător,

$$A(0) = \frac{2f_0 \tau_1^2 \cdot \tau_2}{\tau_1^2 + \tau_2^2}, \text{ respectiv } A(\pm\omega_m) = f_0 \cdot \tau_1.$$

Se observă că $A(0) < A(\pm\omega_m)$ ceea ce ne arată că la $\omega = 0$ avem un minim iar la $\omega = \pm\omega_m = \pm\sqrt{\tau_2^{-2} - \tau_1^{-2}}$ - maxime ale amplitudinii spectrale $A(\omega)$. Forma curbei $A(\omega)$, ca și a fazei spectrale $\varphi(\omega)$, sunt redată în fig.3.25.

Cazul $\tau_2 > \tau_1$ (al amortizării rapide) poate fi analizat în mod similar. Acum ecuația $A'(\omega) = 0$ admite numai o singură soluție reală, $\omega = 0$, careia îi corespunde un maxim al amplitudinii spectrale. Pentru $\omega \rightarrow \pm\infty$, $A(\omega) \rightarrow 0$.

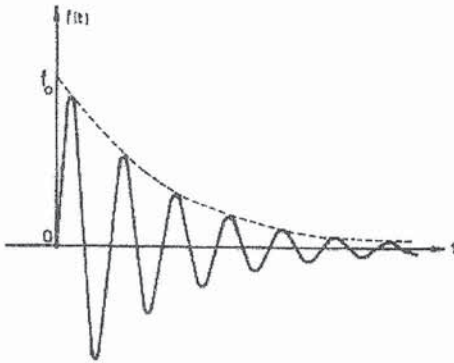


Fig.3.24. Semnal armonic amortizat.

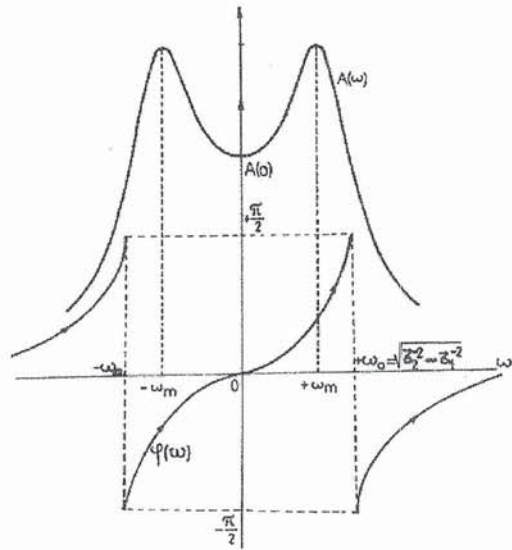


Fig.3.25. Amplitudinea și faza spectrului funcției $f(t)$ din formula (3.84) - pentru $\tau_2 < \tau_1$

3. 2. 5. Convoluția și corelația. Definiții, proprietăți, semnificații

Trecem în continuare să analizăm transformatele Fourier ale "unor produse" de câte două funcții, în general complexe.

Dacă funcția $f_1(t)$ este absolut integrabilă, adică integrala $\int_{-\infty}^{+\infty} |f_1(t)| dt$ este finită, iar funcția $f_2(t)$ este mărginită pe intervalul $(-\infty, +\infty)$, atunci există integrala

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau, \quad (3.88)$$

care se numește **convoluția** funcțiilor $f_1(t)$ și $f_2(t)$ și se notează cu simbolul \otimes ; vom scrie deci

$$f(t) = f_1(t) \otimes f_2(t). \quad (3.89)$$

Operația de convoluție este **comutativă**, adică rezultatul convoluției nu depinde de ordinea factorilor. Într-adevăr, dacă în definiția (3.88) se notează $\tau = t - \rho$, cu $d\tau = -d\rho$, obținem

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t - \rho) f_2(\rho) d\rho = \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(\rho) f_1(t - \rho) d\rho = f_2(t) \otimes f_1(t).$$

Prin urmare

$$f_1(t) \otimes f_2(t) = f_2(t) \otimes f_1(t). \quad (3.90)$$

În plus, convoluția este *asociativă*, căci $f_1 \otimes (f_2 \otimes f_3) = (f_1 \otimes f_2) \otimes f_3$, și *distributivă* față de adunare adică $f_1 \otimes (f_2 + f_3) = f_1 \otimes f_2 + f_1 \otimes f_3$.

Dacă funcțiile f_1 și f_2 sunt egale, relația (3.88) definește așa-numita *autoconvoluție*.

1. Teorema directă a convoluției: Imaginea Fourier $F(\omega)$ a convoluției $f(t)$ a două funcții $f_1(t)$ și $f_2(t)$, este produsul imaginilor Fourier $F_1(\omega)$ și $F_2(\omega)$ ale funcțiilor inițiale.

Demonstrația teoremei pornește de la definiția (3.88) și de la formulele (3.27) - (3.28). Putem scrie succesiv

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_2(\omega) e^{i\omega(t-\tau)} d\omega \right] d\tau = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_2(\omega) e^{i\omega t} d\omega \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\omega) F_2(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \end{aligned}$$

Comparând ultima expresie cu formula (3.27) rezultă că produsul $F_1(\omega)F_2(\omega)$ este imaginea Fourier a convoluției $f(t)$, adică

$$\mathcal{F}\{f(t) = f_1(t) \otimes f_2(t)\} = F_1(\omega) \cdot F_2(\omega). \quad (3.91)$$

2. Teorema inversă a convoluției: Produsul $f_1(t) \cdot f_2(t)$ este semnalul a cărui imagine Fourier este $1/2\pi$ din produsul de convoluție al funcțiilor $F_1(\omega)$ și $F_2(\omega)$, imaginile Fourier ale funcțiilor $f_1(t)$ și respectiv $f_2(t)$.

Începem demonstrația prin a scrie, conform definiției generale (3.88),

$$F(\omega) = F_1(\omega) \otimes F_2(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\Omega) F_2(\omega - \Omega) d\Omega.$$

Folosind relația (3.28) avem mai departe

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\Omega) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t) e^{-i(\omega-\Omega)t} dt \right] d\Omega = \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t) e^{-i\omega t} dt \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\Omega) e^{i\Omega t} d\Omega = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t) e^{-i\omega t} \cdot 2\pi f_1(t) dt = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_2(t) e^{-i\omega t} dt. \end{aligned}$$

Prin urmare

$$\mathcal{F}\{f_1(t) \cdot f_2(t)\} = \frac{1}{2\pi} F(\omega) = \frac{1}{2\pi} (F_1(\omega) \otimes F_2(\omega)) \quad (3.92')$$

sau invers

$$f_1(t) \cdot f_2(t) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{2\pi} (F_1(\omega) \otimes F_2(\omega)) \right\}. \quad (3.92'')$$

3. Câteva cazuri particulare importante: a) În anul 1930, fizicianul englez P. A. M. Dirac (1902-1984) a propus introducerea unui simbol funcțional $\delta(t)$ cu următoarele proprietăți:

- i) $\delta(t) = 0$, pentru $t \neq 0$;
- ii) $\delta(t) = +\infty$, pentru $t = 0$;
- iii) $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\delta(t)dt = g(0)$, cu $g(t)$ continuă și cu derivate continue.

În particular, pentru $g(t) = 1$, din ultima relație rezultă

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1.$$

Proprietatea iii) este cunoscută sub denumirea de *proprietatea de filtrare*.

Simbolul $\delta(t)$ astfel definit nu desemnează o funcție propriu-zisă ci un anumit proces de trecere la limită întâlnit în multe probleme de fizică și tehnică. De exemplu, cititorul poate verifica ușor că funcția

$$h_{\alpha}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} & \text{pentru } |t| < \alpha/2, \\ 0 & \text{pentru } |t| > \alpha/2, \alpha > 0, \end{cases}$$

are exact comportarea simbolului $\delta(t)$ al lui Dirac, în limita $\alpha \rightarrow 0$.

Precizăm că $\delta(t)$ *nu este o funcție* ci o *funcțională* sau o *distribuție*, deoarece, prin procesul de trecere la limită în proprietatea iii), se stabilește o corespondență între o funcție $g(t)$ și un număr $g(0)$. Cu toate acestea, în limbajul curent, simbolul $\delta(t)$ se numește *funcția delta a lui Dirac*.

Să determinăm spectrul Fourier al acestei "funcții". Utilizând relația (3.28) și proprietatea de filtrare obținem

$$\Delta(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)e^{-i\omega t}dt = 1. \quad (3.93)$$

Folosind acum relația (3.27) rezultă reprezentarea spectrală

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t}d\omega. \quad (3.94)$$

Cât este convoluția unei funcții oarecare $f(t)$ cu funcția $\delta(t)$ - a lui Dirac? Utilizând definiția (3.88) avem

$$f(t) \otimes \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = f(t). \quad (3.95)$$

Aceasta înseamnă că funcția lui Dirac este *elementul neutru* al convoluției așa cum unitatea este elementul neutru pentru înmulțire.

Să calculăm acum convoluția funcției $f(t)$ cu $\delta(t-t_0)$. Avem evident

$$f(t) \otimes \delta(t-t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\delta(t-t_0-\tau)d\tau = f(t-t_0). \quad (3.96)$$

Prin urmare *tranzlația* (sau deplasarea - în sensul teoremei 1 din secțiunea 3. 2. 3) *poate fi considerată ca o convoluție*.

Dacă facem transformata Fourier în ambele părți ale relației (3.96) obținem

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(t) \otimes \delta(t-t_0)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-t_0)e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\rho)e^{-i\omega(\rho+t_0)} d\rho = \\ &= e^{-i\omega t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\rho)e^{-i\omega\rho} d\rho = e^{-i\omega t_0} \mathcal{F}\{f(t)\}. \end{aligned} \quad (3.97)$$

rezultat deja stabilit și prin relația (3.46).

De mare importanță practică este și *funcția treaptă - unitate* $u(t)$, egală cu zero pentru $t < 0$ și egală cu 1 pentru $t \geq 0$. Se poate demonstra că, în sensul teoriei distribuțiilor, derivata funcției $u(t)$ este funcția delta Dirac: $u'(t) = \delta(t)$. Evident, transformata Fourier a funcției $u(t)$ este $(1/i\omega)$ - vezi (3.55) și (3.93). Funcția $u(t)$ este și ea o distribuție (se poate obține, de exemplu, din funcția $f_\alpha(t) = \exp(-\alpha t)$ când $t \geq 0$ și $f_\alpha(t) = 0$ când $t < 0$, prin limita $\alpha \rightarrow 0$).

Este remarcabilă următoarea proprietate

$$f(t) = \int_{-\infty}^t f'(\tau)u(t-\tau)d\tau = f'(t) \otimes u(t), \quad (3.95')$$

ce rezultă din (3.95) în urma integrării prin părți (cu considerarea proprietății $u'(t) = \delta(t)$). Prin urmare, convoluția derivatei unui semnal cu funcția treaptă - unitate $u(t)$ ne dă semnalul considerat. Aici se admite că $f'(t)$ există și este nenulă pentru $t \in \mathbf{R}$.

b) Utilizând proprietatea de filtrare a funcției δ - Dirac și reprezentarea sa spectrală (3.94), pentru convoluția $f(t)$ a două funcții arbitrare, din relația (3.88), luată la momentul $t = 0$, sau direct din (3.91), obținem

$$f(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)f_2(-\tau)d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\omega)F_2(\omega)d\omega, \quad (3.98)$$

$F_1(\omega)$ și $F_2(\omega)$ fiind imaginile Fourier ale funcțiilor $f_1(t)$ și $f_2(t)$.

În mod analog, se pot stabili și relațiile

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)f_2(\tau)d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\omega)F_2(-\omega)d\omega, \quad (3.99)$$

respectiv

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)f_2^*(\tau)d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\omega)F_2^*(\omega)d\omega, \quad (3.100)$$

cunoscute sub denumirea de *teoremele de multiplicare*. Relația (3.100) rezultă și direct din (3.99) cu considerarea proprietății 6 din secțiunea 3. 2. 3.

c) Dacă $f_1(t) = f_2(t) \equiv f(t)$, din (3.100) rezultă așa-numita *formulă a lui Parseval*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega, \quad (3.101)$$

unde $F(\omega)$ este imaginea Fourier a semnalului $f(t)$. Formula (sau teorema) lui Parseval este un caz particular (pentru $\omega = 0$) al relației generale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\Omega) F^*(\Omega - \omega) d\Omega, \quad (3.102)$$

care poate fi verificată de cititor, urmând aceeași linie ca la demonstrarea relațiilor (3.98) - (3.100).

Din punct de vedere matematic, formula lui Parseval exprimă *teorema de completitudine (sau de închidere)*, iar din punct de vedere fizic - *legea conservării energiei*. Într-adevăr, membrul stâng al relației (3.101) este direct proporțional cu energia medie a semnalului iar membrul drept este suma (integrala) energiilor tuturor componentelor sale spectrale. Dacă ținem cont că $\omega = 2\pi\nu$, ν fiind frecvența, relația (3.101) se poate scrie sub forma

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\nu) d\nu, \quad (3.101')$$

unde $g(\nu) = |F(2\pi\nu)|^2$ este *densitatea spectrală (după frecvențe) de energie*.

d) Utilizând teoremele enunțate și demonstrate mai sus se poate arăta ușor că produsul de convoluție a două funcții gaussiene (vezi punctul 3 din secțiunea 3. 2. 3) este tot o funcție gaussiană. Avem deci

$$e^{-t^2/\tau_1^2} \otimes e^{-t^2/\tau_2^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\rho^2}{\tau_1^2}} \cdot e^{-\frac{(t-\rho)^2}{\tau_2^2}} d\rho = \sqrt{\frac{\pi}{\gamma}} \tau_1 \tau_2 e^{-\frac{t^2}{\gamma^2}}, \quad (3.103)$$

unde $\gamma^2 = \tau_1^2 + \tau_2^2$. Acest rezultat prezintă o mare importanță practică, îndeosebi în studiul semnalelor optice furnizate de sursele gazoase (descărcări în gaze, laseri gazoși).

În afara produsului de convoluție, este utilă și definirea așa-numitei *corelații (funcție de corelație reciprocă)* a două funcții,

$$\Gamma_{12}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2^*(\tau - t) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t + \tau) f_2^*(\tau) d\tau, \quad (3.104)$$

care se notează simbolic cu o steluță (*) între cele două funcții "produs", sub forma

$$\Gamma_{12}(t) = f_1(t) * f_2(t). \quad (3.105)$$

Spre deosebire de convoluție, care este o operație comutativă, corelația nu se bucură de această proprietate. Într-adevăr, cu schimbarea de variabilă $\tau = \rho + t$, $d\tau = d\rho$, putem scrie

$$\Gamma_{12}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\rho+t)f_2^*(\rho)d\rho = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(\rho)f_1^*(\rho+t)d\rho \right]^* = \Gamma_{21}^*(-t), \quad (3.106)$$

fapt care demonstrează *necomutativitatea* operației de corelație. Prin urmare, la schimbarea indicilor 1 și 2 între ei, trebuie să trecem la funcția complex-conjugată odată cu schimbarea lui t în $-t$.

4. Corelația poate fi exprimată însă și ca o convoluție. Fie $g(t) = f_2^*(-t)$. Avem succesiv

$$f_1(t) \otimes g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)f_2^*(\tau-t)d\tau = \Gamma_{12}(t).$$

Prin urmare putem scrie

$$\Gamma_{12}(t) = f_1(t) * f_2(t) = f_1(t) \otimes f_2^*(-t). \quad (3.107)$$

Cu ajutorul acestei relații putem transcrie corespunzător toate proprietățile convoluției ca proprietăți ale corelației.

Dacă, în particular, $f_1(t) = f_2(t)$, din (3.104) rezultă definiția *autocorelației* (*funcției de autocorelație*)

$$\Gamma_{11}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)f_1^*(\tau-t)d\tau = f_1(t) * f_1(t) \quad (3.108)$$

cu proprietatea generală

$$\Gamma_{11}(t) = \Gamma_{11}^*(-t). \quad (3.109)$$

Dacă funcția $f_1(t)$ este o funcție *reală* avem $\Gamma_{11}(t) = \Gamma_{11}(-t)$, adică autocorelația este acum o funcție *pară* (*simetrică*).

5. Să demonstrăm acum următoarea *teoremă*: Dacă funcția $f_1(t)$ este reală, autocorelația $\Gamma_{11}(t)$ își atinge maximul absolut pentru $t = 0$.

Demonstrația se face pornind de la observația că definiția (3.104) satisface proprietățile produsului scalar al celor două funcții

$$\Gamma_{12}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)f_2^*(\tau-t)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} f_2^*(\tau) \cdot f_1(\tau+t)d\tau = (f_2(\tau), f_1(\tau+t)). \quad (3.110)$$

Dacă $f_2(\tau) = f_1(\tau)$, ca funcții reale, avem

$$\Gamma_{11}(t) = (f_1(\tau), f_1(\tau+t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)f_1(\tau+t)d\tau. \quad (3.110')$$

Să considerăm deci următorul produs scalar (pătrat de normă) nenegativ

$$(f_1(\tau) + \lambda f_1(\tau+t), f_1(\tau) + \lambda f_1(\tau+t)) \geq 0 \quad (3.111)$$

cu λ un *parametru real oarecare*. El se poate scrie dezvoltat sub forma

$$(f_1(\tau), f_1(\tau)) + 2\lambda(f_1(\tau+t), f_1(\tau)) + \lambda^2(f_1(\tau+t), f_1(\tau+t)) \geq 0.$$

Prin schimbarea de variabilă $\tau+t \rightarrow \tau$, ultimul produs scalar se poate scrie sub forma $(f_1(\tau), f_1(\tau))$; astfel obținem

$$(1 + \lambda^2)(f_1(\tau), f_1(\tau)) + 2\lambda(f_1(\tau+t), f_1(\tau)) \geq 0,$$

adică

$$(1 + \lambda^2)\Gamma_{11}(0) + 2\lambda\Gamma_{11}(t) \geq 0. \quad (3.112)$$

Pentru $\lambda = -1$ din relația (3.112) rezultă

$$\Gamma_{11}(0) \geq \Gamma_{11}(t). \quad (3.113)$$

Dacă funcția $f_1(t)$ ar fi fost o funcție complexă, în locul rezultatului (3.113) s-ar fi obținut

$$|\Gamma_{11}(t)| \leq \Gamma_{11}(0), \quad (3.113')$$

relație care ne arată că, în modul, funcția de autocorelație nu depășește niciodată valoarea sa în origine. Ultima relație are o semnificație practică de o importanță deosebită. Dacă variabila t este o coordonată spațială, ea ne permite să stabilim locul în care, într-un dispozitiv interferențial cu două surse, diferența de drum optic este nulă (vezi vol. II): maximul absolut al figurii de interferență se obține acolo unde diferența respectivă este egală cu zero.

Pentru unele aplicații practice este utilă definirea *funcțiilor de corelație*, respectiv *de autocorelație, normate*

$$\gamma_{12}(t) = \frac{\Gamma_{12}(t)}{\Gamma_{12}(0)}, \quad \gamma_{11}(t) = \frac{\Gamma_{11}(t)}{\Gamma_{11}(0)}. \quad (3.104')$$

Pentru importanța sa ulterioară se remarcă proprietatea

$$0 \leq |\gamma_{11}(t)| \leq 1. \quad (3.104'')$$

6. Fie $f_1(t)$ suma unor funcții elementare liniar independente, adică

$$f_1(t) = \sum_{\alpha} g_{\alpha}(t), \quad (3.114)$$

funcțiile $g_{\alpha}(t)$ nedepinzând una de alta. Funcția de autocorelație se poate scrie sub forma

$$\Gamma_{11}(t) = (f_1(\tau), f_1(\tau+t)) = \sum_{\alpha=\beta} (g_{\alpha}(\tau), g_{\beta}(\tau+t)) + \sum_{\alpha \neq \beta} (g_{\alpha}(\tau), g_{\beta}(\tau+t)). \quad (3.115)$$

Din cauza liniar-independenței funcțiilor g_{α} , al doilea termen din membru drept al relației (3.115) este egal cu zero în cazul când

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_{\alpha}(\tau) d\tau = 0, \quad \text{pentru orice } \alpha, \quad (3.116)$$

și atunci obținem

$$\Gamma_{11}(t) = \sum_{\alpha} (g_{\alpha}(\tau), g_{\alpha}(\tau+t)) = \sum_{\alpha} \Gamma_{11}^{(\alpha)}(t). \quad (3.117)$$

Acest rezultat, ca și cel precedent-exprimit de formula (3.113'), este extrem de important în studiul fenomenelor de interferență cu surse multiple (vezi vol. II).

7. Conform relației (3.107) și proprietăților (3.50), (3.91), putem scrie

$$\mathcal{F}\{\Gamma_{12}(t)\} = \mathcal{F}\{f_1(t) * f_2(t)\} = \mathcal{F}\{f_1(t) \otimes f_2^*(-t)\} = F_1(\omega)F_2^*(\omega), \quad (3.118)$$

iar în cazul autocorelației

$$\mathcal{F}\{\Gamma_{11}(t)\} = F_1(\omega)F_1^*(\omega) = |F_1(\omega)|^2. \quad (3.119)$$

Ultimul rezultat este cunoscut sub denumirea de *teorema Wiener-Hincin*: imaginea Fourier a funcției de autocorelație $\Gamma_{11}(t)$ este egală cu pătratul modulului imaginii Fourier a funcției ce intră în operația de autocorelație, adică cu $|F_1(\omega)|^2$. Importanța teoremei constă în aceea că prin determinarea experimentală a funcției de autocorelație, cu ajutorul unor metode interferențiale - vezi vol. II, se poate determina cu ușurință densitatea spectrală de energie (sau de putere) a unei (semnalului) care a produs fenomenul de interferență. În acest fel, se poate realiza practic analiza compoziției spectrale a semnalelor aleatoare, respectiv a zgomotelor.

Nu dorim să încheiem acest paragraf înainte de a releva, pe scurt, semnificația celor două operații (convoluția și corelația) pe care le-am introdus și ale căror proprietăți (câteva) le-am prezentat mai sus. Pentru intuitivitate vom considera că funcțiile $f_1(\tau)$ și $f_2(\tau)$ sunt reale, graficul lor fiind redat în fig. 3.26, 3.27.

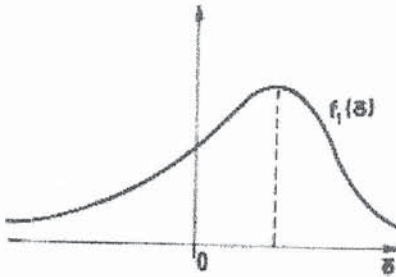


Fig.3.26. Funcția $f_1(\tau)$.

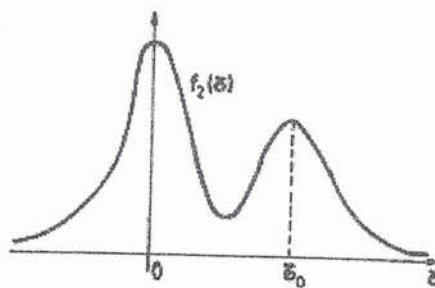


Fig.3.27. Funcția $f_2(\tau)$.

Dacă ne interesează *convoluția* acestor funcții la "momentul" $t > 0$, așa cum arată definiția (3.88), va trebui să reprezentăm grafic funcția $f_2(t-\tau)$. Maximul principal al funcției $f_2(\tau)$ - cel de la $\tau = 0$, se va deplasa acum la $\tau = t$, adică la dreapta originii. Celălalt maxim al funcției $f_2(\tau)$, cel de la $\tau = \tau_0$, se va deplasa la stânga verticalei ridicate la momentul t (vezi fig.3.28). Valorile de la $\pm\infty$ ale funcției $f_2(t-\tau)$ corespund valorilor de la $\mp\infty$ ale funcției $f_2(\tau)$. Să admitem acum că una din funcții (să zicem $f_1(\tau)$) are peste tot valori subunitare. Curba produs $f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau)$ va fi situată sub curba acelei funcții ($f_1(\tau)$), fiind micșorată corespunzător - vezi fig.3.28. Conform definiției (3.88), *convoluția* $f_1(t) \otimes f_2(t) = f(t)$ reprezintă *aria de sub curba produs*, adică aria hașurată din figură. Evident, depinzând de t , aria respectivă are diverse valori.

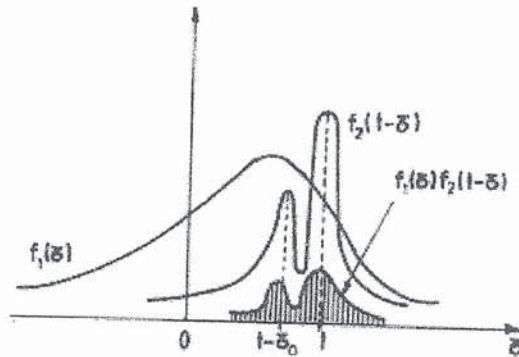


Fig.3.28. Funcția produs $f_1(\tau)f_2(t-\tau)$ și semnificația convoluției.

Pentru a analiza semnificația *corelației* funcțiilor $f_1(\tau)$ și $f_2(\tau)$ se procedează în mod similar. De data aceasta trebuie reprezentată grafic funcția $f_2(\tau-t)$ și valorile acestei funcții la $\pm\infty$ corespund valorilor funcției $f_2(\tau)$ tot de la $\pm\infty$. În exemplul dat, maximul principal al funcției $f_2(\tau-t)$ se află tot la nivelul $\tau=t$, însă celălalt maxim se va afla situat la dreapta verticalei ridicate la momentul t (vezi fig.3.29). După efectuarea reprezentărilor grafice se ia produsul celor două curbe, adică produsul $f_1(\tau) \cdot f_2(\tau-t)$ și *corelația reprezintă aria de sub funcția produs* (aria hașurată). Evident, și de data aceasta, aria respectivă are valori dependente de localizarea momentului t .

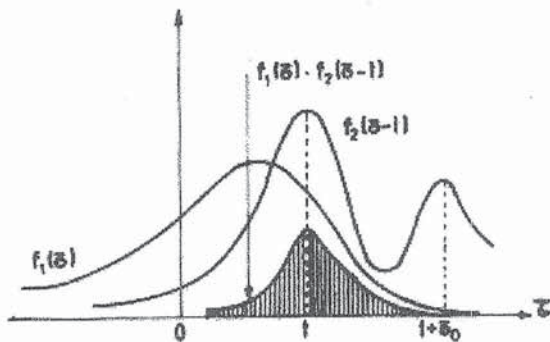


Fig.3.29. Funcția produs $f_1(\tau)f_2(\tau-t)$ și semnificația corelației.

Să analizăm în sfârșit și semnificația geometrică a *autocorelației*. De data aceasta, pentru a fi și mai intuitivi, ne vom referi la un semnal real, de forma (3.66), vezi fig.3.14, caracterizat de o înălțime $f_0 = 1$ (neimportantă pentru analiza de aici!) și de o lărgime T , distribuită simetric față de origine. Fie $0 < t < T/2$. Funcția $f(\tau-t)$ are forma funcției $f(\tau)$, numai că este traslatată la dreapta cu t (fig.3.30). Produsul $f(\tau) \cdot f(\tau-t)$ este egal cu 1 în intervalul $\tau \in [(-T/2)+t; +T/2]$. Autocorelația reprezintă deci aria hașurată din fig.3.30. Rezultă ușor că, în acest exemplu, autocorelația este egală cu zero pentru $t > T$ și pentru $t < -T$. Prin calcul direct, pornind de la definiția (3.108), putem stabili că, în acest caz, funcția de autocorelație are forma

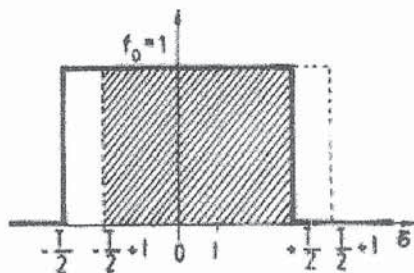


Fig.3.30. Semnificația geometrică a autocorelației (caz particular).

$$\Gamma_{11}(t) = T - |t| = \begin{cases} T - t & \text{când } t > 0, \\ T + t & \text{când } t < 0, \end{cases} \quad (3.120)$$

cu $|t| < T$ și este egală cu zero pentru $|t| \geq T$. Se observă că, așa cum afirmă teorema (3.113), $\Gamma_{11}(0)$ este valoarea maximă a funcției de autocorelație (vezi fig.3.31).

Putem exemplifica și teorema Wiener-Hincin, calculând $|F(\omega)|^2$ pornind de la $\Gamma_{11}(t)$ (vezi relația (3.119)). Obținem ușor

$$|F(\omega)|^2 = T^2 \cdot \text{sinc}^2\left(\frac{\omega T}{2}\right) \quad (3.120')$$

adică tocmai rezultatul (3.67) (ridicat la pătrat). Rezultatul este perfect concordant cu cel de la punctul 5, secțiunea 3.2.4.

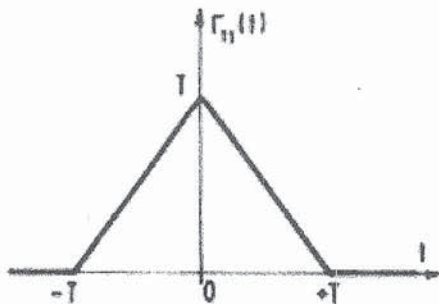


Fig.3.31. Forma funcției de autocorelație pentru exemplul dat în figura 3.30.

§. 3. 3. Modele de surse luminoase

Cel mai simplu model clasic de sursă luminoasă (în general, de radiație electromagnetică) este electronul care oscilează armonic în jurul unei poziții de echilibru, sub acțiunea unei forțe elastice*. Dacă forța elastică, de revenire, se scrie sub forma $F = -kx = -m\omega_0^2 x$, ecuația de mișcare unidimensională a electronului

$$m \ddot{x} = -kx = -m\omega_0^2 x \quad (3.121)$$

are soluția generală

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t - \varphi), \quad \dot{x}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t - \varphi), \quad (3.122)$$

A fiind amplitudinea mișcării iar $(-\varphi)$ - faza inițială. Dacă amplitudinea A ar rămâne constantă, energia mecanică totală a electronului oscilant

$$W = \frac{m}{2} \dot{x}^2 + \frac{m\omega_0^2}{2} x^2 = \frac{m\omega_0^2}{2} \cdot A^2 \quad (3.123)$$

ar rămâne și ea constantă. În realitate, dacă se suplimentează considerentele pur mecanice cu o analiză electromagnetică, se constată că, prin radiație, energia electronului se micșorează în timp, adică A nu este o constantă.

Așa cum se demonstrează în electrodinamică, puterea radiată de un electron, cu sarcina electrică e, care se mișcă oscilant (în general accelerat), la distanță mare de locul unde se petrece oscilația, este (vezi vol. II)

$$P = \frac{1}{6\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{c^3} \ddot{x}^2 \quad (3.124)$$

unde, în cazul nostru, $\ddot{x} = -\omega_0^2 x = -\omega_0^2 A \cos(\omega_0 t - \varphi)$.

Din cauza pierderii de energie prin radiație, mișcarea oscilatorie va fi în realitate amortizată și legea conservării energiei trebuie scrisă sub forma

$$\frac{dW}{dt} = -\langle P \rangle = -\frac{1}{12\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{c^3} \cdot \omega_0^4 A^2, \quad (3.125)$$

unde $\langle P \rangle$ este media pe o perioadă de oscilație ($2\pi/\omega_0$), calculată cu ajutorul formulei generale (3. 7).

Suntem datori să precizăm că la scrierea ultimei relații, am presupus, în mod tacit, că micșorarea prin amortizare a amplitudinii, într-o perioadă, este foarte mică. Aceasta înseamnă că, față de energia totală a oscilatorului electronic, energia radiată într-o perioadă este foarte mică, presupunere care, după cum vom vedea, este cât se poate de realistă.

Înlocuind A^2 din (3.123) în (3.125) obținem ecuația diferențială

$$\frac{dW}{dt} = -\gamma W \quad \text{cu} \quad \gamma = \frac{1}{6\pi\epsilon_0} \frac{e^2 \cdot \omega_0^2}{mc^3}, \quad (3.126)$$

a cărei soluție are forma

$$W(t) = W(0)e^{-\gamma t}. \quad (3.127)$$

* Mai general, este cazul dipolului electric oscilant.

Deoarece $W(t) \sim A^2(t)$ rezultă că amplitudinea oscilației electronului se micșorează în timp după legea

$$A(t) = A(0)e^{-\frac{\gamma}{2}t}, \quad (3.128)$$

care introdusă în (3.122) ne conduce la

$$x(t) = A(0)e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega_0 t - \varphi). \quad (3.129)$$

Subliniem din nou că evaluările anterioare sunt valabile numai în cazul unei amortizări slabe, care îndeplinește condiția $\frac{\gamma}{2}T = \frac{\gamma\pi}{\omega_0} \ll 1$, adică, estimativ, pentru

$$\gamma \ll \omega_0. \quad (3.130)$$

Evaluând γ din (3.126) cu ajutorul valorilor numerice ale constantelor universale ϵ_0 , e , m , c și ținând cont că, pentru domeniul optic, $\omega_0 \approx 10^{15} \text{s}^{-1}$, obținem $\gamma \sim 10^8 \text{s}^{-1}$, adică relația (3.130) este într-adevăr satisfăcută ($\gamma/\omega_0 \sim 10^{-7} \ll 1$).

Cu considerarea amortizării, soluția (3.129) corespunde ecuației de mișcare

$$m \ddot{x} = -m\omega_0^2 x - m\gamma \dot{x} \quad (3.131)$$

și restricției (3.130), în care $F_{\text{fr}} = -m\gamma \dot{x}$ este o forță de frânare (frânare de radiație).

Să trecem acum la analiza Fourier a semnalului

$$x(t) = \begin{cases} 0, & \text{pentru } t < 0, \\ (A_0 e^{i\omega_0 t} + A_0^* e^{-i\omega_0 t}) e^{-\frac{\gamma}{2}t}, & \text{pentru } t \geq 0, \end{cases} \quad (3.132)$$

considerând că procesul de oscilație și de radiație începe la momentul de timp $t = 0$. Dacă $A_0 = \frac{1}{2}A(0) \cdot \exp(-i\varphi)$, semnalul (3.132) coincide exact cu semnalul real $x(t)$ dat de relația (3.129).

Energia radiată în intervalul $0 \leq t < +\infty$ se dă prin expresia

$$W = - \int_0^{+\infty} \frac{dW}{dt} dt = \frac{1}{6\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{c^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \ddot{x}^2 dt, \quad (3.133)$$

unde s-a folosit relația (3.124) și s-a ținut cont că în intervalul de timp $-\infty < t < 0$ oscilatorul nu radiază.

Pentru calcularea integralei (3.133) vom presupune că amortizarea este foarte mică ($\gamma \ll \omega_0$), caz în care $\ddot{x} \approx -\omega_0^2 x$. Dacă $x(t)$ are reprezentarea Fourier

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (3.134)$$

unde

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt = \int_0^{+\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (3.135)$$

din (3.133) obținem

$$W = \frac{1}{24\pi^3 \epsilon_0} \cdot \frac{e^2 \omega_0^4}{c^3} \iint_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) F(\omega') \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\omega+\omega')t} dt \right) d\omega d\omega'.$$

Integrala din paranteza rotundă este $2\pi\delta(\omega + \omega')$ și, folosind proprietatea de filtrare (3.95), rezultă

$$W = \frac{e^2 \omega_0^4}{6\pi^2 \varepsilon_0 c^3} \int_0^{+\infty} F(\omega)F(-\omega)d\omega \equiv \int_0^{+\infty} w(\omega)d\omega. \quad (3.136)$$

Funcția $w(\omega)$ are forma

$$w(\omega) = \frac{e^2 \omega_0^4}{6\pi^2 \varepsilon_0 c^3} F(\omega) \cdot F(-\omega) \quad (3.137)$$

și caracterizează distribuția după pulsații a energiei undei radiate; ea este o *densitate spectrală de energie (după pulsații)*.

Calculând imaginea Fourier $F(\omega)$ pe baza relațiilor (3.135) și (3.132) obținem

$$F(\omega) = \frac{A_0}{\frac{\gamma}{2} - i(\omega_0 - \omega)} + \frac{A_0^*}{\frac{\gamma}{2} + i(\omega_0 + \omega)}, \quad (3.138)$$

care, introdusă în (3.137) ne dă expresia densității spectrale de energie $w(\omega)$ - o *funcție pară* în raport cu ω .

În general, expresia $w(\omega)$ astfel obținută este destul de complicată. Noi ne vom ocupa și în continuare numai de cazul $\gamma \ll \omega_0$, al amortizării slabe, când cei doi termeni din membrul drept al relației (3.138) se comportă diferit în vecinătatea $\omega \approx \omega_0$: termenul în care apare $\omega_0 - \omega$ este mult mai mare decât cel în care intervine $\omega_0 + \omega$. De aceea, pentru calcularea lui $F(\omega)$ este suficient să reținem doar primul termen din (3.138) iar pentru calcularea lui $F(-\omega)$ - doar al doilea termen. Produsul $F(\omega)F(-\omega)$ are astfel forma (aproximativă)

$$F(\omega)F(-\omega) = \frac{A_0}{\frac{\gamma}{2} - i(\omega_0 - \omega)} \cdot \frac{A_0^*}{\frac{\gamma}{2} + i(\omega_0 - \omega)} = \frac{|A_0|^2}{(\omega_0 - \omega)^2 + \frac{\gamma^2}{4}}, \quad (3.139)$$

iar densitatea spectrală de energie devine

$$w(\omega) = \frac{1}{6\pi^2 \varepsilon_0} \cdot \frac{e^2}{c^3} \cdot \frac{\omega_0^4 |A_0|^2}{(\omega_0 - \omega)^2 + \frac{\gamma^2}{4}}. \quad (3.140)$$

Această funcție are valoarea maximă la $\omega = \omega_0$

$$w(\omega_0) = \frac{2}{3\pi^2 \varepsilon_0} \cdot \frac{e^2}{c^3} \left(\frac{\omega_0^2}{\gamma} \right)^2 \cdot |A_0|^2. \quad (3.141)$$

La $\omega_{1,2} = \omega_0 \pm \gamma/2$, densitatea spectrală de energie scade la jumătate din valoarea maximă. Pentru $\omega \rightarrow \pm\infty$, $w(\omega) \rightarrow 0$. Din această analiză sumară rezultă că cea mai mare parte din energia emisă de electronul (sarcina) oscilant(ă) corespunde pulsațiilor cuprinse între $\omega_0 - \gamma/2$ și $\omega_0 + \gamma/2$. Mărimea $\delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \gamma$ se numește *lărgimea liniei de radiație*.

Formula (3.140) se scrie de multe ori sub forma

$$w(\omega) = 2m\mathcal{A}_0\mathcal{A}_0^*\omega_0^2 F_L(\omega), \quad (3.142)$$

unde funcția

$$F_L(\omega) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\gamma/2}{(\omega_0 - \omega)^2 + (\gamma/2)^2} \quad (3.143)$$

se numește *funcție lorentziană normalată* pentru forma liniei de radiație (vezi fig.3.32). Ea satisface *condiția de normare*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_L(\omega) d\omega = 1. \quad (3.144)$$

Contribuția cea mai însemnată la această integrală o dă domeniul de pulsații din apropierea valorii ω_0 . Valorile negative ($\omega < 0$) ale pulsațiilor dau, în integrala (3.144), contribuții de același ordin de mărime cu cele ale termenilor neglijați la calcularea produsului $F(\omega)F(-\omega)$ sub forma (3.139). De aceea, în această aproximație, condiția de normare (3.144) se poate scrie și sub forma

$$\int_0^{+\infty} F_L(\omega) d\omega = 1. \quad (3.144')$$

Conturul lorentzian al liniei de radiație se obține în condiții "naturale" de radiație, adică atunci când singurul factor ce intervine în procesul de oscilație este *frânarea (amortizarea) de radiație*. De aceea, forma lorentziană se mai numește și *formă naturală* a liniei de radiație iar γ - *lărgimea naturală* a liniei*.

Așa cum am estimat, pentru domeniul optic, în care $\omega_0 \approx 10^{15} \text{s}^{-1}$, lărgimea naturală $\gamma \approx 10^8 \text{s}^{-1}$, adică ea este foarte mică ($\gamma/\omega_0 \approx 10^{-7}$). De aceea, se consideră că radiația emisă, cu pulsații cuprinse între

$\omega_0 - \frac{\gamma}{2}$ și $\omega_0 + \frac{\gamma}{2}$, adică într-un interval spectral $\delta\omega = \gamma$, este practic *monocromatică*. Cu excepția unor situații speciale, aproximarea ca monocromatică a radiațiilor "naturale" se dovedește a fi adevărată în majoritatea cazurilor ce intervin în optică.

Formulele (3.129), (3.132) ne arată că amplitudinea de oscilație a electronului radiant scade de $e = 2,71$ (numărul lui Neper) ori după un timp

$$\tau = \frac{2}{\gamma} = \frac{2}{\delta\omega} (\approx 10^{-8} \text{s}) \quad (3.145)$$

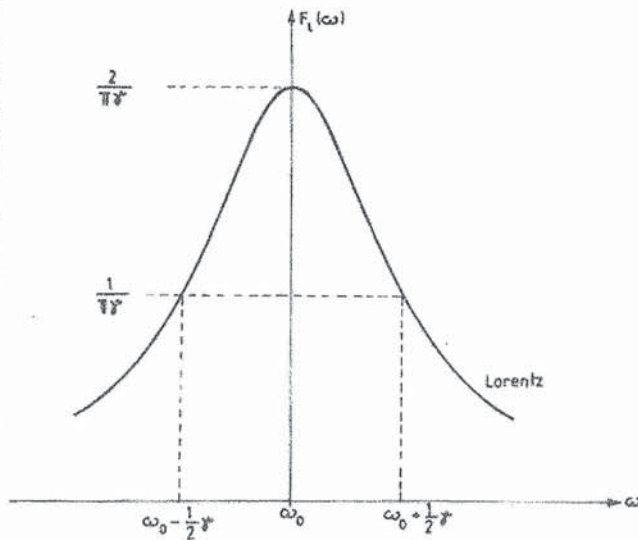


Fig.3.32. Funcția lorentziană normalată.

* Lărgimea liniei se evaluează la jumătatea valorii maxime $F_L(\omega_0)$.

care poartă numele de *timp de radiație*. Se observă că acest timp este cu atât mai mic cu cât este mai mare lărgimea $\delta\omega$ a liniei. Strict vorbind, *radiația este monocromatică* ($\delta\omega = 0$) *numai dacă timpul de radiație este infinit de mare*.

Trecem acum să studiem mișcarea unui electron, legat elastic, sub acțiunea unui câmp electric E , orientat de-a lungul direcției de mișcare. Luând în considerare și frânarea de radiație, ecuația de mișcare a electronului are forma

$$m \ddot{x} + m\gamma \dot{x} + m\omega_0^2 x = eE. \quad (3.146)$$

Dacă

$$E(t) = E_0 e^{i\omega t}, \quad (3.147)$$

putem presupune că, în regimul care se stabilește, $x(t)$ oscilează armonic cu aceeași pulsație ω , adică

$$x(t) = x(0) e^{i\omega t}. \quad (3.148)$$

Deoarece $\dot{x} = i\omega x$, $\ddot{x} = -\omega^2 x$, ecuația (3.146) devine

$$m(-\omega^2 + i\omega\gamma + \omega_0^2)x = eE, \quad (3.149)$$

de unde

$$x = \frac{e}{m} \frac{E}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma}. \quad (3.150)$$

Primind energie de la unda incidentă (3.147), electronul oscilator este, la rândul său, o sursă de radiație. Procesul poate fi conceput în două etape, o etapă de absorbție de energie, urmată de o etapă de radiație. Soluția (3.150) este soluția ecuației neomogene ($x \neq 0$ pentru $E \neq 0$) și intensitatea procesului de absorbție este direct proporțională cu pătratul modului elongației cauzate de câmp, adică cu $|x|^2 = x^* x$. Prin urmare, pentru energia *absorbită* de la unda incidentă de către vibratorul electronic putem scrie

$$\phi(\omega) = \text{const} |x|^2 = \frac{\text{const}}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}. \quad (3.151)$$

În cazul $\omega_0 \gg \gamma$, funcția (3.151) are valori semnificative numai în vecinătatea pulsației ω_0 , când se poate face următoarea estimare

$$\begin{aligned} (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2 &= (\omega_0 + \omega)^2 (\omega_0 - \omega)^2 + \omega^2 \gamma^2 \approx 4\omega_0^2 (\omega_0 - \omega)^2 + \omega_0^2 \gamma^2 = \\ &= 4\omega_0^2 \left[(\omega_0 - \omega)^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Acum, energia absorbită poate fi scrisă sub forma

$$\phi(\omega) = \frac{\text{const}}{(\omega_0 - \omega)^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}, \quad (3.152)$$

de unde, prin comparație cu (3.140), rezultă că *linia de absorbție are formă lorentziană* ca și linia de radiație, fiind centrată pe aceeași pulsație (ω_0). Acest rezultat a fost descoperit experimental în secolul trecut și a fost ridicat la rang de lege fundamentală în spectroscopie de către G. Kirchhoff (1859) - *legea inversiunii liniilor spectrale*.

În încheierea acestui paragraf, considerăm că nu este lipsită de interes o analiză, chiar și sumară, referitoare la interpretarea cuantică a formei liniei de radiație.

După cum se știe, în primul sfert al secolului nostru, teoria corpuscular - fonică a luminii a dat un "nou răspuns" la întrebarea "ce este lumina?". Conform acestei teorii, radiația de pulsație ω constă din fotoni de energie $\varepsilon = h\nu = \hbar\omega$, care se emit la tranziția sistemului cuantic dintr-o stare energetică ε_N într-o altă stare energetică $\varepsilon_M = \varepsilon_N - \varepsilon = \varepsilon_N - \hbar\omega$. Dacă energiile ε_N și ε_M ar fi bine determinate, pulsația $\omega = (\varepsilon_N - \varepsilon_M)/\hbar$ a fotonului emis ar fi și ea bine determinată. În realitate, energia ε_N a nivelului excitat nu are niciodată valori bine determinate; se spune că nivelele excitat au o anumită grosime (lărgime), în general mică, dar finită. Timpul de radiație se interpretează cuantic ca "timpul de viață" al sistemului (în particular, al atomului) în starea excitată (ε_N), iar relația (3.145) ne spune acum că grosimea nivelului energetic este invers proporțională cu timpul de viață (al electronului, de exemplu) în acea stare. În starea fundamentală, cu cea mai mică energie, electronul se poate afla un timp indefinit de lung, dacă atomul este izolat; aceasta înseamnă că nivelul fundamental are grosime (lărgime) nulă. Când considerăm tranziția de pe o stare excitată în starea fundamentală, lărgimea liniei lorentziene de radiație (emisie) este o reflectare, la nivel microscopic, a grosimii nivelului excitat, căci în formula $\omega_{N1} = (\varepsilon_N - \varepsilon_1)/\hbar$ energia ε_N nu este bine determinată și, deci, nici pulsația ω_{N1} nu poate fi bine determinată. Dacă atomul nu este izolat, ci se află în interacțiune cu exteriorul (de exemplu, cu alți atomi), el poate ieși din starea fundamentală prin procese de excitare. Cu alte cuvinte, timpul de viață în noua stare "fundamentală" devine finit și, din această cauză, grosimea nivelului energetic ε_1 nu va fi nulă, ci finită. Aceasta ne arată că, în realitate, atât liniile de emisie cât și cele de absorbție au lărgime finită.

Cele prezentate în acest paragraf ne conduc la concluzia că noțiunea de undă (radiație) *monocromatică* are un caracter ideal. Când totuși, lărgimea liniei de radiație este suficient de mică, unda poate fi reprezentată sub forma $\sim \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)]$, prin ω înțelegând pulsația de la centrul liniei. Dacă grosimea $\delta\omega$ satisface condiția

$$\delta\omega \ll \omega, \quad (3.153)$$

o astfel de undă se numește *cvasi-monocromatică*.

Trebuie să subliniem însă că o undă cvasi-monocromatică poate fi considerată monocromatică numai pentru intervale de timp mai mici decât așa-numitul *timp de coerență* (vezi §. 3.7). În caz contrar, din motive ce se vor elucida ulterior, reprezentarea undelor cvasi-monocromatice prin unde ideale, monocromatice, nu mai este valabilă.

§. 3. 4. Lărgirea liniilor spectrale (surse reale)

Forma "naturală" a liniei de radiație, despre care am vorbit în paragraful anterior, apare în condiții ideale, când atomul emițător se află în repaus și nu este supus, în procesul de emisie, nici-unei acțiuni exterioare, perturbatoare. Din diverse motive, aceste condiții (în ansamblul lor) nu se realizează practic niciodată. În primul rând, din cauza agitației termice atomii nu pot fi considerați în repaus. Pe de altă parte, ei interacționează permanent unii cu alții, fie de la distanță, fie de aproape (prin ciocniri), sau cu câmpuri exterioare. Rezultă că, într-o măsură mai mare sau mai mică, procesul real al emisiei individuale de radiație este influențat și forma liniei de radiație nu mai poate fi cea naturală. Spunem că *liniile spectrale se lărgesc*.

Factorii care determină lărgirea liniilor de radiație se împart, de regulă, în două grupe. Pe de o parte, din cauza interacțiunii atomilor unii cu alții, apare o micșorare a timpului de viață în stările excitate care se traduce printr-o *lărgire omogenă*; forma liniei de radiație a fiecărui emițător rămâne aceeași, însă lărgimea ei crește proporțional cu scăderea timpului de viață. Mai mult, în ansamblu, forma liniei rezultante coincide cu forma liniilor individuale ale fiecărui dipol (atom) oscilant.

O influență esențială asupra lărgimii liniei spectrale o are însă și efectul Doppler (vezi secțiunea 3. 4. 2.), determinat de mișcarea atomilor, atât în gaze sau lichide (mișcare cu un caracter dezordonat) cât și în solide (mișcare oscilatorie în jurul pozițiilor nodale din rețeaua cristalină). După cum se știe din fizica statistică, vitezele medii și vitezele cele mai probabile de mișcare ale emițătorilor individuali sunt direct proporționale cu rădăcina pătrată a temperaturii absolute și invers proporționale cu rădăcina pătrată din masa lor. La o temperatură dată, în stare de echilibru termic, legea de distribuție a emițătorilor după viteze ne arată că există atât atomi cu viteze mai mici decât cea medie (sau probabilă), cât și atomi cu viteze mai mari. După mărimea și semnul (sau sensul) efectului Doppler, dependent de mărimea și orientarea vitezelor emițătorilor față de observator, frecvențele centrale ale radiațiilor dipolilor individuali sunt diferite, distribuite după o lege statistică. Lărgimea și forma liniei spectrale rezultante, observată experimental, este determinată de suma liniilor spectrale individuale pentru toți emițătorii (dipolii) individuali ai sursei. În acest caz, din cauza necoincidenței frecvențelor centrale ale liniilor spectrale individuale, rezultă o *lărgire neomogenă* sau neuniformă a liniei globale. După cum ne vom putea convinge mai târziu, liniile lărgite neomogen nu mai au contur lorentzian ca liniile naturale sau ca cele lărgite omogen.

Trăsăturile caracteristice ale radiației generate de sursele care emit spontan (după o excitare prealabilă) sunt determinate de natura atomilor (dipolilor) care formează sursa, de interacțiunile care există între ei, precum și de geometria sursei. După cum se știe, cele mai slabe și mai puțin complicate interacțiuni se stabilesc între atomii substanțelor aflate în stare gazoasă. De aceea, pentru a simplifica maximal modelul de sursă reală, în continuare ne vom referi numai la sursele formate din gaze atomice sau moleculare.

3. 4. 1. Lărgirea liniilor spectrale prin ciocniri

Considerând sursa de radiații optice ca un sistem termodinamic, ea este caracterizată de o anumită energie internă. O parte a acesteia, energia de agitație termică, se poate transforma în energie de excitare a emițătorilor individuali prin ciocniri între atomi (sau molecule, depinzând de natura gazului). Procesele de ciocnire între atomii unui gaz, aflat la o temperatură dată, sunt evenimente aleatoare și se produc după legi cu caracter statistic. Evident, și direcțiile după care au loc ciocnirile se stabilesc tot după legile evenimentelor întâmplătoare; de aceea, momentele dipolar-electrice induse prin ciocniri sunt distribuite haotic atât ca amplitudine (valoare maximă) cât și ca orientare.

Așa cum am arătat în paragraful 3.3 unda emisă spontan de un dipol excitat, neperturbat în timpul dezexcitării, este caracterizată de o pulsație centrală (proprie) ω_0 și de un factor de amortizare γ , fiind finită atât în timp ($\tau \approx 2/\gamma \approx 10^{-8}$ s), cât și în spațiu ($\ell_0 = c \cdot \tau \approx 3$ m). Dacă considerăm că frecvența centrală este $\nu_0 = \omega_0/2\pi \approx 10^{15}$ Hz, rezultă că în undă (tren de unde) există $\nu_0\tau \approx 10^7$ oscilații complete ale câmpului electric al undei.

În realitate, trenurile de unde emise de atomii sursei sunt mult mai scurte deoarece procesele de emisie sunt întrerupte de ciocnirile cu alți atomi. Prin ciocniri se modifică, în general, atât amplitudinea eA a momentului electric dipolar, cât și direcția acestuia sau faza oscilațiilor; după o ciocnire, atomul emite un tren de unde diferit de cel emis anterior.

La temperatura camerei ($T = 300 \text{ K}$) și la presiune normală ($p = 100 \text{ kPa}$), intervalul mediu de timp între două ciocniri succesive este de ordinul a 10^{-11} s . Având în vedere că timpul de viață al unui atom excitat este cam de 10^{-8} s , rezultă că acest atom este ciocnit de un alt atom cu mult înainte ca el să fi putut emite complet trenul său de unde. Cu alte cuvinte, procesele de emisie sunt întrerupte foarte des de ciocnirile cu alți atomi și, din această cauză, au loc modificări semnificative ale regimului de radiație. Când ciocnirile se produc la intervale de timp egale cu 10^{-11} s , lungimea unui tren elementar se scurtează sever, ajungând cam la 3 mm . De aceea, cu toată amortizarea exponențială (vezi relația (3.129)), se poate admite, cel puțin într-o primă aproximație, că în limitele fiecărui tren de unde, amplitudinea rămâne constantă. Prin urmare, semnalul global radiat este format dintr-o înfinitate de trenuri, fiecare cu pulsația centrală $\omega_0 = 2\pi\nu_0$, dar cu amplitudinile constante și fazele inițiale variind aleator de la un tren la altul.

Să simplificăm acum tratarea noastră presupunând că lărgimea naturală a liniei spectrale *ar fi egală cu zero*, adică atomul excitat ar emite într-un interval de timp infinit de mare, un tren neamortizat, de pulsație fixă ω_0 . În prezența ciocnirilor, acest tren infinit temporal, este fragmentat în trenuri scurte, care se succed aleator unul după altul, în funcție de intervalul de timp dintre două ciocniri consecutive. Fie

$$E(t) = E_0 e^{i(\omega_0 t + \varphi)}, \quad t \in (t_0, t_0 + \rho), \quad (3.154)$$

câmpul electric, de amplitudine constantă E_0 , al fiecărui tren elementar, unde ρ este lungimea sa temporală iar t_0 - momentul începerii emisie sale. Parametrul fazic φ variază evident aleator de la un tren elementar la altul.

Din fizica statistică se știe că probabilitatea ca intervalul de timp dintre două ciocniri succesive să fie cuprins între ρ și $\rho + d\rho$ este dat de formula

$$p(\rho)d\rho = \frac{1}{\tau_0} \exp\left(-\frac{\rho}{\tau_0}\right) d\rho, \quad \text{cu } \int_0^{+\infty} p(\rho)d\rho = 1, \quad (3.155)$$

unde τ_0 este intervalul mediu de timp dintre două ciocniri succesive. Într-adevăr, valoarea medie a lui ρ este

$$\langle \rho \rangle = \int_0^{+\infty} \rho p(\rho) d\rho = \frac{1}{\tau_0} \int_0^{+\infty} \rho \cdot \exp\left(-\frac{\rho}{\tau_0}\right) d\rho = \tau_0. \quad (3.156)$$

Transformata Fourier a trenului elementar (3.154), calculată cu formula generală (3.128), are forma

$$\begin{aligned} E(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} E(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{t_0}^{t_0 + \rho} E_0 e^{i(\omega_0 t - \omega t + \varphi)} dt = \\ &= E_0 \exp[i(\omega_0 - \omega)t_0 + i\varphi] \cdot \frac{\exp[i\rho(\omega_0 - \omega)] - 1}{i(\omega_0 - \omega)}. \end{aligned} \quad (3.157)$$

De aici, pentru *puterea spectrală* $G_e(\omega) \equiv |E(\omega)|^2$ obținem

$$G_e(\omega) = \rho^2 E_0^2 \text{sinc}^2 \left[\frac{\rho}{2} (\omega_0 - \omega) \right]. \quad (3.158)$$

Mărimea $G_e(\omega)$ dată prin relația (3.158) este, de fapt, intensitatea radiației unui tren elementar, în intervalul de timp ρ în care atomul nu a fost perturbat.

Pentru a afla puterea spectrală pe intervalul de emisie infinit de mare, vom combina formulele (3.155) și (3.158), adică vom calcula media statistică

$$G(\omega) = \int_0^{+\infty} p(\rho) G_e(\omega) d\rho = \frac{E_0^2}{\tau_0} \int_0^{+\infty} \rho^2 e^{-\rho/\tau_0} \text{sinc}^2 \left(\frac{\rho}{2} (\omega_0 - \omega) \right) d\rho \quad (3.159)$$

obținând în final

$$G(\omega) = 2E_0^2 \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + (1/\tau_0)^2} \quad (3.160)$$

Comparând relațiile (3.160) și (3.143) ajungem la concluzia că avem de-a face cu o *linie cu contur lorentzian*, de grosime (la jumătatea înălțimii maxime) egală cu

$$\Delta\omega_{\text{ciocn}} = \frac{2}{\tau_0}. \quad (3.161)$$

Evaluând τ_0 , adică intervalul mediu de timp dintre două ciocniri succesive, ca raportul dintre drumul liber mediu și viteza medie a atomilor (moleculelor) găsim că, la temperatura camerei ($T \approx 300\text{K}$) și la presiune normală ($p \approx 100 \text{ kPa}$), el are ordinul de mărime $\tau_0 \approx 10^{-11} \text{ s}$. Această valoare ne dă $\Delta\omega_{\text{ciocn}} \approx 2 \cdot 10^{11} \text{ s}^{-1}$. Față de lărgimea naturală $\delta\omega = \gamma \approx 10^8 \text{ s}^{-1}$, linia spectrală *omogenă*, lărgită prin ciocniri, este cam de o mie de ori mai groasă.

Cu ajutorul funcției lorentziene normate (3.143), expresia (3.160) a *puterii spectrale emise*, cu considerarea influenței ciocnirilor, poate fi scrisă sub forma

$$G(\omega) = 4\pi \frac{E_0^2}{\gamma} F_L(\omega) = 2\pi\tau_0 E_0^2 F_L(\omega). \quad (3.162)$$

Aici s-a utilizat corespondența evidentă $\gamma \rightarrow 2/\tau_0$. În sfârșit, dacă avem în vedere expresia (3.161), mai putem scrie

$$G(\omega) = 4\pi \frac{E_0^2}{\Delta\omega_{\text{ciocn}}} F_L(\omega). \quad (3.162')$$

3. 4. 2. Lărgirea liniilor spectrale prin efect Doppler

Să presupunem că un anumit atom (moleculă), care emite lumină, se află în mișcare de translație cu viteza \vec{v}_2 , el aflându-se în starea excitată de energie W_2 . Emițând un foton de energie $\varepsilon = \hbar\omega$, atomul (molecula) ajunge în starea de energie W_1 și, în final, se mișcă cu viteza \vec{v}_1 . Legile de conservare pentru energie și impuls au forma

$$W_2 + \frac{1}{2}M\vec{v}_2^2 = W_1 + \frac{1}{2}M\vec{v}_1^2 + \hbar\omega, \quad (3.163)$$

$$M\vec{v}_2 = M\vec{v}_1 + \vec{p}_{\text{foton}}, \quad M = \text{masa atomului}, \quad (3.164)$$

unde $p_{\text{foton}} = h/\lambda = \hbar k$, $\hbar = h/2\pi$, $k = 2\pi/\lambda$, adică $\vec{p}_{\text{foton}} = \hbar\vec{k}$.

Fie $\hbar\omega_0$ energia pe care ar elibera-o atomul la trecerea din starea excitată W_2 în starea W_1 , dacă el ar fi și ar rămâne în repaus, adică

$$\hbar\omega_0 = W_2 - W_1. \quad (3.165)$$

Eliminând W_1 , W_2 și \vec{v}_1 între ultimele trei relații obținem

$$\omega_0 - \omega = \frac{\hbar k^2}{2M} - (\vec{k} \cdot \vec{v}_2). \quad (3.166)$$

Să dirijăm axa Oz a sistemului de referință în sensul vectorului \vec{k} , adică în sensul de emisie al fotonului. Atunci, deoarece $k = \omega/c$, avem

$$\omega_0 - \omega = \frac{\hbar k^2}{2M} - kv_{2z} = \frac{\hbar \omega^2}{2Mc^2} - \omega \left(\frac{v_{2z}}{c} \right). \quad (3.166')$$

Ținând cont că, la temperatura camerei ($T = 300\text{K}$) raportul v_2/c are ordinul de mărime 10^{-5} iar, în domeniul vizibil, $\omega \approx 10^{15}\text{s}^{-1}$, al doilea termen din membrul drept al relației (3.166') are ordinul de mărime 10^{10}s^{-1} . Primul termen, pentru atomii cu mase medii, are ordinul de mărime de numai 10^{-9}s^{-1} , adică o valoare neglijabil de mică în comparație cu cea a termenului al doilea. În aceste condiții, din formula (3.166') rezultă *formula efectului Doppler*

$$\omega = \frac{\omega_0}{1 - \frac{v_{2z}}{c}} \approx \omega_0 \left(1 + \frac{v_{2z}}{c} \right) = \omega_0 \left(1 + \frac{v_2}{c} \cos \theta \right), \quad (3.167)$$

unde θ este unghiul dintre viteza inițială a atomului și sensul impulsului fotonului emis.

Când $\theta = 0$, adică fotonul se emite în sensul mișcării atomului, pulsația emisă crește ($\omega > \omega_0$) iar când $\theta = \pi$, adică fotonul se emite în sens contrar mișcării atomului, pulsația emisă scade ($\omega < \omega_0$) - față de valoarea pulsației emise în repaus (fără recul). Cele două cazuri menționate corespund așa - numitelor *efecte longitudinale* și sunt caracterizate prin *deplasarea Doppler* $\delta\omega_D = |\omega - \omega_0| = \omega_0(v_2/c)$, al cărei ordin de mărime este, în domeniul vizibil, de aproximativ 10^{10}s^{-1} .

Când $\theta = \pm\pi/2$, din formula (3.167) nu rezultă un *efect Doppler transversal*. Acest lucru este o consecință a tratării clasice, nerelativiste, date. Dacă legile de conservare pentru energie și impuls s-ar fi scris relativist, în locul formulei (3.166) am fi obținut

$$\omega_0 - \omega = \frac{\hbar\omega}{M_0c^2} \frac{\omega - \frac{2c}{\hbar}(\vec{p}_2 \cdot \vec{n})}{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\hbar\omega}{M_0c^2} \right)^2 - \frac{2}{M_0c}(\vec{p}_2 \cdot \vec{n}) \left(\frac{\hbar\omega}{M_0c^2} \right)}}, \quad (3.168)$$

\vec{p}_2 fiind impulsul relativist al atomului înainte de emisia fotonului iar \vec{n} - versorul direcției fotonului emis ($\vec{n} = \vec{k}/k$). Efectul Doppler *transversal* corespunde situației în care produsul scalar $\vec{p}_2 \cdot \vec{n}$ este egal cu zero. Obținem

$$\omega - \omega_0 = \frac{\hbar\omega^2}{M_0c^2} \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{1 + (\hbar\omega/M_0c^2)^2}} \approx \frac{\hbar\omega^2}{2M_0c^2} \left[1 - \left(\frac{\hbar\omega}{2M_0c^2} \right)^2 + \dots \right], \quad (3.169)$$

adică un efect cu ordinul de mărime $10^{-9}s^{-1}$, *foarte mic* în comparație cu efectele longitudinale sau cvasilongitudinale, de mărimea termenului neglijat la trecerea de la formula (3.166') la (3.167). Din această cauză, în cele ce urmează vom lua în considerare numai efectele longitudinale, fără să mai precizăm explicit acest lucru.

Să trecem acum la analiza modului în care efectul Doppler contribuie la lărgirea liniilor spectrale emise de gaze în condiții de echilibru termic. Considerând că atomii aflați în mișcare dezordonată sunt distribuiți maxwellian după viteze, putem spune că numărul celor care au viteza v_{2z} cuprinsă în intervalul $(v_{2z}, v_{2z} + dv_{2z})$ este direct proporțional cu

$$dN \sim \exp\left(-\frac{Mv_{2z}^2}{2k_B T}\right) dv_{2z}, \quad (3.170)$$

unde k_B este constanta lui Boltzmann. Din formula (3.167) rezultă

$$v_{2z} = \frac{c}{\omega_0}(\omega - \omega_0) \quad \text{adică} \quad dv_{2z} = \frac{c}{\omega_0}d\omega \quad (3.171)$$

și relația (3.170) se poate transcrie sub forma

$$dN \sim \frac{c}{\omega_0} \exp\left[-\frac{Mc^2}{2k_B T\omega_0^2}(\omega - \omega_0)^2\right] d\omega \sim f(\omega)d\omega. \quad (3.172)$$

Aici $f(\omega)$ este *funcția de distribuție* după pulsații a atomilor emițători. Ea are expresia (vezi și fig. 3.33)

$$f(\omega) \equiv \exp\left[-\frac{Mc^2}{2k_B T\omega_0^2}(\omega - \omega_0)^2\right] \quad (3.173)$$

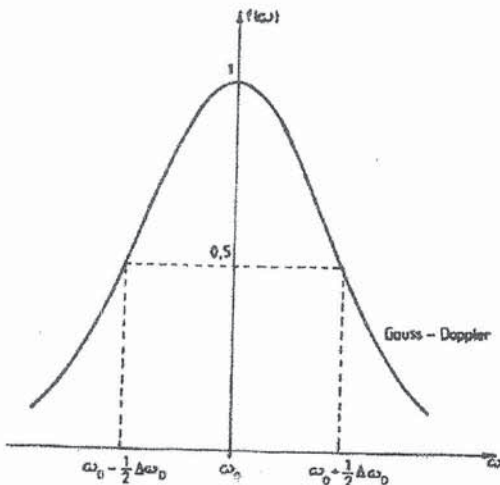


Fig.3.33. Linie cu contur gaussian.

și este maximă pentru $\omega = \omega_0$, adică pentru pulsația care ar fi fost emisă în stare de repaus,

$$f(\omega_0) = 1. \quad (3.174)$$

Funcția $f(\omega)$ este o funcție gaussiană (vezi secțiunea 3.2.4, punctul 3). Dacă evaluăm grosimea acestei *linii cu contur gaussian* la $f(\omega) = 1/2$, obținem

$$\omega_{1,2} = \omega_0 \pm \frac{\omega_0}{c} \sqrt{\frac{2k_B T \ln 2}{M}}, \quad (3.175)$$

adică

$$\Delta\omega_{\text{Doppler}} \equiv |\omega_1 - \omega_2| = \frac{2\omega_0}{c} \sqrt{\frac{2k_B T \ln 2}{M}}. \quad (3.175')$$

Se observă că deplasarea Doppler $\Delta\omega_{\text{Doppler}}$ este cu atât mai mare cu cât atomii sunt mai ușori și cu cât temperatura absolută este mai mare.

Acum putem scrie

$$f(\omega) = \exp\left[-\frac{4 \ln 2}{\Delta\omega_{\text{Doppler}}^2} (\omega - \omega_0)^2\right] \equiv \exp\left[-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\sigma^2}\right] \quad (3.176)$$

unde

$$\sigma = \frac{\Delta\omega_{\text{Doppler}}}{2\sqrt{2 \ln 2}} = \frac{\omega_0}{c} \sqrt{\frac{k_B T}{M}}. \quad (3.177)$$

Prin definiție, funcția

$$F_G(\omega) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\sigma^2}\right] \quad (3.178)$$

se numește *funcție gaussiană normală*, deoarece satisface condiția (analoagă cu relația (3.144))

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_G(\omega) d\omega = 1. \quad (3.179)$$

În fig.3.34 sunt reprezentate grafic, pentru aceeași grosime, adică pentru $\gamma = 2\sigma\sqrt{2 \ln 2}$, atât funcția gaussiană normală cât și funcția lorentziană normală. Se poate calcula ușor că maximum curbei gaussiene este de $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ ori mai înalt decât cel al curbei lorentziene.

Un exemplu numeric de lărgire doppleriană este credem edificator. Să considerăm linia cu $\lambda_0 = 632,8 \text{ nm}$ a neonului, pentru care $M = 20 \text{ u}$, emisă la $T = 300 \text{ K}$. Grosimea sa, calculată cu relația (3.175), este $\Delta\lambda_{\text{Doppler}} = 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ nm}$. Comparând această valoare cu

lărgimea naturală $\delta\omega = \gamma = 10^8 \text{ s}^{-1}$, adică cu $\Delta\lambda_{\text{nat}} = (\lambda_0^2/2\pi c)\delta\omega = 2,12 \cdot 10^{-5} \text{ nm}$, ajungem la concluzia că, prin efect Doppler, grosimea liniei crește cu două ordine de mărime, adică de sute de ori.

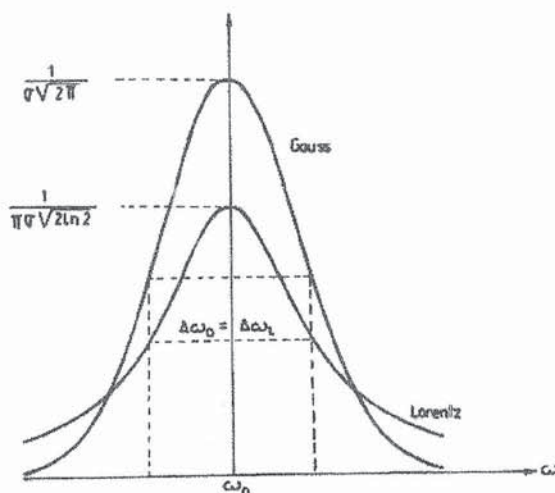


Fig.3.34. Comparatie între liniile cu contur lorentzian și gaussian de aceeași grosime (la 1/2 din înălțimea maximă).

3. 4. 3. Lărgirea liniilor prin efecte combinate

Prin acțiunea simultană a mai multor factori (mecanisme) de lărgire a liniilor de emisie, rezultă în general efecte destul de complexe. Dacă ne referim de exemplu la o linie cu pulsația centrală ω_0 , lărgită prin diverse mecanisme, linia rezultantă, forma ei, poate fi determinată cunoscând forma finală determinată de acțiunea individuală a fiecărui mecanism în parte. De pildă, dacă funcțiile normate $F_1(\omega)$ și $F_2(\omega)$ caracterizează forma finală a liniei, cu pulsația centrală ω_0 , lărgită prin două mecanisme diferite, funcția

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\Omega) F_2(\omega + \omega_0 - \Omega) d\Omega \quad (3.180)$$

caracterizează forma liniei obținute prin acțiunea simultană a ambelor mecanisme. Relația poate fi înțeleasă ușor dacă ne gândim că unul din mecanisme baleiază de la stânga la dreapta pulsației ω_0 peste toate pulsațiile generate de acțiunea celuilalt mecanism (vezi și secțiunea 3.2.5). Comparând relația (3.180) cu definiția (3.88) a convoluției putem scrie

$$F(\omega) = F_1(\omega) \otimes F_2(\omega + \omega_0). \quad (3.181)$$

Considerând cele două mecanisme analizate în paragrafele anterioare, mecanismul prin ciocniri (lărgire lorentziană) și mecanismul prin efect Doppler (lărgire gaussiană), prin calcul direct obținem ușor așa-numitul *contur de tip Voigt*, descris de funcția

$$F(\omega) = \frac{2\sqrt{\ln 2}}{\pi\sqrt{\pi}\Delta\omega_D} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-a^2\rho^2}}{1 + \left(\rho - 2\frac{\omega_0 - \omega}{\Delta\omega_L}\right)^2} d\rho, \quad (3.182)$$

unde $a = \sqrt{\ln 2} (\Delta\omega_L / \Delta\omega_D)$ este un parametru adimensional, corespunzător liniei considerate (ω_0) și condițiilor macroscopice exterioare (presiune, temperatură etc.).

La centrul liniei, adică pentru $\omega = \omega_0$, avem

$$F(\omega_0) = \frac{2\sqrt{\ln 2}}{\pi\sqrt{\pi}\Delta\omega_D} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-a^2\rho^2}}{1 + \rho^2} d\rho. \quad (3.183)$$

Integralele prezente în formulele (3.182) - (3.183) pot fi exprimate în funcție de integrala

$$I(\omega) = \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-y^2}}{a^2 + (\omega - y)^2} dy \quad (3.184)$$

care, pentru diverse valori ale lui a și ω , se găsește tabelată în literatura de specialitate (vezi, de exemplu, V. S. Matveev, *Journal prikladnoi spectroscopii*, tom. 16, pag. 228, 1972).

Liniile cu contur lorentzian și gaussian discutate în paragrafele anterioare au o particularitate importantă: grosimea unei linii lărgită lorentzian sau gaussian prin două mecanisme diferite se poate exprima ușor în funcțiile de grosimile corespunzând acțiunii individuale a fiecărui mecanism. Mai exact, în caz lorentzian putem scrie $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, adică

lărgimile se adună aritmetic, iar în caz gaussian - $\Delta = \sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2}$, adică lărgimile se compun conform teoremei lui Pitagora (vezi de exemplu formula (3.103)).

§. 3. 5. Unde (semnale) modulate

După cum se știe, orice oscilație armonică este caracterizată prin mărimile constante amplitudine, frecvență și fază inițială; în ansamblul său, faza $\omega t + \varphi$ variază liniar în timp. Modificarea acestor parametri în procesul de oscilație poartă denumirea de *modulație* iar oscilațiile (unde) respective se spune că sunt *modulate în amplitudine, frecvență sau fază*. Să ne ocupăm pe rând de toate aceste situații, posibile și în practica optică.

1. *Modulația în amplitudine*. O oscilație modulată în amplitudine poate fi reprezentată sub forma generală

$$f(t) = [A_0 + a(t)]\cos \omega_0 t, \quad (3.185)$$

unde $a(t)$ descrie modulația, ω_0 este pulsația oscilației armonice iar $|a(t)| < A_0$ pentru orice moment de timp t . Fie de exemplu

$$a(t) = a_0 \cos \Omega t, \quad (3.186)$$

cu pulsația Ω foarte mică în comparație cu ω_0 , adică $\Omega \ll \omega_0$. Revenind cu (3.186) în (3.185) avem semnalul

$$f(t) = (A_0 + a_0 \cos \Omega t)\cos \omega_0 t. \quad (3.185')$$

Graficul acestei oscilații este reprezentat în fig.3.35. Așa cum rezultă direct din formula (3.185'), amplitudinea semnalului reprezentat în fig. 3.35 variază între valoarea minimă $A_0 - a_0$ și valoarea maximă $A_0 + a_0$.

Cu ajutorul unei transformări trigonometrice simple putem scrie relația (3.185') sub forma unei sume de trei termeni

$$f(t) = A_0 \cos \omega_0 t + \frac{1}{2}a_0 \cos(\omega_0 - \Omega)t + \frac{1}{2}a_0 \cos(\omega_0 + \Omega)t. \quad (3.185'')$$

Așadar, oscilația modulată este suma a trei oscilații armonice simple, de pulsații $\omega_0 - \Omega$, ω_0 și $\omega_0 + \Omega$, cu amplitudinile constante $a_0/2$, A_0 și respectiv $a_0/2$. Pulsația ω_0 poartă denumirea de *pulsație purtătoare* iar pulsațiile $\omega_0 \pm \Omega$ - *pulsații laterale* (vezi fig.3.36). Față de purtătoare, pulsațiile laterale sunt situate simetric.

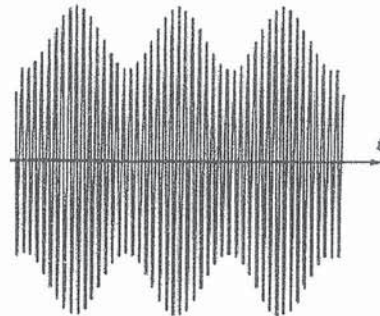


Fig.3.35. Graficul funcției $f(t)$ dată prin formula (3.185').

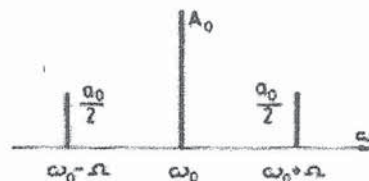


Fig.3.36. Componentele spectrale ale semnalului din fig. 3.35.

Dacă $a(t)$ nu mai este o funcție armonică ci numai o funcție periodică, cu perioada T , putem atașa acestei perioade o pulsație $\Omega \equiv 2\pi/T$ și putem dezvolta funcția $a(t)$ în serie Fourier de tipul (3.1), cu termeni de forma $\cos n\Omega t$ și $\sin n\Omega t$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Când respectiva serie se înlocuiește în formula (3.185) și apoi produsele de funcții $\cos \omega_0 t \cos n\Omega t$, $\cos \omega_0 t \sin n\Omega t$ se transformă ca în trecerea de la (3.185') la (3.185''), obținem o serie în care apar numai oscilațiile armonice de pulsații ω_0 , $\omega_0 \pm n\Omega$, $n = 1, 2, 3, \dots$. În acest caz, spectrul pulsațiilor are forma reprezentată în fig.3.37, distanța dintre două pulsații succesive fiind egală cu $\Omega = 2\pi/T$.

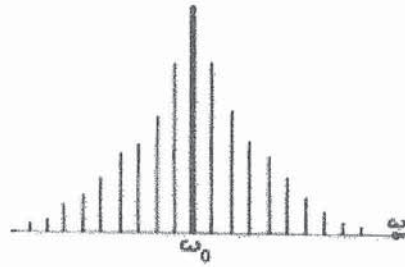


Fig.3.37. Spectrul de amplitudini al unui semnal de forma (3.35) cu $a(t)$ funcție periodică (oarecare) - de perioadă T .

În situațiile în care funcția $a(t)$ nu mai este nici periodică ea poate fi dezvoltată ca o integrală Fourier iar spectrul ei va fi, evident, continuu. Introducând integrala Fourier respectivă în relația (3.185) obținem pentru oscilația modulată în amplitudine un spectru continuu de pulsații, distribuite de ambele părți ale purtătoarei ω_0 , ca în cazul anterior (vezi fig.3.38). Lărgimea spectrului final de pulsații va fi determinată de lărgimea efectivă a spectrului funcției modulatorie $a(t)$. La același rezultat se poate ajunge și calculând direct transformata Fourier $F(\omega)$ a semnalului (3.185), în care, pentru comoditate, în loc de $\cos \omega_0 t$ vom scrie $\exp(i\omega_0 t)$. Obținem

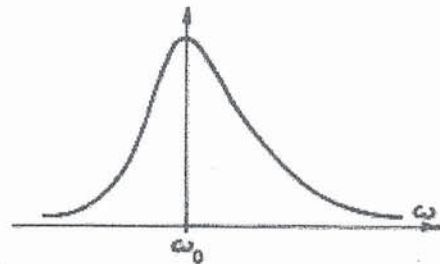


Fig.3.38. Spectrul continuu al unui semnal modulat în amplitudine de o funcție $a(t)$ neperiodică (vezi formula (3.185)).

$$F(\omega) = 2\pi A_0 \delta(\omega - \omega_0) + A(\omega - \omega_0), \quad (3.187)$$

unde $A(\omega - \omega_0)$ este spectrul Fourier al funcției $a(t)$.

Considerentele de mai sus sunt valabile, de exemplu, și pentru oscilațiile câmpului electric dintr-un punct dat al spațiului în care a ajuns o undă electromagnetică. Dacă viteza de propagare nu depinde de frecvență, adică *mediul este nedispersiv*, atunci, fără a-și modifica forma, oscilația se transmite în alte puncte din spațiu cu o viteză unică pentru toate componentele spectrale. În consecință, într-un alt punct din spațiu, forma oscilației se evaluează ușor ținând cont doar de intervalul de timp necesar propagării undei între cele două puncte din spațiu. Din contră, în *mediile dispersive*, în care viteza de propagare a undelor electromagnetice depinde de frecvență, lucrurile se complică; forma oscilației într-un nou punct din spațiu nu se mai poate exprima ușor în funcție de forma ei, cunoscută, într-un punct atins anterior de către undă. Asupra acestor lucruri vom reveni în paragraful următor.

2. *Modulația în frecvență (pulsație) și în fază.* Aceste două tipuri de modulații vor fi analizate împreună, având în vedere faptul că formulele cu care se vor descrie sunt

strâns legate între ele. Cu toate acestea, structura semnalelor modulate în frecvență (pulsatie) și în fază, va fi diferită.

Presupunând faza inițială a unui semnal egală cu zero, să scriem faza sa la un moment dat sub forma

$$\varphi(t) = \int_0^t \omega(\tau) d\tau, \quad (3.188)$$

în care $\omega(\tau)$ este pulsația modulatorie. Din această relație rezultă

$$\omega(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt}. \quad (3.189)$$

Ultimele două formule ne permit să trecem de la descrierea modulației în frecvență la o descriere a modulației în fază și invers.

Să analizăm mai detaliat cazul particular al unei modulații armonice în frecvență, considerând funcția $\omega(t)$ de forma (vezi fig.3.39).

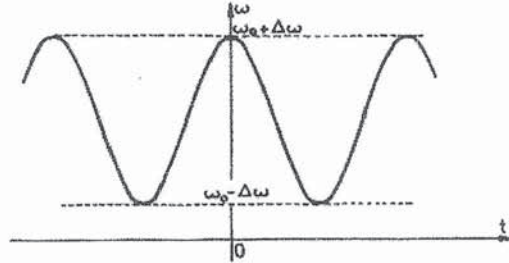


Fig. 3.39. Modulație armonică în frecvență (pulsatie).

$$\omega(t) = \omega_0 + \Delta\omega \cdot \cos\Omega t, \quad (3.190)$$

unde ω_0 este o pulsație constantă, în jurul căreia apar oscilații de pulsație cu amplitudinea $\Delta\omega$ și cu pulsația Ω . În conformitate cu (3.188), obținem

$$\varphi(t) = \int_0^t \omega(t) dt = \omega_0 t + \frac{\Delta\omega}{\Omega} \sin\Omega t. \quad (3.191)$$

De aici, rezultă că și faza $\varphi(t)$ este modulată după o lege armonică, cu aceeași pulsație Ω , dar cu amplitudinea $\Delta\omega/\Omega$ (vezi fig.3. 40). Cel de-al doilea termen descrie oscilațiile fazei față de dependența temporală liniară a fazei, specifică situației armonice. Invers, dacă faza este modulată după legea armonică

$$\varphi(t) = \omega_0 t + \Delta\varphi \cdot \sin\Omega t, \quad (3.192)$$

din formula (3.189) rezultă că pulsația este modulată după legea

$$\omega(t) = \frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 + \Delta\varphi \cdot \Omega \cos\Omega t, \quad (3.193)$$

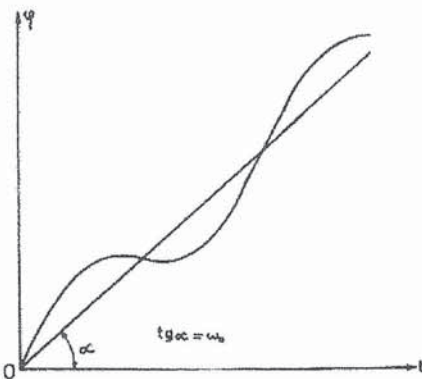


Fig.3.40. Modulație armonică a fazei.

pulsația Ω a modulației de frecvență rămânând aceeași iar amplitudinea devenind $\Delta\varphi \cdot \Omega$.

Din aceste exemple, rezultă clar că modulația în fază și în frecvență (pulsatie) sunt complet echivalente atunci când este vorba de modulații armonice. Afirmația nu mai este adevărată însă în cazul modulațiilor nearmonice, acum structura semnalelor modulate în frecvență și respectiv în fază fiind absolut diferită. La o modulație lentă în frecvență ($\Omega = \text{mic}$ în formula (3.190)) corespunde o

oscilație mare a fazei ($\Delta\omega/\Omega = \text{mare}$ în formula (3.191)) și invers, la o modulație rapidă în frecvență ($\Omega = \text{mare}$), corespunde o oscilație mică a fazei ($\Delta\omega/\Omega = \text{mic}$). Dimpotrivă, la un semnal modulată în fază, variațiilor lente (rapide) ale fazei le corespund amplitudini mici (mari) ale oscilațiilor de pulsație. Într-adevăr, când Ω din (3.192) este mic (mare), amplitudinea $\Delta\varphi \cdot \Omega$ din (3.193) este mică (mare).

Modulațiile în frecvență și respectiv fază se deosebesc și după modul în care se realizează efectiv, practic. La modulația în frecvență se acționează direct asupra sursei (generatorului), modificându-se, într-o anumită manieră, unul sau mai mulți parametri intrinseci (ca de exemplu, capacitatea și inductanța unui circuit oscilant). În celălalt caz, frecvența de oscilație a sursei se păstrează constantă, faza modulându-se pe parcurs, în timpul propagării semnalului.

Să revenim la cazul unui semnal modulată în fază, cu $\varphi(t)$ dat de formula (3.191) și să determinăm spectrul pulsațiilor sale. Fie deci câmpul electric

$$E(t) = E_0 \cos \varphi(t) = E_0 \cos \left[\omega_0 t + \frac{\Delta\omega}{\Omega} \sin \Omega t \right], \quad (3.194)$$

cu E_0 real, și să determinăm structura sa spectrală. Putem scrie acest semnal sub forma

$$E(t) = \frac{E_0}{2} \left[e^{i\omega_0 t} \cdot e^{i\left(\frac{\Delta\omega}{\Omega}\right)\sin \Omega t} + e^{-i\omega_0 t} e^{-i\left(\frac{\Delta\omega}{\Omega}\right)\sin \Omega t} \right].$$

Din teoria funcțiilor Bessel cunoaștem însă dezvoltarea

$$e^{i\left(\frac{\Delta\omega}{\Omega}\right)\sin \Omega t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n \left(\frac{\Delta\omega}{\Omega} \right) e^{in\Omega t} \quad (3.195)$$

și deoarece $-\sin \Omega t = \sin(-\Omega t)$, putem scrie imediat

$$e^{-i\left(\frac{\Delta\omega}{\Omega}\right)\sin \Omega t} = e^{+i\left(\frac{\Delta\omega}{\Omega}\right)\sin(-\Omega t)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n \left(\frac{\Delta\omega}{\Omega} \right) e^{-in\Omega t}.$$

Revenind cu aceste dezvoltări în semnalul $E(t)$ obținem în final

$$E(t) = E_0 \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n \left(\frac{\Delta\omega}{\Omega} \right) \cos \left[(\omega_0 + n\Omega) t \right]. \quad (3.196)$$

Rezultă că, pentru modulația sinusoidală considerată, avem o serie infinită de componente spectrale, situate la distanțe egale cu multipli întregi ai frecvenței de modulație (Ω), deasupra ($> \omega_0$) și sub ($< \omega_0$) pulsația purtătoare.

În cazul particular al unor rapoarte $\Delta\omega/\Omega \ll 1$, din seria (3.196) se pot reține numai termenii pentru $n = -1, 0$ și $+1$, obținând aproximativ

$$E(t) = E_0 \left[\cos \omega_0 t + \frac{\Delta\omega}{2\Omega} \cos (\omega_0 + \Omega) t - \frac{\Delta\omega}{2\Omega} \cos (\omega_0 - \Omega) t + \dots \right]. \quad (3.197)$$

Această expresie are forma (3.185"), adică este identică celei pentru modulația de amplitudine, cu deosebirea că, acum, banda laterală inferioară (pentru $\omega_0 - \Omega$) este negativă.

În cazul unor valori $\Delta\omega/\Omega$ mai mari, formula (3.197) își pierde valabilitatea și modularea în fază sau frecvență nu mai păstrează trăsăturile modulării în amplitudine nici măcar în cazul simplu, armonic. Modularea în frecvență se deosebește de cea în amplitudine și din cauză că, în ultimul caz, legătura dintre spectrul semnalului și spectrul funcției modulatorie este liniar iar, în primul caz, - neliniar. La o modulare în amplitudine, adăugarea unei noi frecvențe la spectrul semnalului înseamnă adăugarea unei noi frecvențe, corespunzătoare, în spectrul oscilației modulate, fără a modifica amplitudinea celorlalte frecvențe. Din contră, la o modulare de frecvență, adăugarea unor noi frecvențe conduce nu numai la apariția în spectrul oscilației modulate a mai multor frecvențe ci și la modificarea amplitudinilor celor existente.

§. 3. 6. Pachete de unde. Viteză de grup

Undele electromagnetice se propagă cu aceeași viteză, independentă de frecvență, numai în vid. În medii materiale, viteza undelor electromagnetice este inferioară vitezei luminii în vid și depinde de frecvențe. Dependența vitezei undelor în medii materiale de frecvențe se numește *dispersie* (vezi vol. II). În acest paragraf vom face cunoștință cu unele consecințe directe ale proprietăților dispersive asupra propagării undelor în medii materiale.

Să analizăm superpoziția a două unde, de pulsații ω_1 și ω_2 , având numerele de undă k_1 și k_2 , de forma

$$E_1(z, t) = E_0 \cos(k_1 z - \omega_1 t), \quad E_2(z, t) = E_0 \cos(k_2 z - \omega_2 t), \quad (3.198)$$

presupunând că ele au aceeași amplitudine, același sens de propagare (pe axa Oz, în sens pozitiv) și aceeași stare de polarizare (vezi vol. II).

Prin definiție, se numește *viteză de fază* viteza de propagare a planelor (în general a suprafețelor) de fază constantă. În cazul nostru, prin diferențierea relațiilor de forma

$$kz - \omega t = \text{constant} \quad (3.199)$$

obținem

$$kdz - \omega dt = 0, \quad (3.200)$$

adică

$$v_f = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k}. \quad (3.201)$$

În vid, viteza de fază v_f este chiar $c \approx 300.000 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. Pentru undele considerate mai sus, în (3.198), vitezele de fază pot fi, în general, diferite, adică $\omega_1/k_1 \neq \omega_2/k_2$.

Ca rezultat al superpoziției câmpurilor E_1 și E_2 , care se propagă în același sens, obținem câmpul

$$\begin{aligned} E(z, t) &= E_1 + E_2 = \\ &= 2E_0 \cos \left[\frac{(\omega_1 - \omega_2)t}{2} - \frac{(k_1 - k_2)z}{2} \right] \cdot \cos \left[\frac{(\omega_1 + \omega_2)t}{2} - \frac{(k_1 + k_2)z}{2} \right]. \end{aligned} \quad (3.202)$$

Dacă nu ar exista dispersie, adică $\omega_1 = k_1 c$ și $\omega_2 = k_2 c$, câmpul electric rezultat ar avea forma

$$E(z, t) = 2E_0 \cos \left[\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \left(t - \frac{z}{c} \right) \right] \cdot \cos \left[\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \left(t - \frac{z}{c} \right) \right], \quad (3.203)$$

relație care ne arată că unda globală s-ar propaga, în sensul pozitiv al axei Oz, cu viteza c (vezi combinația $t - z/c$ în argumentele funcțiilor cosinus), fără amortizare. Referindu-ne la diapazonul optic, observăm că este îndeplinită întotdeauna condiția $|\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_1 + \omega_2$; celor doi factori cosinusoidali din (3.203) li se poate da astfel următoarea interpretare:

mărimea $2E_0 \cos \left[\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \cdot \left(t - \frac{z}{c} \right) \right]$ este amplitudinea *lent variabilă* a unei armonice cu pulsația $\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$, prezentă în cel de-al doilea factor cosinusoidal. La un moment de timp fixat, unda are forma reprezentată în fig. 3.41, unde curba continuă se referă la pulsația semisumă iar cea punctată este *înfășurătoarea* amplitudinii oscilației, descrisă de cosinusul ce conține pulsația semidiferență. Amplitudinea variază, în modul, de la valoarea zero la valoarea $2E_0$. Dacă am fi considerat amplitudini diferite, E_{01} și E_{02} la cele două componente, amplitudinea undei rezultante ar fi variat de la $|E_{01} - E_{02}|$ la $E_{01} + E_{02}$ (ca în fig.3.35).

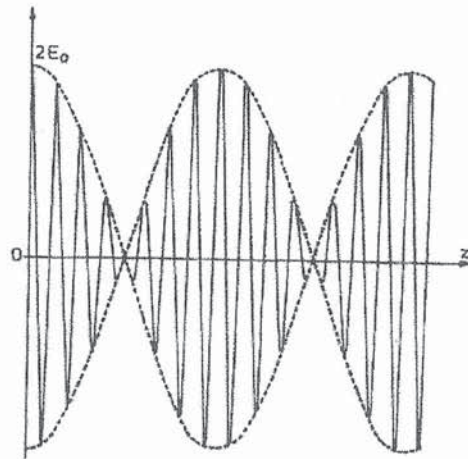


Fig.3.41. Representarea funcției $E(z,t)$ din formula (3.203) la t fixat.

Undele armonice cu variație *lentă* a amplitudinii poartă denumirea de *bătăi*; cuvântul "lent" trebuie înțeles în sensul că amplitudinea undei se modifică puțin în decursul mai multor perioade ale oscilației armonice. În cazul analizat, mărimea $\Omega = |\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_1 + \omega_2$ se numește *pulsația bătailor*.

Unda descrisă de relația (3.203) se referă însă numai la cazul mediilor nedispersive, când valorile constante ale amplitudinii și fazei se propagă cu aceeași viteză c. Revenind la cazul general, al undei (3.202), trebuie să precizăm că, în medii dispersive, superpoziția a două (sau mai multe) unde, cu pulsații diferite, dă naștere unui *grup* (sau *pachet*) de unde. *Viteza de grup*, sau *viteza pachetului*, este o mărime ce caracterizează propagarea maximelor înfășurătorii amplitudinii grupului de unde. Din condiția de constanță a fazei amplitudinii, scrisă sub forma

$$\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t - \frac{1}{2}(k_1 - k_2)z = \text{constant } t, \quad (3.204)$$

prin diferențiere, obținem imediat

$$v_g = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2} = \left(\frac{\Delta\omega}{\Delta k} \right). \quad (3.205)$$

Dacă nu ar exista dispersie, adică $\omega_1 = k_1 c$, $\omega_2 = k_2 c$, ar rezulta $v_g = c$, adică viteza de grup ar coincide cu cea de fază. În prezența dispersiei însă, viteza de grup diferă de viteza de fază și unda propriuzisă, respectiv amplitudinea sa, se deplasează cu o altă viteză, diferită de cea de fază. Din această cauză, forma undei se modifică în timpul propagării. Cu

alte cuvinte, dacă am reprezenta grafic unda rezultantă la diferite momente de timp succesive, ca în fig.3.41, am obține "imagini instantanee" diferite.

Dacă pulsațiile celor două unde care se compun ar fi foarte apropiate ($\omega_1 \rightarrow \omega_2$, $\Delta\omega \rightarrow 0$), din relația (3.205) ar rezulta evident

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}(kv_f). \quad (3.206)$$

Această relație, care stabilește o legătură între viteza de grup și cea de fază, este cunoscută sub denumirea de *formula (relația) lui Rayleigh*. Ea are forma explicită

$$v_g = v_f + k \frac{dv_f}{dk}, \quad \text{cu } v_f = \omega/k. \quad (3.207)$$

De regulă, proprietățile dispersive ale mediilor se descriu prin dependența $n = n(\omega)$ a indicelui de refracție, definit prin raportul $n = c/v_f$. De aceea, vom scrie

$$\frac{dv_f}{dk} = \frac{dv_f}{d\omega} \cdot \frac{d\omega}{dk} = \frac{dv_f}{d\omega} \cdot v_g = v_g \cdot \frac{dv_f}{dn} \cdot \frac{dn}{d\omega},$$

unde $dv_f/dn = d(c/n)/dn = -c/n^2$. Avem deci

$$\frac{dv_f}{dk} = -\frac{c}{n^2} \cdot v_g \cdot \frac{dn}{d\omega},$$

relație care, substituită în (3.207), ne conduce la

$$v_g = v_f - k \frac{c}{n^2} \cdot v_g \cdot \frac{dn}{d\omega}.$$

De aici obținem în final

$$v_g = \frac{v_f}{1 + k \frac{c}{n^2} \frac{dn}{d\omega}} = \frac{c}{n + \frac{kc}{n} \frac{dn}{d\omega}} = \frac{c}{n + \omega \frac{dn}{d\omega}}. \quad (3.208)$$

Dacă $dn/d\omega > 0$ se spune că dispersia este *normală* și din (3.208) rezultă $v_g < v_f$. Invers, când $dn/d\omega < 0$, spunem că dispersia este *anomală* și în acest caz $v_g > v_f$.

O primă confirmare experimentală a diferenței dintre viteza de grup și cea de fază a fost dată de către Michelson, care pentru sulfura de carbon (CS_2), a obținut refractometric $n = 1,64$ adică $v_f = c/1,64$ și, prin măsurarea vitezei unor pulsuri luminoase, $v_g = c/1,76$, adică $v_g < v_f$. În domeniul spectral în care a lucrat, dispersia era normală ($dn/d\omega > 0$) și rezultatele sale verificau bine formula lui Rayleigh.

Un alt exemplu poate fi cel al apei la 20^0C , care, pentru $\lambda_1 = 656,3nm$ are indicele de refracție $n_1 = 1,3311$ iar pentru $\lambda_2 = 643,8 nm$ are indicele de refracție $n_2 = 1,3314$. Din formula lui Rayleigh, pentru $\lambda = \lambda_1 = 656,3 nm$, rezultă o viteză de grup $v_g = 2,28 \cdot 10^8 ms^{-1}$, în timp ce viteza de fază are valoarea $v_f = c/n_1 = 2,25 \cdot 10^8 ms^{-1}$.

Să generalizăm considerentele anterioare la cazul suprapunerii unui număr de N oscilații de aceeași amplitudine E_0 și de pulsații echidistante, ω , $\omega + \delta\omega$, $\omega + 2\delta\omega$, ..., $\omega + (N-1)\delta\omega$. Obținem câmpul rezultat

$$E(t) = E_0 \cos \omega t + E_0 \cos(\omega + \delta\omega)t + \dots + E_0 \cos[\omega + (N-1)\delta\omega]t. \quad (3.209)$$

Calcularea acestei sume se poate face mai ușor dacă trecem la reprezentarea exponențial-complexă. Avem echivalent

$$E(t) = \operatorname{Re} \left[E_0 \sum_{n=0}^{N-1} e^{i(\omega t + n t \delta \omega)} \right] = E_0 \operatorname{Re} \left[e^{i \omega t} \frac{1 - e^{i N t \delta \omega}}{1 - e^{i t \delta \omega}} \right] =$$

$$= E_0 \operatorname{Re} \left[e^{i \omega t} \cdot e^{i \frac{(N-1)}{2} t \delta \omega} \cdot \frac{\sin \left(\frac{N \delta \omega}{2} t \right)}{\sin \left(\frac{\delta \omega}{2} t \right)} \right] = E_0 \left[\frac{\sin \left(\frac{N \delta \omega}{2} t \right)}{\sin \left(\frac{\delta \omega}{2} t \right)} \right] \cos \omega_0 t, \quad (3.210)$$

unde $\omega_0 \equiv \omega + \frac{N-1}{2} \delta \omega$ este *pulsăția medie* a pachetului.

Dacă N este foarte mare, putem considera că $\Delta \omega \equiv N \cdot \delta \omega$ este lărgimea totală, în pulsație, a pachetului și atunci

$$E(t) = E_0 \left[\frac{\sin \left(t \frac{\Delta \omega}{2} \right)}{\sin \left(t \frac{\Delta \omega}{2N} \right)} \right] \cos \omega_0 t. \quad (3.211)$$

Argumentul sinusului din numitor fiind foarte mic (căci N este foarte mare), putem aproxima acest sinus prin argumentul său și formula (3.211) capătă forma

$$E(t) = E_0 N \left[\frac{\sin \left(t \frac{\Delta \omega}{2} \right)}{\left(t \frac{\Delta \omega}{2} \right)} \right] \cdot \cos \omega_0 t = E_0 N \operatorname{sinc} \left(t \frac{\Delta \omega}{2} \right) \cos \omega_0 t. \quad (3.212)$$

Graficul acestei dependențe de timp este redat în fig.3.42. Pulsăția fundamentală (centrală) a pachetului este ω_0 iar înfășurătoarea sa este descrisă de funcția sinus cardinal. După un interval de timp Δt dat de formula

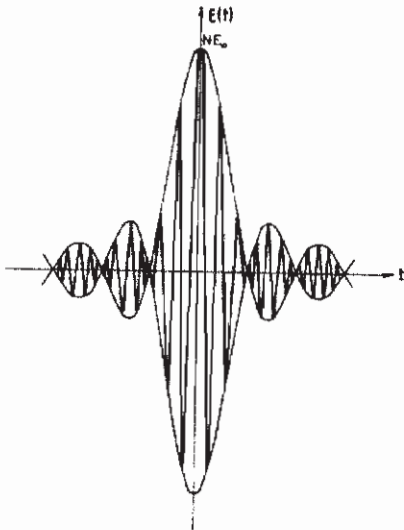
$$\frac{\Delta \omega}{2} \cdot \Delta t = \pi, \quad \Delta t = \frac{2\pi}{\Delta \omega}, \quad (3.213)$$

amplitudinea scade de la valoarea maximă $E_0 N$ (corespunzând lui $t=0$) la valoarea zero; maximele secundare nu au valori semnificative (vezi secțiunea 3.2.2, punctul 1). Cu o aproximație suficient de bună putem considera deci că între lărgimea benzii de frecvențe $\Delta \nu = \Delta \omega / 2\pi$ și durata Δt a acestui pachet (care se numește adeseori *puls (luminos)*) există relația

$$\Delta \nu \cdot \Delta t \approx 1. \quad (3.214)$$

Prin urmare, cu cât întinderea în timp a pulsului este mai mare, cu atât banda sa de frecvență este mai îngustă și semnalul este mai apropiat de monocromaticitate. Având în vedere caracterul universal al relației (3.214) ea se numește, în mod uzual, *teorema lărgimii benzii de frecvențe*. O interpretare de o importanță cu totul aparte a acestei relații întâlnim în mecanica cuantică (relația de nedeterminare energie-timp, de tip Heisenberg).

Fig.3.42. Pachet de unde cu frecvențe (pulsății) echidistante (vezi formula (3.212)).



Înainte de a încheia acest paragraf, să încercăm a elucidă ce trebuie să înțelegem prin sintagma *undă cvasiplană*, întâlnită destul de frecvent. O undă de forma

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \quad (3.215)$$

unde, în cazul de interes pentru noi, $\vec{E}(\vec{r}, t)$ este câmpul electric, este o *undă plană* numai dacă ea este *nelimitată spațial în toate direcțiile*. Limitarea undei în direcția de propagare (să zicem Oz) duce la nemonocromaticitatea caracterizată de lărgimea $\Delta\omega$ a spectrului de frecvențe, despre care am vorbit de mai multe ori până acum. Din contră, limitarea undei pe direcțiile transversale (Ox și Oy) conduce la apariția unei lărgimi finite a spectrului numerelor de undă, Δk_x și Δk_y . Cu alte cuvinte, o undă cu secțiune transversală finită nu se poate propaga strict într-o singură direcție, caracterizată de un vector \vec{k} bine determinat; există deci o "împrăștiere" oarecare a direcțiilor vectorilor de undă față de direcția mediană, fenomen cunoscut sub numele de *difracție* (vezi capitolul anterior).

În sens strict, nu există unde plane cu secțiune transversală infinită. Cu toate acestea, dacă "împrăștierea" direcțiilor vectorilor de undă nu este prea mare, unda poate fi reprezentată sub forma (3.215), prin \vec{k} înțelegând vectorul de undă median al undei. O astfel de undă se numește *cvasiplană*.

Pentru a fi mai exacti să prezentăm și un criteriu prin care să putem decide când este posibilă aproximarea unei unde printr-o undă cvasiplană. În acest sens, să reprezentăm unda printr-o integrală Fourier 4-dimensională de forma

$$E(x, y, z; t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \iiint F(k_x, k_y, k_z; \omega) e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} dk_x, dk_y, dk_z d\omega. \quad (3.216)$$

Dacă dimensiunile liniare ale secțiunii transversale a undei sunt mari în comparație cu lungimea de undă, amplitudinea spectrală $F(\vec{k}; \omega)$ din formula (3.216) este diferită de zero numai într-un interval îngust $\Delta k_x, \Delta k_y$, din vecinătatea valorilor $k_x = 0, k_y = 0$. Dacă

$$|2\Delta k_x| \ll k_z \quad \text{și} \quad |2\Delta k_y| \ll k_z \quad (3.217)$$

unda se poate considera cvasiplană, adică poate fi scrisă sub forma (3.215).

Suntem datori să mai precizăm că o undă cvasiplană poate fi considerată plană numai pe o porțiune de front de undă ale cărei dimensiuni liniare sunt mai mici decât așa-numita *lățime de coerență* (vezi §. 3.7, relația (3.224)). Dacă la analiza unui fenomen oarecare este necesar să ținem cont de variațiile lui $E(x, y, z; t)$ pe porțiuni de pe frontul de undă mai mari decât lățimea de coerență transversală, atunci unda nu mai poate fi considerată plană și nu mai poate fi reprezentată sub forma (3.215).

§. 3. 7. Lumina haotică

Acest paragraf este dedicat analizei undelor cu faze și amplitudini ce variază aleator, generate în condiții mult mai puțin ideale decât cele considerate în paragrafele anterioare. Așa cum am arătat în paragraful 3.3, în modelul clasic al unui atom fix și izolat, acesta emite un tren de unde cu amplitudine exponențial-descrescătoare în timp, cu durata cam de 10^{-8} secunde. Lărgimea liniei de radiație, cu formă lorentziană, este de ordinul a 10^8 Hz. Ca urmare a interacției cu alți atomi în timpul procesului de radiație, are loc o lărgire prin ciocniri a liniei, aceasta păstrându-și conturul lorentzian, dar devenind cam de o mie de ori mai groasă (vezi secțiunea 3. 4. 1). Ciocnirile atomilor unii cu alții sunt evenimente aleatoare și, de aceea, în ansamblu, radiația emisă de aceștia are caracteristici specifice proceselor aleatoare. Este firesc deci să denumim această radiație cu atributul "haotică" sau, dacă ne referim numai la domeniul optic, *lumină haotică*.

Intensitatea câmpului electric al undei emise de atomul j , luată într-un punct dat din spațiu, la momentul t , are forma

$$E_j(t) = E_0 e^{i[\omega(t-t'_j) - \varphi'_j]}, \quad (3.218)$$

unde t'_j este momentul de timp al emiterii trenului de unde, după o ciocnire excitatoare, iar φ'_j - faza inițială aleatoare a radiației. Termenii $\omega t'_j$ și φ'_j pot fi comasați și suma lor se poate nota prin φ_j . Deoarece ambii termeni au caracter aleatoriu, noua fază va avea și ea un astfel de caracter. Avem deci

$$E_j(t) = E_0 e^{i(\omega t - \varphi_j)}. \quad (3.219)$$

Fără a micșora generalitatea tratării, nu vom lua acum în considerare efectul Doppler care face ca pulsația emisă să se modifice. La nevoie, el poate fi luat în considerare ulterior, ca un efect de lărgire suplimentară a liniilor spectrale. Precizăm de asemenea că, pentru simplitatea tratării, vom admite toate undele emise de aceeași amplitudine și aceeași stare de polarizare.

Câmpul electric, în punctul considerat, al tuturor emițătorilor (n în total) se scrie simplu ca o sumă de contribuții individuale de la toți atomii,

$$E(t) = E_0 \sum_j e^{i(\omega t - \varphi_j)} = E_0 e^{i\omega t} \sum_j e^{-i\varphi_j}. \quad (3.220)$$

Termenii ultimei sume pot fi considerați ca vectori unimodulari cu orientări aleatoare (vezi fig. 3.43) și suma lor poate fi calculată după regula cunoscută a conturului poligonal. Obținem evident

$$\sum_j e^{-i\varphi_j} = a(t) e^{-i\varphi(t)} \quad (3.221)$$

unde $a(t)$ și $\varphi(t)$ sunt modulul (amplitudinea), respectiv faza sumei. Revenind în relația (3.220) avem

$$E(t) = E_0 a(t) e^{i(\omega t - \varphi(t))}. \quad (3.222)$$

Compoziția spectrală a acestui semnal coincide cu cea a liniei lărgite prin ciocniri. Aceasta este o consecință a faptului că variațiile semnificative ale amplitudinii și fazei în relația (3.221) au loc în timpul τ_0 , egal cu timpul mediu dintre perturbațiile succesive. Deoarece parametrii temporali, ce determină lărgirea prin ciocniri și lărgimea spectrului semnalului modulat (3.222) sunt de același ordin de mărime, rezultă că și compoziția spectrală a radiației este aceeași.

Să analizăm, în continuare, modul în care poate fi detectat un astfel de semnal cu ajutorul unui receptor optic real. Tuturor receptoarelor (detectoarelor) de lumină existente le este proprie o anumită *inerție* (mai mare sau mai mică, în funcție de tip), caracterizată prin așa-numitul *timp de rezoluție*. Timpul de rezoluție al celor mai bune instrumente pentru măsurat intensități de câmp electric are ordinul de mărime a 10^{-9}

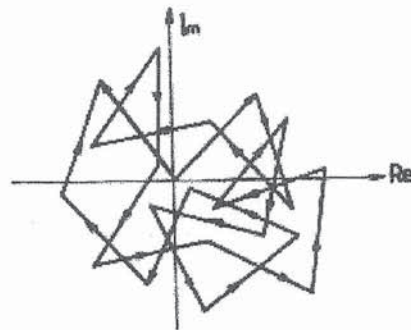


Fig. 3.43. Calcularea sumei din formula (3.221), prin metoda fazorială, la t fixat.

secunde (în cel mai bun caz 10^{-10} secunde)*. Deoarece timpul τ_0 , după care amplitudinea $a(t)$ și faza $\varphi(t)$ din formula (3.222) se modifică semnificativ, are ordinul de mărime 10^{-11} secunde ($\gg T = 2\pi/\omega \approx 10^{-15}$ secunde pentru lumină), conchidem că în decursul mai multor mii de perioade de oscilație aceste mărimi pot fi considerate practic constante. De aceea, la medierea relației (3.222) pe una sau mai multe perioade de oscilație obținem $\langle E \rangle = 0$. Prin urmare, aceste valori medii ale intensității câmpului electric nu pot fi studiate experimental. Toate receptoarele de radiație optică pot măsura numai mărimi *pătratic* în intensitatea câmpului electric și mediate temporal pe intervale de ordinul timpului lor de rezoluție. Pentru a sublinia acest lucru, ele se denumesc uneori *detectori pătratici*.

Cu toate că nu există dispozitive cu timpi de rezoluție de ordinul unei perioade de oscilație luminoasă, din punct de vedere teoretic putem studia problema medierii pe o singură perioadă de oscilație, urmând ca apoi să analizăm consecințele medierii intensității sau a densității de curent de energie pe intervale de timp din ce în ce mai mari. Având în vedere cele spuse referitor la viteza de variație a mărimilor $a(t)$ și $\varphi(t)$ și ținând cont că densitatea de curent de energie are expresia instantanee $S(t) = c\epsilon_0 E^2(t)$ - vezi și cele deduse la studiul eiconalului - pentru densitatea medie a curentului de energie obținem

$$S = \frac{1}{2} c\epsilon_0 E_0^2 a^2(t), \quad (3.223)$$

unde medierea este făcută pe o perioadă sau pe un interval de timp mult mai mic decât τ_0 . Pentru simplificarea scrierii, nu am atașat în mod explicit semnul de mediere asupra lui S dar el trebuie subînțeles. Din relația (3.223) rezultă că variația densității fluxului de energie al unde este determinată de mărimea $a^2(t)$.

Cercetarea comportării lui $a^2(t)$ pentru timpi de mediere așa de scurți se poate face numai teoretic, prin metodele modelării matematice. Principalele caracteristici ale comportării lui $a^2(t)$ în timp se pot vedea în fig.3.44, unde prin linie punctată este reprezentată valoarea sa medie, la medierea pe intervale de timp mult mai mari decât τ_0 . Se văd de asemenea fluctuațiile mari ale intensității $S(t)$, care sunt de ordinul valorii medii a intensității. Scala de timp a fluctuațiilor este determinată de valoarea lui τ_0 , înțelegând prin aceasta că în decursul timpului τ_0 mărimile $a(t)$ și $a^2(t)$ variază considerabil.

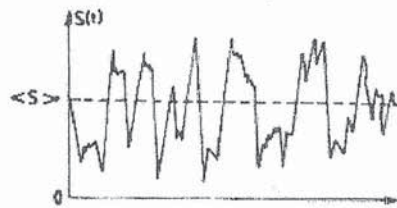


Fig.3.44. Fluctuațiile densității fluxului de energie față de valoarea medie pe intervale de timp mult mai mici decât τ_0 .

La creșterea intervalului de timp de mediere, curba reprezentată în fig.3.44, se netezește, adică înălțimea vârfurilor scade iar variațiile bruște slăbesc. Când timpul de mediere se apropie de τ_0 , curba continuă să se apropie de cea punctată, pentru ca la medierea în timpi de ordinul lui τ_0 , variațiile densității fluxului de energie a unde să dispară complet. Așadar, toate aceste variații au loc în intervale de timp mai mici decât τ_0 , iar τ_0 este o scală de fluctuații. Creșterea în continuare a intervalului de timp de mediere, peste valoarea τ_0 , nu modifică valoarea medie. Prin urmare, pentru procesul analizat, τ_0 este un timp caracteristic, care se numește *timp de coerență*.

* Ele se bazează pe efectul fotoelectric, respectiv pe inerția foarte mică a acestuia.

La alte mecanisme de lărgire a liniilor și la combinații ale acestor mecanisme (de exemplu, ciocniri interatomice plus efect Doppler) există, de asemenea, timpi caracteristici ai fluctuațiilor aleatoare ale amplitudinii și fazei fluxului luminos, care joacă rolul lui τ_0 din cazul analizat mai sus (al lărgirii prin ciocniri), și care se numesc desigur tot timpi de coerență. După cum ne vom putea convinge mai târziu, la studiul fenomenelor de interferență (vol. II), cunoașterea timpilor de coerență (fie și numai ca ordin de mărime), este extrem de importantă pentru analizarea fenomenelor opticii ondulatorii. Descoperirea laserilor a însemnat o revoluție în optică și din cauză că timpii de coerență caracteristici radiațiilor emise de aceste dispozitive sunt de milioane de ori mai mari decât ai radiațiilor furnizate de sursele clasice de lumină.

Strâns legată de timpul de coerență (τ_c) este *lungimea de coerență* definită prin relația

$$l_c = c \cdot \tau_c. \quad (3.224)$$

Ea reprezintă spațiul parcurs de unda luminoasă în vid, într-un interval de timp egal cu timpul de coerență. Așa cum timpul de coerență este un etalon temporal al fluctuațiilor intensității fasciculului luminos, lungimea de coerență este un etalon (scală) spațială al acestei fluctuații, căci de la tabloul temporal din fig. 3.44 se poate trece ușor la un tablou spațial echivalent (în locul axei Ot vom avea acum o axă Oz , a direcției de propagare).

Pentru cazul analizat, al lărgirii prin ciocniri, când $\tau_0 \approx 10^{-11}$ secunde, avem $l_c \approx 3$ mm, care este de mii de ori mai mare decât lungimea de undă a radiațiilor vizibile ($\lambda \approx (4 - 7) \cdot 10^{-4}$ mm). În cazul altor mecanisme de lărgire a liniilor, lungimea de coerență este de asemenea mult mai mare decât lungimea de undă a radiațiilor vizibile. În sursele laser lungimile de coerență sunt de milioane de ori mai mari și raportul l_c/λ crește corespunzător.

Să revenim puțin la figura 3.43, adică la problema compunerii (sumării) factorilor de fază conform relației (3.221). Din punct de vedere matematic avem de-a face cu o problemă de "rătăcire aleatoare" similară celei a mișcării browniene. Singura deosebire este aceea că, în cazul de față, lungimea fiecărui "pas" este egală cu unitatea.

Să notăm cu p densitatea de probabilitate a faptului că punctul final al rătăcirii aleatoare este caracterizat de coordonatele polare (a, φ) , după n pași. Atunci, probabilitatea ca, după n pași, punctul final să se afle în elementul de arie $adad\varphi$ este dată de formula

$$dP = p(a, \varphi) adad\varphi. \quad (3.225)$$

Din statistica matematică (teoria rătăcirii aleatoare) se știe că

$$p(a, \varphi) = \frac{1}{n\pi} \exp\left(-\frac{a^2}{n}\right) \equiv p(a), \quad (3.226)$$

cu normarea evidentă

$$\int dP = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} p(a) adad\varphi = 2\pi \int_0^\infty ap(a) da = 1. \quad (3.227)$$

Formula (3.226) ne arată că amplitudinea $a(t)$ este distribuită după o lege gaussiană. Această lege de distribuție este adevărată pentru orice sursă de lumină haotică. De aceea, lumina provenită de la sursele haotice se numește, în mod uzual, *lumină gaussiană*.

Să analizăm acum puțin mai atent fluctuațiile densității de curent de energie în lumina haotică. La medierea pe un interval de timp mai mare decât timpul de coerență τ_c (egal cu timpul τ_0 în cazul lărgirilor prin ciocniri), conform relației (3.221), obținem

$$\langle |a(t)|^2 \rangle = \left\langle \sum_j \sum_k e^{i\varphi_j(t)} e^{-i\varphi_k(t)} \right\rangle = n. \quad (3.228)$$

Aici am notat prin $\varphi_j(t)$ diferența $\varphi(t) - \varphi_j$ din formula (3.221) care are evident și ea un caracter aleator. Rezultatul (3.228) poate fi înțeles ușor dacă avem în vedere faptul că toți termenii cu $j \neq k$ au valoarea medie egală cu zero, iar cei cu $j = k$ sunt egali cu 1. Numărul termenilor cu $j = k$ este egal cu numărul n al atomilor emițători pe care i-am luat în considerare.

La medierea pe intervale de timp foarte mari în comparație cu perioada de oscilație a undei, densitatea de curent de energie S (vezi (3.223)) joacă rol de *valoare instantanee* iar valoarea obținută cu ajutorul relației (3.228) - de *valoare medie*. Introducând (3.228) în (3.223) obținem

$$\langle S \rangle = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_0^2 n. \quad (3.229)$$

Acum, din (3.229) și (3.223), putem scrie

$$a^2(t) = \frac{nS}{\langle S \rangle} \quad (3.230)$$

și formula (3.225) devine

$$dP = \frac{1}{n\pi} \exp\left(-\frac{a^2}{n}\right) da d\varphi = \frac{1}{2\pi \langle S \rangle} \exp\left(-\frac{S}{\langle S \rangle}\right) dS d\varphi. \quad (3.231)$$

De aici, rezultă că funcția de distribuție după densitatea de curent de energie emisă are forma

$$p'(S) = \frac{1}{\langle S \rangle} \exp\left(-\frac{S}{\langle S \rangle}\right), \quad (3.232)$$

cu normarea evidentă

$$\int_0^{+\infty} p'(S) dS = 1. \quad (3.233)$$

Fluctuațiile densității de curent de energie pot fi evaluate ușor cu ajutorul funcției de distribuție $p'(S)$, adică a formulei (3.232). O măsură utilizată frecvent pentru caracterizarea acestor fluctuații este *abaterea pătratică medie*

$$\begin{aligned} \langle (\Delta S)^2 \rangle &= \langle (S - \langle S \rangle)^2 \rangle = \langle S^2 \rangle - 2 \langle S \rangle \cdot \langle S \rangle + \langle S \rangle^2 = \\ &= \langle S^2 \rangle - 2 \langle S \rangle^2 + \langle S \rangle^2 = \langle S^2 \rangle - \langle S \rangle^2, \end{aligned} \quad (3.234)$$

unde

$$\langle S^2 \rangle = \frac{1}{\langle S \rangle} \int_0^{\infty} S^2 \exp\left(-\frac{S}{\langle S \rangle}\right) dS = 2 \langle S \rangle^2. \quad (3.235)$$

Rezultă imediat

$$\sqrt{\langle (\Delta S)^2 \rangle} = \sqrt{2 \langle S \rangle^2 - \langle S \rangle^2} = \sqrt{\langle S \rangle^2} = \langle S \rangle, \quad (3.236)$$

adică fluctuația densității de curent de energie este egală cu valoarea sa medie. Valoarea foarte mare a fluctuației densității de curent de energie în fasciculele luminoase, pusă în evidență și în fig.3.44, ridică probleme deosebit de dificile din punct de vedere

experimental, adică din punctul de vedere al performanțelor impuse receptorilor și detectorilor de radiație optică.

Mai remarcăm, încă o dată, că "valoarea instantanee" a densității de curent de energie în fluxul luminos trebuie măsurată pe intervale de timp mult mai mici decât timpul de coerență τ_c și, pe de altă parte, ansamblul măsurătorilor trebuie să se întindă pe un interval mai mare decât același timp de coerență.

Atragem de asemenea atenția asupra faptului că, la deducerea formulei (3.236), s-a presupus că valoarea instantanee a densității de curent de energie S este media pe o perioadă de oscilație luminoasă. În realitate, noi nu dispunem de detectori capabili de astfel de performanțe. De aceea, dacă ținem cont că detectorii reali de radiație optică au timpi de rezoluție cu mult mai mari decât perioada de oscilație a undelor luminoase, formula (3.236) se modifică într-o oarecare măsură (căci fluctuațiile se estompează, se netezesc, întrucâtva).

Înainte de a încheia acest paragraf, vom corela considerentele de aici cu o noțiune pe care o vom dezvolta în volumul al doilea al cărții noastre: *polarizarea luminii*. Undele electromagnetice ca *unde transversale*, au vectorii câmp electric \vec{E} conținuți în plane perpendiculare pe direcția de propagare. La lumina haotică, ce reprezintă o superpoziție de unde cu faze și amplitudini aleatoare, capătul vectorului câmp electric descrie în planul perpendicular pe direcția de propagare o "traietorie" neregulată, destul de ciudată, dominată de aleatorism. În acest caz, se spune că unda sumă (lumina) este *nepolarizată*. Dacă însă, în oscilațiile vectorului intensitate de câmp electric pentru unda sumă există o regularitate oarecare (nu chiar așa ca la o undă polarizată, dar, totuși, o regularitate), se spune că lumina (unda) este *parțial polarizată*.

Teoria cantitativă a polarizării parțiale este strâns legată de teoria coerenței componentelor reciproc perpendiculare ale intensității câmpului electric în frontul de undă. În volumul al doilea al cărții noastre ne vom apropia mai atent de aceste probleme, de o importanță deosebită în optica modernă.

§. 3. 8. Analiza Fourier a proceselor aleatoare

În multe domenii ale fizicii, inclusiv în optică, întâlnim procese aleatoare *staționare* în timp, adică procese al căror caracter general nu se modifică odată cu scurgerea timpului. Deoarece funcțiile ce caracterizează aceste procese *nu sunt absolut integrabile* (nu tind spre zero când $t \rightarrow \pm\infty$), ele nu au imagini Fourier în sensul discutat în secțiunea 3.2.3. Prin urmare, aplicarea metodelor generale de analiză Fourier la aceste funcții nu este permisă. Din fericire putem să realizăm analiza Fourier a proceselor aleatoare staționare pe alte căi, folosind noțiuni și mărimi specifice. În primul rând, observăm că dependența funcțională de timp a funcțiilor aleatoare nu se cunoaște niciodată complet. În al doilea rând, în studiul proceselor aleatoare sunt interesante numai caracteristicile medii iar relațiile de fază dintre componentele armonice nu au importanță specială în descompunerea spectrală.

Pentru a exclude problema divergenței integralelor Fourier de tipul (3.28), definim funcția trunchiată $F_T(\omega)$ ca imagine Fourier a procesului aleator $f(t)$ pe un interval de timp T *finiț*, dar suficient de mare, sub forma

$$F_T(\omega) = \int_{-T/2}^{+T/2} f(t)e^{-i\omega t} dt . \quad (3.237)$$

După cum am putut constata în paragraful 3.4, relația (3.137), în spectrul de radiație, distribuția după frecvențe a energiei se caracterizează, prin pătratul modulului imaginii spectrale, $|F(\omega)|^2 = F(\omega) F^*(\omega)$. Însă, într-un proces omogen (cum este cel al ciocnirilor atomice sau moleculare), distribuția energiei după frecvențe nu se modifică în timp, este staționară, și prin urmare energia totală radiată este proporțională cu timpul. De aceea, putem spune că

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F_T(\omega)|^2 d\omega \sim T \quad (3.238)$$

și prin urmare $|F_T(\omega)| \sim \sqrt{T}$. Cu alte cuvinte, mărimea

$$F_C(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{F_T(\omega)}{\sqrt{T}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (3.239)$$

este finită, nu depinde de timp, și poate fi utilizată pentru caracterizarea spectrală a proceselor aleatoare. Pătratul modulului acestei mărimi

$$w_C(\omega) = F_C(\omega) F_C^*(\omega) = |F_C(\omega)|^2 \quad (3.240)$$

se numește *spectru de putere*. Cu ajutorul definiției (3.239) obținem

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} w_C(\omega) d\omega &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) dt \cdot \int_{-T/2}^{+T/2} f(t') dt' \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-i\omega \cdot (t-t')] d\omega = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) dt \cdot \int_{-T/2}^{+T/2} f(t') \delta(t-t') dt' = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |f(t)|^2 dt = \langle |f(t)|^2 \rangle, \end{aligned}$$

adică

$$\langle |f(t)|^2 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} w_C(\omega) d\omega \quad (3.241)$$

Prin urmare, spectrul de putere este legat de media pătratului modulului funcției ce descrie procesul aleator. În spectrul de putere nu sunt prezente caracteristicile de fază ale procesului și, de aceea, el conține mai puțină informație decât spectrul amplitudino-fazic. Spectrul de putere conține caracteristicile procesului mediate pe un interval mare de timp; din el scapă caracteristicile de mică-scală ale proceselor.

Principala caracteristică a unui proces aleator este interdependența valorilor funcțiilor care descriu acest proces în diferite puncte spațiale și în diferite momente de timp. Pentru a caracteriza matematic această interdependență vom defini acum așa-numitele *funcții de autocorelare*.

Să analizăm, de exemplu, o mărime (funcție) aleatoare staționară. Ne interesează legătura dintre valorile funcției la momentul t , adică $f_1 = f(t)$, și valorile ei la momentul $t + \tau$, adică $f_2 = f(t + \tau)$, unde τ este un interval de timp de valoare fixată (vezi și secțiunea 3.2.5). Datorită caracterului staționar al procesului, alegerea celor două momente de timp nu are nici-o importanță; important este numai faptul că intervalul de timp dintre ele are valoarea aleasă τ . Evident, din cauza aleatorismului funcției f , la fiecare măsurare,

experimentare, valorile $f(t)$ și $f(t + \tau)$ se vor afla într-o relație aleatoare una cu cealaltă și interacțiunea lor poate fi caracterizată numai statistic.

După cum se știe, cea mai simplă măsură statistică a unei mărimi aleatoare este valoarea sa medie. Vom nota acum

$$f_1 = \langle f(t) \rangle_a, \quad f_2 = \langle f(t + \tau) \rangle_a, \quad (3.242)$$

indicele a desemnând medierea pe ansamblul statistic sau, altfel spus, *așteptarea matematică* pe mulțimile de evenimente $f(t)$ și respectiv $f(t + \tau)$. Pentru un proces *staționar*, mediile respective nu depind de t și putem scrie simplu $\langle f_1 \rangle = \langle f_2 \rangle = \langle f \rangle$.

Prin definiție, vom numi *funcție de autocorelare* următoarea expresie

$$\Gamma_{11}(\tau) = \langle [f(t) - \langle f \rangle] \cdot [f(t + \tau) - \langle f \rangle] \rangle_a, \quad (3.243)$$

în care am luat în considerare *staționaritatea procesului*.

În general, dacă $p(f_1, f_2)$ este densitatea de probabilitate ca funcția $f(t)$ să aibă valoarea f_1 iar funcția $f(t + \tau)$ - valoarea f_2 , în locul relației (3.243) trebuie să scriem

$$\Gamma_{11}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [f_1 - \langle f \rangle] \cdot [f_2 - \langle f \rangle] p(f_1, f_2) df_1 df_2. \quad (3.244)$$

Dacă procesul este *ergodic*, medierea pe ansamblu poate fi înlocuită printr-o mediere temporală astfel că în locul relației (3.244) putem scrie

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}(\tau) &= \langle [f(t) - \langle f \rangle] \cdot [f(t + \tau) - \langle f \rangle] \rangle_t = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} [f(t) - \langle f \rangle] \cdot [f(t + \tau) - \langle f \rangle] dt, \end{aligned} \quad (3.245)$$

unde, acum, prin $\langle f \rangle$ înțelegem media temporală a funcției f .

Pentru simplificarea formulelor vom considera ca mărime aleatoare abaterea $f(t) - \langle f \rangle$, a cărei valoare medie este egală cu zero. Deoarece nu e cazul să introducem noi notații, abaterea se va nota tot cu $f(t)$ și ultima formulă devine

$$\Gamma_{11}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t)f(t + \tau) dt. \quad (3.246)$$

Această formulă poate fi considerată ca un caz particular al relației (3.245), pentru $\langle f \rangle = 0$. Având în vedere această observație, toate rezultatele ce decurg din (3.246) pot fi transcrise fără dificultate în cazul general, când $\langle f \rangle \neq 0$. În continuare, dacă nu va fi specificat contrariul, vom opera cu relația (3.246), adică vom presupune că $\langle f \rangle = 0$.

Pentru $\tau = 0$, funcția de autocorelare $\Gamma_{11}(\tau)$ este egală cu valoarea medie a pătratului funcției $f(t)$, adică este pozitivă.

La valori mici ale lui τ ea continuă să-și păstreze valoarea pozitivă, diferită de zero, dar se micșorează odată cu creșterea lui τ . În domeniul de valori τ în care $\Gamma_{11}(\tau) \neq 0$ se spune că corelarea este finită. Pe lângă proprietatea $\Gamma_{11}(\tau) \leq \Gamma_{11}(0)$ - vezi (3.113), este remarcabilă și relația $\Gamma_{11}(-\tau) = \Gamma_{11}(\tau)$ - vezi (3.109).

Dacă valorile funcțiilor $f(t)$ și $f(t+\tau)$ nu sunt legate între ele, adică sunt independente, funcția de autocorelare este egală cu zero. În particular, când $\tau \rightarrow \infty$, de asemenea $\Gamma_{11}(\tau) \rightarrow 0$.

Cele două mărimi despre care am vorbit până aici sunt legate între ele prin așa-numita *teoremă Wiener-Hincin*: spectrul de putere este imaginea Fourier a funcției de autocorelare și invers, funcția de autocorelare este transformata Fourier a spectrului de putere.

Demonstrația teoremei pornește de la relația (3.240) și utilizează definiția (3.239).

Avem

$$w_C(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t') e^{-i\omega t'} dt' \cdot \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) e^{i\omega t} dt,$$

în care am ținut cont că funcția f a fost presupusă *reală* ($f = f^*$). Mai departe observăm că, în cazul funcțiilor staționare, valorile acestor integrale nu depind de limitele de integrare, fiind necesar doar ca intervalul de integrare să aibă lărgimea T . De aceea, în prima integrală se poate face schimbarea de variabilă $t' = t + \tau$, $dt' = d\tau$, și se poate integra după τ , lăsând nemodificate limitele de integrare. Astfel avem

$$\begin{aligned} w_C(\omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t+\tau) e^{-i\omega\tau} f(t) d\tau dt = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{+T/2} e^{-i\omega\tau} \cdot \left(\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) f(t+\tau) dt \right) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_{11}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \end{aligned} \quad (3.247)$$

Am obținut, în acest mod, prima afirmație din teorema Wiener-Hincin. A doua parte a teoremei este pur și simplu inversa relației (3.247), adică

$$\Gamma_{11}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} w_C(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (3.248)$$

Pentru funcții f *reale* ($f^* = f$) rezultă ușor că $F_C^*(\omega) = F_C(-\omega)$ și de aceea funcția $w_C(\omega)$ este *pară*: $w_C(-\omega) = w_C(\omega)$. Pe de altă parte, și funcția $\Gamma_{11}(\tau)$ este o funcție *pară* de argumentul său adică $\Gamma_{11}(-\tau) = \Gamma_{11}(\tau)$. De aceea, din ultimele două relații rezultă ușor

$$w_C(\omega) = 2 \int_0^{+\infty} \Gamma_{11}(\tau) \cos \omega\tau d\tau, \quad (3.249)$$

respectiv

$$\Gamma_{11}(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} w_C(\omega) \cos \omega\tau d\omega. \quad (3.250)$$

Importanța teoremei Wiener-Hincin constă în aceea că, din cunoașterea funcției de autocorelare - care poate fi măsurată experimental - se poate afla spectrul de putere al unui semnal. Datorită faptului că funcția $\Gamma_{11}(\tau)$ se micșorează rapid la creșterea lui τ , calcularea integralei (3.249) nu prezintă dificultăți și spectrul de putere $w_C(\omega)$ se poate afla ușor din datele experimentale referitoare la autocorelare.

În practică, de cele mai multe ori, în locul funcției $\Gamma_{11}(\tau)$ se lucrează cu *funcția de autocorelare normată*

$$\gamma_{11}(\tau) = \frac{\Gamma_{11}(\tau)}{\Gamma_{11}(0)} = \frac{\Gamma_{11}(\tau)}{\langle f^2 \rangle}, \quad (3.251)$$

unde

$$\Gamma_{11}(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f^2(t) dt = \langle f^2 \rangle_t \equiv \langle f^2 \rangle. \quad (3.252)$$

Evident, în virtutea celor spuse mai sus, mărimea $|\gamma_{11}(\tau)|$, numită *grad de autocorelare*, satisface relația $0 \leq |\gamma_{11}(\tau)| \leq 1$. Prin definiție, mărimea

$$\tau_k = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_{11}(\tau) d\tau = 2 \int_0^{+\infty} \gamma_{11}(\tau) d\tau, \quad (3.253)$$

cu dimensiune de timp, se numește *timp de corelare*.

Între timpul de corelare și *spectrul normat de putere* definit prin relația

$$w_N(\omega) = \frac{w_C(\omega)}{\langle f^2 \rangle} = \frac{w_C(\omega)}{\Gamma_{11}(0)}, \quad (3.254)$$

există o legătură directă. Într-adevăr, dacă în expresia timpului de corelare introducem expresia lui $\gamma_{11}(\tau)$ și ținem cont de teorema Wiener-Hincin, obținem

$$\tau_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} w_N(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} w_N(\omega) \delta(\omega) d\omega = w_N(0). \quad (3.255)$$

Am ajuns, deci, la concluzia că intervalul de corelare nu este altceva decât spectrul normat de putere la frecvență nulă.

§. 3. 9. Analiza Fourier a semnalelor bidimensionale

3. 9. 1. Sisteme liniare

Pentru a extinde cele învățate până acum la situații mult mai interesante și mai importante, începând cu acest paragraf vom trece la studiul semnalelor bidimensionale, întâlnite în mod frecvent în multe probleme de fizică, inclusiv în optică.

În prezent, este bine-cunoscut faptul că sistemele optice pot fi tratate cu ajutorul conceptului general de *cuadropol*^{*}. Un argument în favoarea acestei afirmații a fost furnizat deja în capitolul de optică geometrică, în care semnalele de intrare și ieșire au fost reprezentate prin *matrice unicoloră* cu două elemente (*y-distanța* de la raza de lumină până la axul optic principal și $\Gamma = n\gamma$ - *înclinarea redusă* a razei), iar informația despre sistem era conținută într-o matrice pătratică 2×2 - *matricea de transfer* a sistemului. Vom putea constata, în paginile următoare, că și în analiza fenomenelor opticii ondulatorii, tratarea sistemică, pe baza teoriei cuadropolilor, prezintă numeroase avantaje, cel puțin în cazul *sistemelor liniare*. Este bine să precizăm însă că, așa după cum în optica geometrică tratarea matriceală se dovedește eficientă, mai ales în aproximația paraxială, adică în anumite limite, tot așa, în optica ondulatorie, considerarea sistemelor ca liniare se poate face numai într-o primă aproximație, oarecum analoagă aproximației paraxiale.

Cu excepția câtorva cazuri particulare, puține la număr, lipsește o metodică *generală* de analiză a sistemelor optice *neliniare*. Există desigur metode specifice, bazate de regulă pe soluții aproximative, obținute grafic sau experimental, utilizabile în diverse situații concrete, dar nu se poate vorbi în prezent de posibilitatea abordării sistemice a problemelor opticii neliniare în general. De aceea, în cele ce urmează ne vom referi numai la sistemele liniare, care pot fi abordate într-un cadru unitar. Mai exact, ne vom ocupa numai de cuadropolii ce se comportă ca sisteme liniare.

Fie sistemul fizic reprezentat în fig. 3.45, în care funcția (semnalul) de intrare $f(x,y)$ ^{**} se numește *excitație* iar funcția (semnalul) de la ieșire $g(x,y)$ se numește *reacție* sau *răspuns*. Atât excitația cât și reacția sunt funcții *bidimensionale*, adică de *două variabile reale*, reprezentând de regulă, mărimi fizice măsurabile. Să presupunem că, într-o primă situație, excitația $f_1(x,y)$ dă naștere unei reacții $g_1(x,y)$; într-o a doua situație, excitația $f_2(x,y)$ generează reacția $g_2(x,y)$. Putem scrie simbolic

$$f_1(x,y) \rightarrow g_1(x,y), \quad f_2(x,y) \rightarrow g_2(x,y). \quad (3.256)$$

Pentru un *sistem liniar* este adevărată și corespondența

$$f_1(x,y) + f_2(x,y) \rightarrow g_1(x,y) + g_2(x,y). \quad (3.257)$$

Ultima relație, împreună cu premisele anterioare, descriu proprietatea de *aditivitate* a sistemului liniar. Astfel, o condiție *necesară* pentru ca sistemul să fie liniar este cea de conservare a *principiului superpoziției*, al cărui conținut fizic este următorul: prezența unei noi excitații la intrare nu influențează asupra reacției provocate de celelalte excitații.

Fie acum $Cf_1(x,y)$ o excitație la intrarea în sistemul fizic, unde C este o constantă de proporționalitate oarecare. Reacția la ieșire va fi $Cg_1(x,y)$, adică

$$Cf_1(x,y) \rightarrow Cg_1(x,y). \quad (3.258)$$

* Două "variabile" la intrarea în sistem și tot două "variabile" la ieșirea din sistem

** Natura variabilelor x, y se va elucida ulterior; ele pot fi, de exemplu, coordonate carteziene într-un plan transversal.

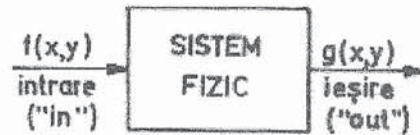


Fig.3.45. Structura generală a unui sistem fizic cu intrare și ieșire.

Relația (3.258) desemnează proprietatea de *omogenitate* a sistemului liniar, adică de conservare a coeficientului de scală al transformării realizate de el.

Recapitulând, vom spune că un *sistem* fizic este *liniar (SL)* atunci și numai atunci când îndeplinește cerințele (3.257) și (3.258), de *aditivitate* și *omogenitate*.

Există însă și un alt aspect fizic important care caracterizează sistemele liniare cu parametri constanți, pe care, chiar dacă anticipăm puțin, îl prezentăm acum: dacă la excitația $f(x, y)$, care este o funcție de x și y și care conține *pulsațiile spațiale** k_x și k_y , corespunde o reacție $g(x, y)$ care conține aceleași pulsații spațiale k_x și k_y , se spune că sistemul prezintă *invarianță spațială*. Cu alte cuvinte, sistemul invariant spațial nu va crea noi pulsații spațiale.

Din punct de vedere matematic, invarianța spațială se exprimă în felul următor:

$$\text{dacă } f(x, y) \rightarrow g(x, y) \text{ atunci } f(x - x_0, y - y_0) \rightarrow g(x - x_0, y - y_0), \quad (3.259)$$

unde x_0 și y_0 sunt constante spațiale arbitrare, reale.

Sistemele liniare care posedă proprietatea de invarianță spațială (3.259) se numesc *sisteme liniare invariante spațial (SLIS)*.

Caracteristicile fizice ale sistemelor liniare pot deveni mult mai clare dacă le vom considera din punctul de vedere al analizei Fourier. De aceea, în cele ce urmează, ne propunem să extindem considerentele expuse în secțiunile 3.2.3 - 3.2.5, la funcții (în general complexe) de două variabile reale.

3. 9. 2. Transformata Fourier bidimensională și spectrul pulsațiilor (frecvențelor) spațiale

Să considerăm clasa funcțiilor complexe $f(x, y)$, de două variabile reale x, y , care îndeplinesc următoarele cerințe:

a) sunt absolut integrabile în planul (x, y) , adică

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} |f(x, y)| dx dy < \infty; \quad (3.260)$$

b) sunt continue sau au un număr finit de discontinuități de speța întâi în orice domeniu finit (dreptunghi) al planului (x, y) ;

c) au un număr finit de extremumuri (maxime sau minime) în orice domeniu finit (dreptunghi) al planului (x, y) .

În aceste condiții, orice funcție $f(x, y)$ se poate scrie sub forma

$$f(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} F(k_x, k_y) e^{i(xk_x + yk_y)} dk_x, dk_y, \quad (3.261)$$

unde

$$F(k_x, k_y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-i(xk_x + yk_y)} dx dy. \quad (3.262)$$

* Pulsațiile spațiale k_x și k_y joacă față de variabilele x și y același rol pe care îl joacă pulsația temporală ω în raport cu timpul t .

Variabilele k_x, k_y se numesc *pulsații spațiale*.

Relațiile (3.261) - (3.262) formează o *pereche de transformate Fourier bidimensionale*. Dacă relația (3.262) se numește (în mod uzual) transformată *directă*, relația (3.261) se numește transformată *inversă*. Pentru simplitate putem nota

$$f(x, y) = \mathcal{F}^{-1}\{F(k_x, k_y)\}, \quad F(k_x, k_y) = \mathcal{F}\{f(x, y)\}. \quad (3.263)$$

Observăm că ultimele trei relații sunt extinderi directe ale relațiilor (3.27) - (3.29) din cazul monodimensional.

În general, chiar și atunci când funcția $f(x, y)$ este o funcție reală, funcția *image*, sau *spectrul Fourier* $F(k_x, k_y)$ este o funcție complexă. Ea poate fi scrisă sub forma

$$F(k_x, k_y) = |F(k_x, k_y)| \cdot e^{i\varphi(k_x, k_y)}, \quad (3.264)$$

unde $|F|$ și φ se numesc *spectru de amplitudine* respectiv *spectru de fază* pentru funcția $F(k_x, k_y)$.

Vom prezenta acum o interpretare geometrică intuitivă a relației (3.261). Ea se poate transcrie sub forma

$$f(x, y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{F}(v_x, v_y) e^{2\pi i(xv_x + yv_y)} dv_x dv_y, \quad (3.261')$$

unde $\tilde{F}(v_x, v_y) \equiv F(2\pi v_x, 2\pi v_y)$ iar $v_x = k_x/2\pi$, $v_y = k_y/2\pi$ sunt așa-numitele *frecvențe spațiale*. Se observă că avem de-a face cu o sumă continuă (integrală) de unde simple, de forma $\tilde{F}(v_x, v_y) \cdot dv_x dv_y \cdot \exp[2\pi i(xv_x + yv_y)]$, unde $\tilde{F}(v_x, v_y) dv_x, dv_y$ este *amplitudinea* iar exponențiala - *factorul de fază*. Pentru orice pereche de frecvențe (v_x, v_y) faza undei este constantă, să zicem $2\pi n$, în lungul dreptelor $y = -x(v_x/v_y) + (n/v_y)$. Figura 3.46 ne arată forma acestor drepte pentru n întreg. În punctele fiecărei astfel de drepte amplitudinea undei este constantă. Putem afirma deci că unda elementară caracterizată prin frecvențele spațiale (v_x, v_y) este "dirijată" în planul (xOy) într-o *direcție* ce formează unghiul $\theta = \arctg(v_y/v_x)$ cu axa Ox și are perioada spațială $L = (v_x^2 + v_y^2)^{-1/2}$. Funcția $\tilde{F}(v_x, v_y)$, în general complexă, este așadar, un factor de pondere de care trebuie ținut cont (cu care trebuie multiplicată fiecare exponențială) atunci când dorim să sintetizăm semnalul bidimensional $f(x, y)$. Descompunerea unei funcții oarecare, neperiodice, de coordonatele x și y , în unde plane elementare ne dă posibilitatea să reducem problema analizei formării imaginilor în sistemele optice la problema mai simplă a analizei trecerii prin respectivele sisteme a undelor plane elementare.

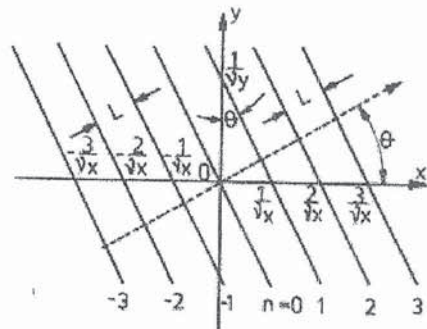


Fig.3.46. Linii "de fază nulă" pentru funcția $\exp(2\pi i(xv_x + yv_y))$.

Pentru a fi mai intuitivi și pentru a înțelege corect semnificația noțiunii de frecvență spațială, să considerăm comparativ și cazul dezvoltării în *serie* Fourier bidimensională a unei funcții $f(x, y)$ *periodice*. Să ne imaginăm că planul xOy are structura unei table de șah

cu pătrățele albe și negre, de latură a , laturile fiind paralele cu axele Ox , respectiv Oy . Fie $f(x, y)$ o funcție periodică definită pe această structură (de exemplu, $f(x, y) = 1$ în interiorul unui pătrățel alb și $f(x, y) = 0$ în interiorul unui pătrățel negru; dacă planul xOy astfel subdivizat este o placă subțire de sticlă omogenă, funcția $f(x, y)$ poate fi interpretată ca o transmitanță, valoarea 1 însemnând trecerea luminii prin placă iar valoarea 0 - oprirea luminii incidente). Dezvoltând în serie Fourier dublă această funcție, sub semnele de sumare după n și m ar apare factorul de pondere $\tilde{F}(nv_x, mv_y)$ cu n și m întregi și exponențiala $\exp[2\pi i(xnv_x + ymv_y)]$ cu v_x și v_y determinate de periodicitatea spațială a funcției considerate. În lungul axelor Ox și Oy perioada spațială a funcției este aceeași, anume $2a$, și deci $v_x = v_y = 1/2a$ sau $k_x = k_y = 2\pi v_x = 2\pi v_y = \pi/a$. În dezvoltare intervin deci aceste frecvențe *fundamentale* și armonicile lor nv_x, mv_y , cu n și m întregi. Dacă tabla de șah ar fi avut "pătrățelele" dreptunghiulare cu laturile a_x și a_y , frecvențele spațiale corespunzătoare ar fi fost diferite: $v_x = 1/2a_x, v_y = 1/2a_y$. Când funcția $f(x, y)$ nu mai este periodică, în locul seriei Fourier trebuie considerată în mod obligatoriu integrala Fourier de forma (3,261'). Afirmația este adevărată și în cazul funcțiilor $f(x, y)$ periodice, atunci când tabla de șah are dimensiuni finite (adică x și y nu mai iau valori de la $-\infty$ la $+\infty$, cum am presupus mai sus).

Transcriem, fără demonstrație, câteva din proprietățile mai importante ale transformatei Fourier de la cazul monodimensional (vezi secțiunile 3.2.3. și 3.2.5) la cazul bidimensional:

1. Teoremele de deplasare:

$$\mathcal{F}\{f(x, y)\} = F(k_x, k_y) \Rightarrow \mathcal{F}\{f(x - x_0, y - y_0)\} = F(k_x, k_y) e^{-i(x_0 k_x + y_0 k_y)}, \quad (3.265)$$

$$f(x, y) = \mathcal{F}^{-1}\{F(k_x, k_y)\} \Rightarrow f(x, y) e^{i(xK_x + yK_y)} = \mathcal{F}^{-1}\{F(k_x - K_x, k_y - K_y)\}. \quad (3.266)$$

2. Teoremele de dualitate:

$$\mathcal{F}\{f(x, y)\} = F(k_x, k_y) \Rightarrow \mathcal{F}\{F(x, y)\} = (2\pi)^2 f(-k_x, -k_y), \quad (3.267)$$

$$f(x, y) = \mathcal{F}^{-1}\{F(k_x, k_y)\} \Rightarrow \frac{1}{(2\pi)^2} F(-x, -y) = \mathcal{F}^{-1}\{f(k_x, k_y)\}. \quad (3.268)$$

3. Transformata Fourier a funcției complex-conjugate:

$$F(k_x, k_y) = \mathcal{F}\{f(x, y)\} \Rightarrow F^*(-k_x, -k_y) = \mathcal{F}\{f^*(x, y)\}. \quad (3.269)$$

4. Teorema transformării de scală:

$$F(k_x, k_y) = \mathcal{F}\{f(x, y)\} \Rightarrow \mathcal{F}\{f(ax, by)\} = \frac{1}{|a| \cdot |b|} F\left(\frac{k_x}{a}, \frac{k_y}{b}\right), \quad (3.270)$$

cu a și b numere reale. Din punct de vedere fizic, această teoremă ne arată că dilatarea (contractarea) scalei spațiale determină contractarea (dilatarea) scalei frecvențelor spațiale și odată cu aceasta - modificarea spectrului de amplitudine.

5. Teorema Parseval:

Dacă

$$F(k_x, k_y) = \mathcal{F}\{f(x, y)\}$$

atunci

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} |f(x, y)|^2 dx dy = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} |F(k_x, k_y)|^2 dk_x dk_y. \quad (3.271)$$

Ca și în cazul monodimensional, teorema Parseval reflectă legea conservării energiei și, din punct de vedere matematic, exprimă *completitudinea*.

6. Teorema directă a convoluției:

Generalizând definiția (3.88), mărimea

$$f(x, y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi, \eta) f_2(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta, \quad (3.272)$$

care se notează prin $f_1(x, y) \otimes f_2(x, y)$, se numește *convoluția* funcțiilor $f_1(x, y)$ și $f_2(x, y)$. Se poate demonstra ușor următoarea *teoremă*:

Dacă

$$F_1(k_x, k_y) = \mathcal{F}\{f_1(x, y)\} \quad \text{și} \quad F_2(k_x, k_y) = \mathcal{F}\{f_2(x, y)\},$$

atunci

$$\mathcal{F}\{f(x, y)\} = \mathcal{F}\{f_1(x, y) \otimes f_2(x, y)\} = F_1(k_x, k_y) F_2(k_x, k_y). \quad (3.273)$$

După cum ne vom putea convinge mai târziu, teorema de convoluție este extrem de utilă în studiul transformărilor liniare ce se petrec în sistemele liniare cu invarianță spațială.

7. *Teorema inversă a convoluției*, care se demonstrează în mod absolut analog cazului monodimensional, se exprimă prin formula

$$f_1(x, y) \cdot f_2(x, y) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{(2\pi)^2} [F_1(k_x, k_y) \otimes F_2(k_x, k_y)] \right\}, \quad (3.274)$$

unde $F_{1,2}$ sunt transformatele Fourier ale funcțiilor $f_{1,2}$.

8. Teorema corelației:

Prin definiție, funcția

$$\Gamma_{12}(x, y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} f_1(x + \xi, y + \eta) f_2^*(\xi, \eta) d\xi d\eta = \iint_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi, \eta) f_2^*(\xi - x, \eta - y) d\xi d\eta, \quad (3.275)$$

se numește *corelația* funcțiilor $f_1(x, y)$ și $f_2(x, y)$. Corelația se notează sub forma

$$\Gamma_{12}(x, y) = f_1(x, y) * f_2(x, y) \quad (3.276)$$

și satisface relația

$$\mathcal{F}\{\Gamma_{12}(x, y)\} = F_1(k_x, k_y) \cdot F_2^*(k_x, k_y), \quad (3.277)$$

unde $F_{1,2}$ sunt transformatele Fourier ale funcțiilor $f_{1,2}$.

Când $f_2 = f_1$, funcția se numește *autocorelație* și avem

$$\mathfrak{F}\{\Gamma_{11}(x, y)\} = |F_1(k_x, k_y)|^2, \quad (3.278)$$

relație cunoscută sub denumirea de *teorema Wiener-Hincin*. Ea ne spune că densitatea spectrală de putere (energie) este transformata Fourier a funcției de autocorelație.

9. Teorema produsului:

Dacă funcția $f(x, y)$ este produsul a două funcții de variabile independente x și y , adică

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y), \quad (3.279)$$

atunci transformata sa Fourier $F(k_x, k_y)$ este produsul transformatelor Fourier monodimensionale $F_1(k_x)$ și $F_2(k_y)$, adică

$$F(k_x, k_y) = F_1(k_x)F_2(k_y). \quad (3.280)$$

Prin urmare, odată cu distribuirea variabilelor x, y și variabilele k_x, k_y sunt distribuite.

10. Câteva proprietăți de simetrie:

a) Dacă funcția $f(x, y)$ este *reală*, adică $f^*(x, y) = f(x, y)$, atunci

$$F^*(k_x, k_y) = F(-k_x, -k_y) \text{ sau } F^*(-k_x, -k_y) = F(k_x, k_y). \quad (3.281)$$

b) Dacă funcția $f(x, y)$ este *reală și pară*, adică $f(x, y) = f^*(x, y) = f^*(-x, -y) = f(-x, -y)$, atunci transformata sa Fourier $F(k_x, k_y)$ este și ea reală și pară, adică

$$F(k_x, k_y) = F^*(k_x, k_y) = F^*(-k_x, -k_y) = F(-k_x, -k_y). \quad (3.282)$$

c) Dacă funcția $f(x, y)$ este *reală și impară*, adică $f(x, y) = -f(-x, -y) = -f^*(x, y) = -f^*(-x, -y)$, atunci transformata sa Fourier $F(k_x, k_y)$ este impară și pur imaginară, adică

$$F(k_x, k_y) = -F(-k_x, -k_y) = -F^*(k_x, k_y) = F^*(-k_x, -k_y). \quad (3.283)$$

În încheierea acestui paragraf, ilustrăm cele prezentate până aici prin două exemple de funcții elementare care au o importanță deosebită pentru sistemele de prelucrare optică a informației.

A. Transformata Fourier a unei funcții cu simetrie circulară

Fie x și y coordonatele carteziene ale unui punct situat într-un plan perpendicular pe axa de simetrie (Oz) a unui sistem optic și $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ distanța de la axă la punct.

Să considerăm funcția

$$f(x, y) = f(r) = \begin{cases} 1 & \text{pentru } r \leq a \\ 0 & \text{pentru } r > a \end{cases}, \quad (3.284)$$

(numită în mod frecvent "funcția circ (r/a)") unde a este raza unui cerc conținut în planul considerat, cu centrul pe axa Oz . Ne propunem să calculăm transformata Fourier

bidimensională (3.262) a acestui semnal. Utilizăm coordonate polare, atât în planul xOy , cât și în planul pulsațiilor spațiale. Avem

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}, \quad \begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ \theta = \arctg(y/x) \end{cases},$$

cu $dx dy = r dr d\theta$, respectiv

$$\begin{cases} k_x = \rho \cos \varphi \\ k_y = \rho \sin \varphi \end{cases}, \quad \begin{cases} \rho^2 = k_x^2 + k_y^2 \\ \varphi = \arctg(k_y/k_x) \end{cases},$$

cu $dk_x dk_y = \rho d\rho d\varphi$.

Putem scrie deci

$$F(k_x, k_y) = \iint_{\text{int. cerc}} e^{-i(xk_x + yk_y)} dx dy = \int_0^a r dr \int_0^{2\pi} e^{-i\rho r \cos(\theta - \varphi)} d\theta.$$

Știind că

$$J_0(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-iz \cos(\theta - \varphi)} d\theta \quad (3.285)$$

este funcția Bessel de speța întâi, de indice zero, indiferent de valoarea lui φ , putem scrie

$$F(k_x, k_y) \equiv F(\rho) = 2\pi \int_0^a r J_0(\rho r) dr. \quad (3.286)$$

Rezultatul poate fi transcris folosind relația

$$z J_1(z) = \int_0^z \xi J_0(\xi) d\xi, \quad (3.287)$$

în care $J_1(z)$ este funcția Bessel de speța întâia și indice unu.

Obținem

$$F(\rho) = 2\pi a^2 \left(\frac{J_1(\rho a)}{\rho a} \right). \quad (3.288)$$

În mod analog, se poate demonstra că transformata Fourier a *oricărei* funcții cu simetrie circulară, $f(r)$, definită în tot planul xOy , este (vezi și (2.192))

$$F(\rho) = 2\pi \int_0^{\infty} r f(r) J_0(\rho r) dr, \quad (3.289)$$

sau invers

$$f(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \rho F(\rho) J_0(\rho r) d\rho. \quad (3.290)$$

Ultimele relații sunt perfect analoage, cu corespondențele $2\pi f \leftrightarrow F$ și $r \leftrightarrow \rho$. În literatura matematică, relația (3.289) se numește *transformată Hankel (Bessel)* de ordinul zero. Evident, ea este un caz particular al transformatei Fourier. De aceea, toate proprietățile transformatelor Fourier au un corespondent specific, particular, în cazul transformatelor Hankel (Bessel). Utilitatea aspectelor relevate prin acest exemplu va putea fi apreciată în studiul sistemelor cu aperturi circulare.

B. Spectrul funcției delta Dirac bidimensionale

Prin definiție, funcția delta Dirac bidimensională $\delta(x-x_0, y-y_0)$ este diferită de zero (mai exact, este infinită) în punctul (x_0, y_0) și este egală cu zero în toate celelalte puncte. Ea satisface proprietatea "de filtrare"

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \cdot \delta(x-x_0, y-y_0) dx dy = f(x_0, y_0) \quad (3.291)$$

de unde, în particular, pentru $f(x, y) = 1$, rezultă normarea

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-x_0, y-y_0) dx dy = 1. \quad (3.292)$$

Conform relației generale (3.262), transformata Fourier a funcției delta Dirac bidimensională este

$$\Delta(k_x, k_y) = \mathcal{F}\{\delta(x-x_0, y-y_0)\} = e^{-i(x_0 k_x + y_0 k_y)}, \quad (3.293)$$

adică

$$|\Delta(k_x, k_y)| = 1 \quad \text{și} \quad \varphi(k_x, k_y) = -(x_0 k_x + y_0 k_y). \quad (3.294)$$

Spectrul de amplitudine este deci constant, cu valoarea +1 în întregul plan al pulsațiilor (frecvențelor) spațiale. El poate fi considerat ca un "vector spectral" de modul unitate ce se rotește cu un unghi fazic $\varphi(k_x, k_y) = -(x_0 k_x + y_0 k_y) = -2\pi(x_0 v_x + y_0 v_y)$.

Dacă $x_0 = y_0 = 0$, avem $\varphi(k_x, k_y) = 0$, adică $\Delta(k_x, k_y) = 1$ pentru toate frecvențele spațiale.

Prezentăm în încheiere un tabel cu transformatele Fourier ale unor funcții mono și bidimensionale uzuale în optică.

Perechi de transformate Fourier monodimensionale

$$(v = \omega/2\pi)$$

Funcția $f(t)$	Transformata $\tilde{F}(v)$
$\exp(-\pi t^2)$	$\exp(-\pi v^2)$
1	$\delta(v)$
$\delta(t)$	1
$\cos(\pi t)$	$\frac{1}{2} \left[\delta\left(v + \frac{1}{2}\right) + \delta\left(v - \frac{1}{2}\right) \right]$
$\sin(\pi t)$	$\frac{i}{2} \left[\delta\left(v + \frac{1}{2}\right) - \delta\left(v - \frac{1}{2}\right) \right]$
$\text{rect}(t)$	$\text{sinc}(\pi v)$
$\Lambda(t)$	$\text{sinc}^2(\pi v)$
$\exp(- t)$	$2 : \left[1 + (2\pi v)^2 \right]$

$1 : [1 + (2\pi t)^2]$	$\frac{1}{2} \exp(- v)$
$J_0(2\pi t)$	$\text{rect}(v/2) : [\pi(1 - v^2)^{1/2}]$
$(1/2t)J_1(2\pi t)$	$(1 - v^2)^{1/2} \cdot \text{rect}(v/2)$
$-i/(\pi t)$	$-\text{sgn}(v)$
$\exp(i\pi t^2)$	$\exp(i\pi/4) \cdot \exp(-i\pi v^2)$
$[m^m \cdot t^{m-1} \cdot \exp(-mt)] : \Gamma(m)$	$(1 + \frac{2\pi i v}{m})^{-m}$

Perechi de transformate Fourier bidimensionale

$$(v_x = k_x/2\pi, v_y = k_y/2\pi)$$

Funcția $f(x,y)$	Transformata $\tilde{F}(v_x, v_y)$
$\text{rect}(x)\text{rect}(y)$	$\text{sinc}(\pi v_x)\text{sinc}(\pi v_y)$
$\delta(x, y)$	1
$\exp[-\pi(x^2 + y^2)] = \exp(-\pi r^2)$	$\exp[-\pi(v_x^2 + v_y^2)] = \exp(-\pi \rho^2)$
$\text{circ}(r)$	$(1/\rho)J_1(2\pi\rho)$
$\delta(r - a)$	$2\pi a J_0(2\pi a \rho)$
$1/r$	$1/\rho$
$\Lambda(x) \cdot \Lambda(y)$	$\text{sinc}^2(\pi v_x)\text{sinc}^2(\pi v_y)$
$\exp[i\pi(x^2 + y^2)] = \exp(i\pi r^2)$	$i \cdot \exp[-i\pi(v_x^2 + v_y^2)] = i \cdot \exp(-i\pi \rho^2)$
$\exp[i\pi(x + y)]$	$\delta(v_x - 1/2, v_y - 1/2)$
$\text{sgn}(x) \cdot \text{sgn}(y)$	$(i\pi v_x)^{-1} \cdot (i\pi v_y)^{-1}$
$\text{comb}(x) \cdot \text{comb}(y)$	$\text{comb}(v_x) \cdot \text{comb}(v_y)$
1	$\delta(v_x, v_y)$

Subliniem că $\tilde{F}(v_x, v_y) = F(2\pi v_x, 2\pi v_y) = F(k_x, k_y)$, respectiv $\tilde{F}(v) = F(2\pi v) = F(\omega)$.

Funcțiile prezente în aceste tabele au următoarele definiții:

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{pentru } x > 0 \\ 0 & \text{pentru } x=0 \\ -1 & \text{pentru } x < 0, \end{cases} \quad (3.295)$$

$$\Lambda(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{pentru } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{în rest,} \end{cases} \quad (3.296)$$

$$\text{rect}(x) = \begin{cases} 1 & \text{pentru } |x| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{în rest,} \end{cases} \quad (3.297)$$

$$\text{comb}(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - n). \quad (3.298)$$

Ele sunt reprezentate în figurile 3.47 - 3.50.

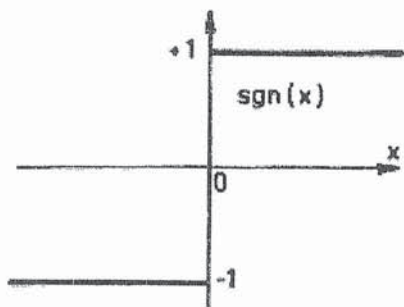


Fig.3.47. Funcția $\text{sgn}(x)$.

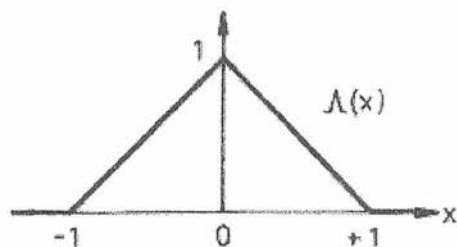


Fig.3.48. Funcția "triunghi" $\Lambda(x)$.

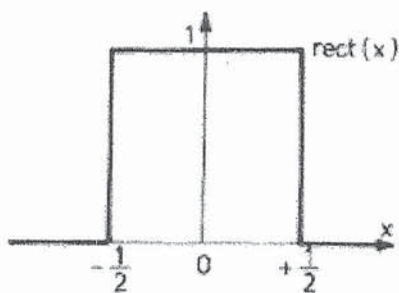


Fig.3.49. Funcția $\text{rect}(x)$.

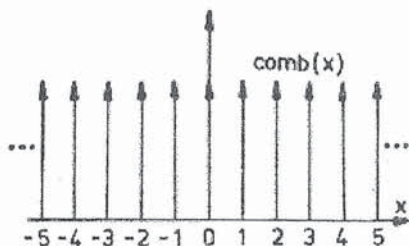


Fig.3.50. Funcția $\text{comb}(x)$.

§. 3. 10. Lentila subțire ca transformator de fază

Așa cum s-a arătat în capitolul de optică geometrică, lentilele sunt piesele optice fundamentale, ce intră în structura tuturor sistemelor optice centrate. De aceea, înainte de a analiza sistemele optice de format imagini mai complexe, să discutăm proprietățile de transformare de fază ale lentilelor. Ne vom ocupa numai de cazul lentilelor subțiri, confecționate din sticle optice (sau alte materiale) omogene, cu indice de refracție constant în tot volumul materialului.

Fie Oz axul optic principal al lentilei, cu sensul de la stânga spre dreapta. Vom spune că lentila este *subțire*, dacă coordonatele (x,y) ale punctului de emergență, de pe fața de ieșire din lentilă a razei de lumină, sunt egale cu cele ale punctului de incidență, de pe fața de intrare în lentilă a razei de lumină. Din cauză că lentila este subțire, în aproximația

paraxială, punctele "de intrare" și "de ieșire" se pot considera pe *planele de referință* - tangente la lentilă în vârfurile sale. Rezultă că, într-o lentilă subțire, distanțele de la axul optic principal la cele două puncte "de intrare" și "de ieșire" sunt egale.

Ce se întâmplă cu unda luminoasă între punctele de intrare și de ieșire? Răspunsul este destul de simplu: dacă amplitudinea undei nu se modifică, atunci lentila modifică faza sa. Pentru a demonstra acest lucru să considerăm situația din fig.3.51, în care z_0 este grosimea lentilei (la mijloc) iar

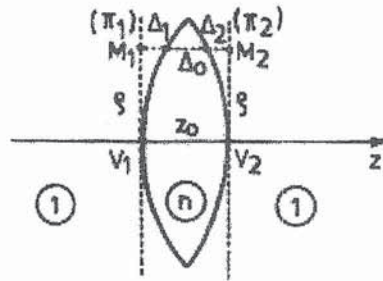


Fig.3.51. Lentilă subțire și elemente caracteristice (secțiune).

n indicele său de refracție. La distanța ρ de la axul optic principal putem scrie

$$z_0 = \Delta_1 + \Delta_0 + \Delta_2, \quad (3.299)$$

porțiunile Δ_1 și Δ_2 fiind parcurse prin vid (aer) iar porțiunea Δ_0 - prin lentilă. Dacă lungimea de undă în vid (aer) este λ , cea din sticlă va fi λ/n și diferența de fază dintre excitațiile din punctele M_1 și M_2 este

$$\begin{aligned} \varphi(M_2) - \varphi(M_1) &= \frac{2\pi}{\lambda}(\Delta_1 + n\Delta_0 + \Delta_2) = \frac{2\pi}{\lambda}[\Delta_1 + \Delta_2 + n(z_0 - \Delta_1 - \Delta_2)] = \\ &= \frac{2\pi}{\lambda}[nz_0 - (n-1)(\Delta_1 + \Delta_2)]. \end{aligned} \quad (3.300)$$

Dacă cele două calote care delimitează lentila au razele de curbură R_1 și R_2 *, conform teoremei înălțimii, sunt evidente următoarele relații (vezi fig.3.52)

$$\Delta_1(2R_1 - \Delta_1) = \rho^2, \quad (3.301)$$

respectiv

$$\Delta_2(-2R_2 - \Delta_2) = \rho^2. \quad (3.302)$$

De aici, în cazul lentilelor subțiri, când Δ_1 și Δ_2 sunt foarte mici în comparație cu razele de curbură, putem scrie aproximativ

$$\Delta_1 \approx \frac{\rho^2}{2R_1}, \quad \Delta_2 \approx \frac{\rho^2}{-2R_2}. \quad (3.303)$$

Acum, diferența de fază (3.300) devine

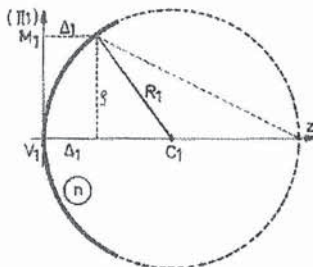


Fig.3.52. Calotă sferică și elemente caracteristice (secțiune).

* Vezi convenția semnelor din optica geometrică (aici $R_1 > 0, R_2 < 0$).

$$\varphi(M_2) - \varphi(M_1) \approx \frac{2\pi}{\lambda} \left[nz_0 - (n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \frac{\rho^2}{2} \right] = \frac{2\pi}{\lambda} \left(nz_0 - \frac{\rho^2}{2f} \right), \quad (3.304)$$

căci

$$(n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{1}{f} = C, \quad (3.305)$$

este *convergența lentilei*, în aproximația utilizată.

Pentru $\rho = 0$, adică în cazul razei de lumină ce se propagă în lungul axului optic principal, avem

$$\varphi(V_2) - \varphi(V_1) = \frac{2\pi}{\lambda} nz_0. \quad (3.306)$$

Din cele spuse până aici, rezultă că pentru o undă monocromatică, cu λ fixat, diferența de fază introdusă de o lentilă *dată*, depinde numai de distanța ρ de la axul optic principal. Putem considera, deci, că lentila subțire este un transformator de fază invariant față de rotațiile în jurul axului optic principal.

Să analizăm în continuare problema formării imaginii paraxiale a unui obiect punctiform într-o astfel de lentilă. Fie P_1 un punct obiect, situat chiar pe ax (fig.3.53). Faza excitației din M_1 se poate exprima în funcție de faza excitației din V_1 și de distanța $\rho = V_1 M_1$. Avem (vezi 3.303)).

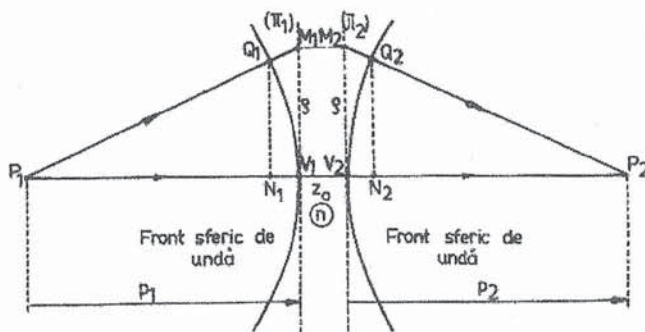


Fig.3.53. Puncte conjugate optic față de o lentilă, în aproximația paraxială.

$$\varphi(M_1) = \varphi(Q_1) + k \cdot |Q_1 M_1| \approx \varphi(V_1) + k \cdot |N_1 V_1| \approx \varphi(V_1) + \pi \frac{\rho^2}{\lambda |p_1|}. \quad (3.307)$$

Conform celor stabilite anterior, în relația (3.304), putem scrie mai departe

$$\begin{aligned} \varphi(M_2) &= \varphi(M_1) + \frac{2\pi}{\lambda} \left(nz_0 - \frac{\rho^2}{2f} \right) = \varphi(V_1) + \pi \frac{\rho^2}{\lambda |p_1|} + \frac{2\pi}{\lambda} \left(nz_0 - \frac{\rho^2}{2f} \right) = \\ &= \varphi(V_2) + \frac{\pi}{\lambda} \cdot \frac{\rho^2}{|p_1|} - \frac{\pi}{\lambda} \cdot \frac{\rho^2}{f} = \varphi(V_2) + \frac{\pi}{\lambda} \rho^2 \cdot \left(\frac{1}{|p_1|} - \frac{1}{f} \right). \end{aligned} \quad (3.308)$$

Dacă notăm

$$\frac{1}{|p_1|} - \frac{1}{f} = -\frac{1}{p_2}, \quad \text{adică} \quad \frac{1}{|p_1|} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{f}, \quad (3.309)$$

obținem

$$\varphi(M_2) = \varphi(V_2) - \frac{\pi}{\lambda} \cdot \frac{\rho^2}{p_2}, \quad (3.310)$$

adică o relație absolut similară relației (3.307).

Cu convențiile de semn utilizate în optica geometrică, pentru situația reprezentată în fig. 3.53, p_1 este negativ, adică $p_1 = -|p_1|$. Aceasta înseamnă că $\varphi(M_1) > \varphi(V_1)$ și inegalitatea exprimă caracterul *divergent* al fasciculului ce pornește din punctul P_1 . Cu aceleași convenții de semn, p_2 din fig. 3.53 este pozitiv adică $p_2 = |p_2|$, și din ultima relație rezultată $\varphi(M_2) < \varphi(V_2)$. Ce exprimă această inegalitate? Că fasciculul care a traversat lentila este *convergent* spre punctul P_2 , adică punctul M_2 este în lungul razei M_2P_2 înaintea suprafeței de undă pe care se află punctul V_2 . Formula (3.309), în care parametrul p_2 este introdus ca o notație, nu este altceva decât formula fundamentală a lentilelor subțiri, cunoscută din optica geometrică elementară.

Cititorul poate analiza singur și alte variante de semne pentru p_1 și p_2 . De exemplu, dacă $p_1 < 0$ și $p_2 < 0$, fasciculul transformat de lentilă va fi divergent, vârful său fiind acum la stânga lentilei la o distanță egală cu $|p_2|$. Acest vârf (punct) P_2 este acum o imagine virtuală a lui P_1 , ca în cazul lupei.

Revenind la formula (3.300) observăm că ea se poate transcrie și sub forma

$$\varphi(M_2) - \varphi(M_1) = \frac{2\pi}{\lambda} [z_0 + (n-1)z(x, y)] \quad (3.311)$$

unde $\Delta_0 \equiv z(x, y)$ este grosimea lentilei la distanța ρ față de axă, adică în locul în care ea este traversată de raza de lumină considerată. Pentru generalizările ulterioare este comod să notăm diferența $\varphi(M_2) - \varphi(M_1)$ prin $\varphi(x, y)$, adică

$$\varphi(x, y) \equiv \varphi(M_2) - \varphi(M_1) = k [z_0 + (n-1)z(x, y)], \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (3.312)$$

Termenii $knz(x, y)$ și $k(z_0 - z(x, y))$ ai acestei expresii reprezintă, evident, variațiile de fază prin lentila propriuzisă, respectiv prin spațiul liber (aer, vid) cuprins între cele două plane de referință, tangente în vârfurile lentilei, și fețele lentilei.

Din analiza de până acum rezultă că o lentilă subțire poate fi caracterizată prin *funcția unimodulară*

$$T(x, y) = \exp [i\varphi(x, y)] = \exp \left\{ ik [z_0 + (n-1)z(x, y)] \right\}, \quad (3.313)$$

ce descrie transformarea fazei și care este denumită *factor de transfer al lentilei*. Notând cu $E(x, y)$ și $E'(x, y)$ amplitudinile complexe ale câmpurilor electrice la nivelul planelor de referință, tangente la lentilă în V_1 și respectiv V_2 , și la distanța $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ de axa Oz , ele se pot corela, în cazul undelor monocromatice, prin relația evidentă

$$E'(x, y) = T(x, y)E(x, y). \quad (3.314)$$

Combinând relațiile (3.307), (3.310) și folosind de asemenea relația (3.309) avem

$$\varphi(x, y) = \varphi(M_2) - \varphi(M_1) = \varphi(V_2) - \varphi(V_1) - \frac{\pi\rho^2}{\lambda f}. \quad (3.315)$$

Dacă utilizăm și relația (3.306) rezultă

$$\varphi(x, y) = \frac{2\pi}{\lambda}nz_0 - \frac{\pi\rho^2}{\lambda f} = knz_0 - k\frac{\rho^2}{2f}, \quad (3.316)$$

astfel că factorul de transfer devine

$$T(x, y) = \exp\left[i\left(knz_0 - \frac{k\rho^2}{2f}\right)\right] \equiv C_1 \exp\left(-ik\frac{\rho^2}{2f}\right), \quad (3.317)$$

$C_1 = \exp(iknz_0)$ fiind o constantă complexă. În cazul lentilelor convergente $f > 0$ iar al celor divergente $f < 0$.

Când unda incidentă este *plană*, adică punctul P_1 este în stânga lentilei, la infinit, amplitudinea complexă $E(x, y)$ la intrarea în lentilă este constantă și, la ieșirea din lentilă putem scrie

$$E'(x, y) = C \cdot \exp\left(-ik\frac{\rho^2}{2f}\right), \quad \rho^2 = x^2 + y^2, \quad (3.318)$$

cu C o constantă complexă. Această expresie poate fi interpretată ca o transformare *pătratică* de fază (deoarece $\rho^2 = x^2 + y^2$), generatoare a unui front de undă sferic. Dacă $f > 0$, frontul de undă sferic este *convergent* spre un punct P_2 situat la distanța f de lentilă, la dreapta sa, pe axa de simetrie. Dacă $f < 0$, frontul de undă sferic este *divergent*, pornind parcă dintr-un punct P_2 anterior lentilei, la distanța $|f|$ față de aceasta (vezi fig.3.54).

Transformarea pătratică de fază a fost obținută mai sus în aproximația paraxială, pentru lentile cu suprafețe sferice. În condiții de neparaxialitate, frontul de undă transformat nu va fi sferic, abaterile sale de la sfericitate numindu-se *aberații*. Aberațiile geometrice (sau monocromatice) sunt prezente chiar și atunci când suprafețele lentilelor sunt perfect sferice. De aceea, în practică, lentilele trebuie "corectate" pentru a diminua aceste aberații în măsura în care acest lucru este posibil. Eliminarea simultană a tuturor aberațiilor geometrice este practic imposibilă. Corectarea aberațiilor se face prin șlefuirea suprafețelor lentilelor, cu o anumită asfericitate, pentru a îmbunătăți sfericitatea frontului de undă generat de ele.

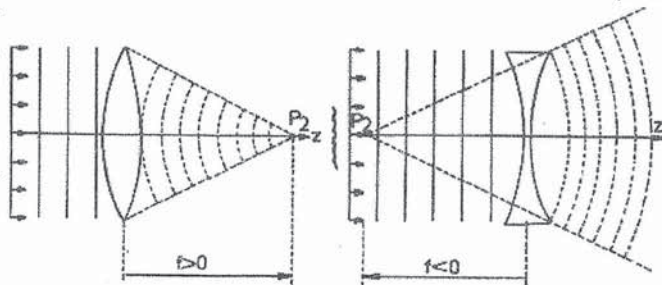


Fig.3.54. Transformarea undelor plane în unde sferice de către lentilele sferice subțiri (definirea distanțelor focale).

§. 3. 11. Funcția de transfer optic (FTO) a unui sistem liniar invariant spațial (SLIS)

3. 11. 1. Răspuns la impuls și transfer optic

Așa cum s-a arătat în secțiunea 3.9.1, un sistem *liniar* (cu proprietăți de aditivitate și omogenitate) este *invariant spațial* dacă posedă proprietatea (3.259), adică nu este creator de noi pulsații (frecvențe) spațiale față de cele ale semnalului de intrare. În cele ce urmează, ne propunem să caracterizăm mai "în extenso" sistemele optice de acest tip, la care atât semnalul de intrare (excitația) cât și semnalul de ieșire (răspunsul) sunt funcții, în general, complexe, de două variabile reale. Vom nota cu indicele 1 mărimile referitoare la "spațiul de intrare" și cu indicele 2 - pe cele referitoare la "spațiul de ieșire".

Dacă $g_1(x_1, y_1)$ este o excitație și $g_2(x_2, y_2)$ este răspunsul corespunzător, atunci acțiunea sistemului poate fi reprezentată printr-un *operator liniar* S . Vom scrie simbolic

$$g_2(x_2, y_2) = S\{g_1(x_1, y_1)\} . \quad (3.319)$$

Utilizând proprietatea de filtrare a funcției delta Dirac, adică relația (3.291), putem scrie

$$g_1(x_1, y_1) = \iint_{-\infty}^{+\infty} g_1(\xi, \eta) \delta(x_1 - \xi, y_1 - \eta) d\xi d\eta, \quad (3.320)$$

variabilele ξ, η având aceeași semnificație (de exemplu, coordonate spațiale în planul obiect) ca și variabilele x_1, y_1 . Introducând (3.320) în (3.319) obținem răspunsul

$$g_2(x_2, y_2) = S\left\{ \iint_{-\infty}^{+\infty} g_1(\xi, \eta) \delta(x_1 - \xi, y_1 - \eta) d\xi d\eta \right\}. \quad (3.321)$$

Dacă ținem cont că S este un operator *liniar*, și avem în vedere că $g_1(\xi, \eta)$ poate fi considerat doar ca un "factor de pondere" al *semnalului elementar* $\delta(x_1 - \xi, y_1 - \eta)$, putem scrie

$$g_2(x_2, y_2) = \iint_{-\infty}^{+\infty} g_1(\xi, \eta) S\{\delta(x_1 - \xi, y_1 - \eta)\} d\xi d\eta. \quad (3.321')$$

Funcția $\delta(x_1 - \xi, y_1 - \eta)$ nu este altceva decât o excitație δ - formă ce acționează în punctul (ξ, η) din spațiul "de intrare". Să notăm prin

$$h(x_2, y_2; \xi, \eta) \equiv S\{\delta(x_1 - \xi, y_1 - \eta)\}, \quad (3.322)$$

răspunsul sistemului la excitația elementară δ - formă. Funcția h este cunoscută sub denumirea de *răspuns la impuls (impulse response)* sau *funcție de împrăștiere a punctului**. Acum relația (3.321') capătă forma

* Această funcție este analoagă cu funcția Green cu ajutorul căreia se exprimă soluția ecuațiilor diferențiale.

$$g_2(x_2, y_2) = \iint_{-\infty}^{+\infty} g_1(\xi, \eta) h(x_2, y_2; \xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (3.323)$$

cunoscută sub denumirea de *integrală de superpoziție*. În această integrală sistemul liniar este caracterizat complet de răspunsurile h ale sistemului la excitații δ - forme distribuite în întregul spațiu "de intrare". În limbaj optic, adică în cazul unui sistem de format imagini, aceasta înseamnă necesitatea cunoașterii modului în care sistemul (dioptri, lentile etc.) formează imaginea *surselor punctiforme* plasate în diverse puncte ale spațiului obiect.

În cazul sistemelor *invariante spațial* (sau *izoplanatice* - cum se mai numesc), răspunsul la impuls $h(x_2, y_2; \xi, \eta)$ depinde *numai* de distanțele (diferențele) $x_2 - \xi$ și $y_2 - \eta$, adică

$$h(x_2, y_2; \xi, \eta) = h(x_2 - \xi; y_2 - \eta). \quad (3.324)$$

Din punct de vedere optic aceasta înseamnă că *imaginea unei surse punctiforme obiect se modifică numai ca localizare spațială în spațiul imagine, nu și ca formă funcțională, atunci când sursa punctiformă explorează câmpul obiect*. În practică, sistemele de format imagini sunt rareori izoplanatice pentru întregul lor câmp obiect, dar, de regulă, este posibilă divizarea câmpului obiect în regiuni mici (*pete izoplanatice*) în interiorul cărora sistemul este aproximativ invariant spațial. Pentru a descrie complet un sistem de format imagini, este necesar să putem specifica răspunsul la impuls corespunzător fiecărei pete izoplanatice. Dacă, totuși, ne interesează numai o porțiune destul de mică din câmpul obiect, de lângă ax, uneori este suficient să considerăm doar petele izoplanatice din vecinătatea axului sistemului.

Introducând (3.324) în (3.323) obținem relația

$$g_2(x_2, y_2) = \iint_{-\infty}^{+\infty} g_1(\xi, \eta) h(x_2 - \xi, y_2 - \eta) d\xi d\eta, \quad (3.325)$$

care nu reprezintă altceva decât *convoluția* funcției obiect cu funcția de răspuns la impuls a sistemului, adică

$$g_2(x_2, y_2) = g_1(x_2, y_2) \otimes h(x_2, y_2). \quad (3.326)$$

După cum am demonstrat în general, ordinea celor două funcții în produsul de convoluție poate fi inversată (comutativitate).

Simplitatea matematică a tratării sistemelor invariante spațial, față de sistemele liniare în general, constă tocmai în posibilitatea exprimării rezultatului (3.323) ca o convoluție. Conform proprietății (3.273), transformata Fourier $G_2(v_x, v_y)$ a răspunsului $g_2(x_2, y_2)$ este pur și simplu *produsul* dintre transformata Fourier $G_1(v_x, v_y)$ a excitației $g_1(x_1, y_1)$ și transformata Fourier $H(v_x, v_y)$ a răspunsului la impuls, adică

$$G_2(v_x, v_y) = H(v_x, v_y) G_1(v_x, v_y). \quad (3.327)$$

Funcția

$$H(v_x, v_y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} h(\xi, \eta) \exp[-2\pi i(\xi v_x + \eta v_y)] d\xi d\eta, \quad (3.328)$$

care exprimă proprietățile sistemului în relația (3.327), se numește *funcție de transfer optic (FTO)* a sistemului.

Se observă că, în loc să se lucreze în spațiul coordonatelor spațiale, cu relația (3.325), este mult mai comod să se lucreze în spațiul frecvențelor spațiale ($v_x = k_x/2\pi$, $v_y = k_y/2\pi$), cu relația (3.327), pe baza cunoașterii FTO.

Dintr-un alt punct de vedere, putem privi relațiile (3.327) și (3.328) ca indicând faptul că, pentru un sistem invariant spațial, "ieșirea" poate fi descompusă în funcții elementare care sunt mai avantajoase decât funcțiile delta Dirac din relația de descompunere (3.320). Aceste funcții elementare au o formă concretă, anume sunt *funcțiile exponențial-complexe*. Transformând funcția g_1 , adică trecând la imaginea sa Fourier G_1 , se realizează de fapt o *descompunere* a "intrării" în funcții exponențial-complexe de diferite frecvențe spațiale v_x, v_y . Multiplicarea spectrului de intrare G_1 cu funcția de transfer optic H , conform relației (3.327), ia în considerare efectul sistemului asupra fiecărei funcții elementare. Subliniem că aceste efecte sunt limitate la *o modificare a amplitudinii și la o variație de fază*, deoarece spectrul funcției de intrare se multiplică printr-un număr complex $H(v_x, v_y)$ pentru fiecare pereche (v_x, v_y) . După calcularea lui G_2 cu ajutorul relației (3.327), prin transformarea Fourier inversă, se poate obține semnalul de ieșire g_2 . Transformata inversă realizează *sinteza* (sumarea, integrarea) tuturor funcțiilor elementare modificate în sensul celor spuse mai sus. Atragem încă odată atenția asupra faptului că, descompunerea, modificarea și, în final, sinteza despre care am vorbit anterior sunt realizabile numai în sistemele invariante spațial. Aceste etape se parcurg succesiv în orice proces real de prelucrare optică a informației.

Trecem acum să discutăm două aplicații deosebit de importante pentru ceea ce vom analiza mai târziu. În acest fel se va face, de asemenea, o legătură firească între chestiunile pe care le tratăm în acest capitol și cele discutate în capitolul anterior, dedicat difracției.

3. 11. 2. Spectrul unghiular al undelor plane

Să considerăm o undă, creată de un anumit sistem de surse monocromatice, care se propagă în lungul axei z , de la stânga spre dreapta. Fie $E_0(x, y, 0)$ câmpul complex al undei la nivelul planului $z=0$. Ne propunem să determinăm funcția $E(x, y, z)$ care reprezintă câmpul complex al undei la nivelul unui plan oarecare $z > 0$.

Fie $F_0(v_x, v_y)$ transformata Fourier a funcției $E_0(x, y, 0)$, adică

$$F_0(v_x, v_y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} E_0(x, y, 0) \exp[-2\pi i(xv_x + yv_y)] dx dy . \quad (3.329)$$

Invers,

$$E_0(x, y, 0) = \iint_{-\infty}^{+\infty} F_0(v_x, v_y) \exp[2\pi i(xv_x + yv_y)] dv_x dv_y . \quad (3.330)$$

Se știe că dacă (α, β, γ) sunt cosinuşii directori ai direcției de propagare pentru o undă plană monocromatică (lungime de undă λ) cu amplitudinea unitate, ea are forma cunoscută, $\exp[ik(\alpha x + \beta y + \gamma z)]$, unde $k = 2\pi/\lambda$. În plus $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$.

Rezultă că la nivelul $z = 0$, funcția exponențială $\exp[2\pi i(xv_x + yv_y)]$ poate fi considerată ca o undă plană cu cosinuzii directori $\alpha = \lambda v_x$, $\beta = \lambda v_y$ și $\gamma = \sqrt{1 - (\alpha^2 + \beta^2)} = \sqrt{1 - (v_x^2 + v_y^2)\lambda^2}$. Prin urmare, relația (3.330) reprezintă descompunerea câmpului complex de undă, la nivelul $z = 0$, în unde plane cu amplitudini complexe $F_0(v_x, v_y)dv_x dv_y$ în care $v_x = \alpha/\lambda$, $v_y = \beta/\lambda$. Funcția $F_0(\alpha/\lambda, \beta/\lambda)$ se numește *spectrul unghiular* al câmpului $E_0(x, y, 0)$. Putem scrie deci

$$F_0\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right) = \iint_{-\infty}^{+\infty} E_0(x, y, 0) \exp\left[-2\pi i\left(\frac{x\alpha}{\lambda} + \frac{y\beta}{\lambda}\right)\right] dx dy. \quad (3.329')$$

Să analizăm acum modul în care se propagă spectrul unghiular. Fie $F\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, z\right)$ funcția ce descrie spectrul câmpului complex $E(x, y, z)$ la nivelul unui plan paralel cu planul (x, y) dar aflat la $z > 0$. Putem scrie

$$F\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, z\right) = \iint_{-\infty}^{+\infty} E(x, y, z) \exp\left[-2\pi i\left(\frac{\alpha}{\lambda}x + \frac{\beta}{\lambda}y\right)\right] dx dy \quad (3.331)$$

și invers

$$E(x, y, z) = \iint_{-\infty}^{+\infty} F\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, z\right) \exp\left[2\pi i\left(x\frac{\alpha}{\lambda} + y\frac{\beta}{\lambda}\right)\right] d\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right) d\left(\frac{\beta}{\lambda}\right). \quad (3.332)$$

În plus, câmpul complex $E(x, y, z)$ trebuie să satisfacă ecuația lui Helmholtz

$$\nabla^2 E + k^2 E = 0, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (3.333)$$

în toate punctele lipsite de surse. Substituind $E(x, y, z)$ din relația (3.332) în (3.333) obținem

$$\frac{d^2 F}{dz^2} + \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \cdot (1 - \alpha^2 - \beta^2) F = 0. \quad (3.334)$$

Rezolvând această ecuație cu condiția inițială $F\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, 0\right) = F_0\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right)$ obținem

$$F\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, z\right) = F_0\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right) \exp\left[ikz\sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2}\right]. \quad (3.335)$$

De aici rezultă că dacă $\alpha^2 + \beta^2 < 1$, efectul propagării (pentru diferite componente ale spectrului unghiular) este pur și simplu o *schimbare de fază relativă, fără modificarea amplitudinii*. Pentru un z dat, și direcții (α, β) diferite, diversele componente de unde plane care ajung în același punct $P(x, y, z)$ au parcurs distanțe diferite și au faze diferite în P .

Dacă $\alpha^2 + \beta^2 > 1$, radicalul din exponențială este pur imaginar și efectul propagării de la $z = 0$ la $z \neq 0$ constă într-o *amortizare* a spectrului unghiular. Acum avem

$$F\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, z\right) = F_0\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right) \exp(-\mu z), \quad (3.336)$$

unde $\mu = k\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 1} = 2\pi\sqrt{v_x^2 + v_y^2 - \lambda^{-2}}$ ne descrie atenuarea, care *nu este aceeași* pentru toate componentele spectrului unghiular. Aceste componente ale spectrului unghiular se numesc *unde evanescente*.

În cazul intermediar $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, avem $\mu = 0$ și nu există nici atenuare, nici defazare. Este vorba de undele plane care se propagă în direcții normale față de axa z , deci care nu transportă, în mod net, energie în lungul axei z^* .

Revenind cu (3.335) și (3.332) obținem în final

$$E(x, y, z) = \iint_{-\infty}^{+\infty} F_0\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right) \exp\left[ikz\sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2}\right] \cdot \exp\left[2\pi i\left(x\frac{\alpha}{\lambda} + y\frac{\beta}{\lambda}\right)\right] \cdot d\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right) d\left(\frac{\beta}{\lambda}\right). \quad (3.337)$$

Propagarea câmpului complex de la nivelul planului $z = 0$ la nivelul planului $z > 0$ poate fi tratată *sistemic*, adică putem scrie

$$E(x, y, z) = \iint_{-\infty}^{+\infty} E_0(\xi, \eta, 0) h(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta. \quad (3.338)$$

Pentru a afla forma răspunsului la impuls $h(x - \xi, y - \eta)$ procedăm în felul următor: substituim în (3.337) expresia (3.329) a spectrului unghiular $F_0(\alpha/\lambda, \beta/\lambda) = F_0(v_x, v_y)$, obținând

$$h(x - \xi, y - \eta) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[2\pi i z \sqrt{\lambda^{-2} - v_x^2 - v_y^2}\right] \cdot \exp\left[2\pi i(v_x(x - \xi) + v_y(y - \eta))\right] dv_x dv_y. \quad (3.339)$$

Se observă că $h(x - \xi, y - \eta)$ este transformata Fourier a funcției *de transfer optic (FTO)*

$$H(v_x, v_y) = \exp\left[2\pi i \frac{z}{\lambda} \sqrt{1 - (\lambda v_x)^2 - (\lambda v_y)^2}\right] \equiv \frac{F(v_x, v_y; z)}{F_0(v_x, v_y)}. \quad (3.340)$$

Dacă distanța z este mare (cel puțin de câteva ori mai mare decât lungimea de undă λ), contribuția undelor evanescente poate fi neglijată. Atunci funcția de transfer H se poate scrie sub forma

$$H(v_x, v_y) = \begin{cases} \exp\left[2\pi i \frac{z}{\lambda} \sqrt{1 - (\lambda v_x)^2 - (\lambda v_y)^2}\right] & \text{pentru } v_x^2 + v_y^2 < \lambda^{-2}, \\ 0 & \text{în rest,} \end{cases} \quad (3.341)$$

adică fenomenul de propagare poate fi privit ca un *filtru* de frecvențe spațiale (dispersiv) cu bandă de trecere finită. Transmisia filtrului este nulă în exteriorul cercului de rază $1/\lambda$ desenat în planul (v_x, v_y) . În interiorul cercului, modulul funcției de transfer este egal cu 1, însă faza sa este dependentă de frecvențele considerate. Proprietățile dispersive ale fazei sunt

* Undele evanescente, cu $\mu \geq 0$, se tratează mult mai riguros atunci când se ia în considerare *natura vectorială (electromagnetică)* a câmpurilor.

semnificative pentru valori v_x, v_y mai mari; când v_x și v_y tind spre zero aceste proprietăți dispersive dispar.

Am ajuns, iată, la concluzia că imaginea transmisă (la nivelul $z > 0$) de o undă electromagnetică (luminoasă, de exemplu) care se propagă, are un spectru mărginit de frecvențe spațiale. Detaliile imaginii, mai mici decât lungimea de undă a undei utilizate, se pierd (se șterg) la distanțe mai mari decât câteva lungimi de undă.

În orice sistem optic realist, în secțiunea transversală pe direcția de propagare, există limitări spațiale (monturi, diafragme, aperturi în ecrane opace) de care nu am ținut cont în considerentele anterioare. Să admitem, de exemplu, că la nivelul planului $z = 0$ s-a introdus un paravan opac cu o deschidere plană Σ . Fie $F_i(\alpha/\lambda, \beta/\lambda)$ spectrul unghiular al câmpului complex al undei incidente pe paravan. Să definim *funcția de transmitanță* a aperturii prin relația

$$t(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{pentru } (x, y) \text{ în } \Sigma \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$$

Admițând, după Kirchhoff, că, la nivelul paravanului, câmpul complex nu este perturbat de prezența sa și că, în zona umbrei geometrice, la dreapta paravanului, el este nul, putem scrie

$$E_t(x, y, 0) = E_i(x, y, 0)t(x, y). \quad (3.342)$$

Evident, în această relație E_i și E_t sunt câmpurile complexe la $z = -0$, respectiv la $z = +0$. Teorema inversă a convoluției ne spune că, spectrul unghiular transmis dincolo de paravan, la nivelul $z = +0$, este

$$F_t\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right) = F_i\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right) \otimes T\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right), \quad (3.343)$$

unde

$$T\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right) = \iint_{-\infty}^{+\infty} t(x, y) \exp\left[-2\pi i\left(\frac{\alpha}{\lambda}x + \frac{\beta}{\lambda}y\right)\right] dx dy \quad (3.344)$$

este spectrul unghiular caracteristic al aperturii Σ .

Să considerăm următorul caz particular important: o undă plană cu amplitudinea egală cu unitatea, iluminează apertura Σ normal. În acest caz, E_i fiind independent de x și y , din formula (3.329) rezultă

$$F_i\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right) = \delta\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right) \quad (3.345)$$

și deci

$$F_t\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right) = \delta\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right) \otimes T\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right) = T\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right). \quad (3.346)$$

Prin urmare, spectrul unghiular transmis coincide cu spectrul unghiular caracteristic aperturii.

Rezultă că introducerea diafragmei care limitează spațial unda incidentă are ca efect o lărgire (împrăștiere) a spectrului unghiular transmis. În cazul undei incidente plane F_t coincide cu T ; cu cât este mai mică apertura difractantă cu atât este mai mare spectrul unghiular transmis.

3. 11. 3. Difrakția Fresnel și difrakția Fraunhofer

Aprofundând analiza începută vom discuta acum, din punct de vedere sistemic, fenomenul de difracție în cele două situații extreme uzuale: aproximația Fresnel, respectiv aproximația Fraunhofer.

Fie situația reprezentată în fig.3.55, unde Σ este o apertură difractantă plană, într-un paravan opac infinit, iar $P_0(x_0, y_0, 0)$ este un punct oarecare din interiorul aperturii. Să analizăm difracția unei unde monocromatice (lungimea de undă λ) pe apertura Σ . Regiunea de observație, considerată și ea

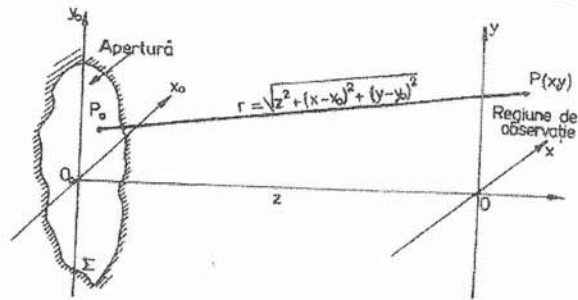


Fig.3.55. Apertură difractantă și regiune de observație.

plană, se află la distanța z de planul aperturii Σ . Cele două plane ($x_0O_0y_0$) și (xOy) se presupun paralele, la fel și axele corespondente. Considerând că observația se face în punctul $P(x, y, 0)$, distanța de la P_0 la P este $r = \sqrt{z^2 + (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$.

Utilizând expresia matematică a principiului Huygens-Fresnel în varianta Rayleigh-Sommerfeld, (vezi Cap. II, relația (2.42)), amplitudinea câmpului sosit în punctul $P(x, y)$ se poate scrie, în funcție de amplitudinea $E(x_0, y_0)$ a câmpului din P_0 , sub forma

$$E(x, y) = \iint_{\Sigma} h(x, y; x_0, y_0) E(x_0, y_0) dx_0 dy_0, \quad (3.347)$$

unde

$$h(x, y; x_0, y_0) = \frac{1}{i\lambda} \frac{\exp(ikr)}{r} \cos(\vec{n}, \vec{r}); \quad (3.348)$$

\vec{n} este versorul normal la apertură iar $\vec{r} = \vec{PP}_0$.

În cele ce urmează, considerând că $E(x_0, y_0) = 0$ în exteriorul aperturii Σ (ipoteza lui Kirchhoff), integralele din (3.347) se pot extinde la infinit, adică vom putea scrie

$$E(x, y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} h(x, y; x_0, y_0) E(x_0, y_0) dx_0 dy_0. \quad (3.347')$$

Vom presupune de asemenea, că distanța z dintre cele două plane paralele ($x_0O_0y_0$) și (xOy) este mult mai mare decât dimensiunile liniare ale aperturii Σ și că, în planul de observație, punctul P nu se îndepărtează prea mult de centrul O . Mai exact vom admite că $\sup(|x|, |y|) \ll z$. În aceste condiții, se poate utiliza aproximația $\cos(\vec{n}, \vec{r}) \approx 1$ (eroarea nu depășește 5% când unghiul dintre \vec{n} și \vec{r} este până la 18°). În plus, distanța r din numitorul lui h poate fi considerată egală cu z și astfel

$$h(x, y; x_0, y_0) \approx \frac{1}{i\lambda z} \exp(ikr). \quad (3.348)$$

Se observă că, în exponențială, r nu s-a înlocuit prin z . Dacă r s-ar înlocui cu z și în exponențială, eroarea comisă ar fi mult prea mare (în domeniul optic k este mare și, prin multiplicare cu k , diferențele $\Delta r = r - z$ mici ar genera erori de fază care pot ajunge la 2π sau chiar pot depăși această valoare!).

Distanța r din exponențială se poate scrie însă sub forma

$$r = z \sqrt{1 + \left(\frac{x-x_0}{z}\right)^2 + \left(\frac{y-y_0}{z}\right)^2} \quad (3.349)$$

și, dacă ultimii doi termeni de sub radical sunt foarte mici în comparație cu unitatea, putem utiliza următoarea dezvoltare în serie

$$r = z \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{x-x_0}{z}\right)^2 + \left(\frac{y-y_0}{z}\right)^2 \right] - \frac{1}{8} \left[\left(\frac{x-x_0}{z}\right)^2 + \left(\frac{y-y_0}{z}\right)^2 \right]^2 + \dots \right\}. \quad (3.350)$$

Dacă din această serie se rețin numai primii doi termeni, spunem că avem de-a face cu *aproximația Fresnel*. În acest caz, funcția h devine

$$h(x, y; x_0, y_0) \approx \frac{\exp(ikz)}{i\lambda z} \cdot \exp \left\{ \frac{ik}{2z} \left[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \right] \right\}. \quad (3.351)$$

Când distanța z este suficient de mare pentru ca această aproximație să fie prescrisă, spunem că difracția descrisă de h astfel exprimat este o *difracție de tip Fresnel*. În fond, aici se presupune că undele sferice Huygensiene pot fi considerate ca având fronturi *pătratic*. Evident, precizia acestei aproximații implică existența unor limitări în privința dimensiunilor transversale ale lui Σ , ale regiunii de observație și a distanței z . Se consideră că aproximația Fresnel este *precisă* dacă al treilea termen din dezvoltarea în serie a lui r dă o variație de fază mult mai mică decât un radian. Rezultă că este suficient ca

$$z \gg \left\{ \frac{\pi}{4\lambda} \left[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \right]_{\max}^2 \right\}^{1/3}. \quad (3.352)$$

În realitate, această relație este mai restrictivă decât ar fi cazul. Pentru ca aproximația Fresnel să rămână valabilă trebuie doar ca termenii superiori din dezvoltarea în serie a lui r să nu modifice semnificativ *integrala de superpoziție* (3.347); pentru aceasta nu este neapărat necesar ca termenii suplimentari adăugați în faza din $\exp(ikr)$ să fie mult mai mici decât un radian. La distanțe z suficient de mici, care violează relația (3.352), cantitatea $k/2z$ va fi, în general, atât de mare, și oscilațiile factorilor pătratici de fază în (3.351) atât de rapide, încât contribuția principală la integrala de superpoziție provine de la punctele pentru care $x_0 = x$ și $y_0 = y$, adică pentru care rata de variație a fazei este minimă. În vecinătatea unor astfel de puncte de *fază staționară*, mărimea termenilor de fază de ordin superior este, cel mai adesea, complet neglijabilă*.

Când aproximația Fresnel este valabilă, prin substituirea relației (3.351) în (3.347') obținem

* Vezi M. Born; E. Wolf, *Principles of Optics*, Pergamon Press, Oxford, 1968, anexa 3.

$$E(x, y) = \frac{\exp(ikz)}{i\lambda z} \iint_{-\infty}^{+\infty} E(x_0, y_0) \exp\left\{\frac{ik}{2z}[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]\right\} dx_0 dy_0 \quad (3.353)$$

sau, dezvoltat

$$E(x, y) = \frac{\exp(ikz)}{i\lambda z} \cdot \exp\left[\frac{ik}{2z}(x^2 + y^2)\right] \cdot \iint_{-\infty}^{+\infty} \left\{E(x_0, y_0) \exp\left[\frac{ik}{2z}(x_0^2 + y_0^2)\right]\right\} \cdot \exp\left[-\frac{2\pi i}{\lambda z}(x_0 x + y_0 y)\right] dx_0 dy_0. \quad (3.354)$$

Prin urmare, în conformitate cu (3.262), până la factorii multiplicativi din fața integralei, independenți de (x_0, y_0) , funcția $E(x, y)$ este *transformata Fourier* ai funcției $E(x_0, y_0) \exp\left[\frac{ik}{2z}(x_0^2 + y_0^2)\right]$, unde transformata este luată la frecvențele spațiale $v_x = x/(\lambda \cdot z)$, $v_y = y/(\lambda \cdot z)$.

Revenind la forma inițială (3.353), care exprimă convoluția lui $E(x_0, y_0)$, cu h observăm că difracția Fresnel poate fi tratată sistemic; ea corespunde cazului existenței invarianței spațiale, deci existenței unei funcții de transfer optic de forma

$$H(v_x, v_y) = \mathcal{F}\{h(x-x_0; y-y_0)\} = \exp(ikz) \exp\left[-\pi i \lambda z (v_x^2 + v_y^2)\right]. \quad (3.355)$$

Primul factor exponențial descrie o "retardare" uniformă de fază, suferită de oricare din componentele spectrului unghiular, la propagarea între două plane separate de distanța z . Cel de-al doilea factor exponențial descrie o dispersie fazică cu o dependență pătratică de frecvență. Evident, funcția de transfer de aici este o formă aproximativă a celei exprimate prin formula (3.341), cu neglijarea termenilor de ordin superior lui 2.

Deși problema difracției Fresnel pe o apertură rectangulară a fost abordată și în secțiunea 2.7.1, nu credem că este lipsită de interes reluarea ei, cu atât mai mult cu cât, de data aceasta, nu ne vom mai baza pe formula (2.67) ci pe formula (3.353) care rezultă din relația Rayleigh-Sommerfeld (2.42). Ne ocupăm numai de cazul particular al unei aperturi sub formă de pătrat, cu latura ℓ , la dreapta căreia avem semnalul

$$E(x_0, y_0) = \text{rect}\left(\frac{x_0}{\ell}\right) \text{rect}\left(\frac{y_0}{\ell}\right). \quad (3.356)$$

Convoluția (3.353) ne dă, în punctul de observație $P(x, y)$, situat la distanța z de planul aperturii, următorul semnal

$$E(x, y) = \frac{\exp(ikz)}{i\lambda z} \iint_{-\ell/2}^{+\ell/2} \exp\left[\frac{ik}{2z}(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2\right] dx_0 dy_0. \quad (3.357)$$

Cu schimbările de variabile $u = (x-x_0)\sqrt{k/\pi z}$, $v = (y-y_0)\sqrt{k/\pi z}$ avem limitele de integrare $u_{1,2} = -(x \pm \ell/2)\sqrt{k/\pi z}$, respectiv $v_{1,2} = -(y \pm \ell/2)\sqrt{k/\pi z}$ și relația (3.357) devine

$$E(x, y) = \frac{\exp(ikz)}{2i} \left\{ [C(u_2) - C(u_1)] + i[S(u_2) - S(u_1)] \right\} \cdot \left\{ [C(v_2) - C(v_1)] + i[S(v_2) - S(v_1)] \right\}, \quad (3.358)$$

unde $C(w)$ și $S(w)$ sunt integralele reale ale lui Fresnel, definite prin relațiile (2.90), (2.91). Intensitatea luminoasă din punctul $P(x,y)$ se obține imediat prin relația $I(x,y) = |E(x,y)|^2$.

Să ne referim la un caz particular, neanalizat în secțiunea 2.7.1, cel al distanțelor z foarte mici, adică al punctelor $P(x,y)$ apropiate de planul aperturii difractante, când limitele de integrare $u_{1,2}$ și $v_{1,2}$ tind practic spre $\pm\infty$. Mai exact, acum avem

$$u_1 = \begin{cases} -\infty & \text{pentru } x > -\ell/2 \\ +\infty & \text{pentru } x < -\ell/2 \end{cases}, \quad u_2 = \begin{cases} -\infty & \text{pentru } x > +\ell/2 \\ +\infty & \text{pentru } x < +\ell/2 \end{cases},$$

și analog pentru $v_{1,2}$ cu corespondența $x \rightarrow y$.

Cu ajutorul valorilor asimptotice $C(\pm\infty) = S(\pm\infty) = \pm 1/2$, din relația (3.358) obținem imediat

$$E(x,y) \approx \exp(ikz) \operatorname{rect}\left(\frac{x}{\ell}\right) \operatorname{rect}\left(\frac{y}{\ell}\right), \quad (3.359)$$

adică valori diferite de zero numai în interiorul pătratului de latură ℓ . Cu alte cuvinte, când pătrundem în zona de difracție Fresnel, la dreapta aperturii, mai întâi ne aflăm în regiunea de aplicabilitate a opticii geometrice, deoarece câmpul (3.359) este pur și simplu proiecția geometrică a distribuției de apertură $E(x_0, y_0)$. Această concluzie, stabilită într-o situație particulară, este valabilă oricare ar fi forma aperturii difractante. Ea poate fi demonstrată în caz general numai cu ajutorul principiului fazei staționare (vezi Anexa 3 din lucrarea [16]).

Să trecem în continuare la prezentarea *aproximației de tip Fraunhofer*. Am văzut mai sus, formula (3.354), că, în planul de observație, câmpul complex $E(x,y)$ poate fi exprimat ca transformata Fourier a expresiei

$$E(x_0, y_0) \exp\left[\frac{ik}{2z} \cdot (x_0^2 + y_0^2)\right]. \quad (3.360)$$

Această afirmație este adevărată în cazul difracției Fresnel. Dacă presupunem acum că distanța z este foarte mare, astfel încât

$$z \gg \frac{k}{2} (x_0^2 + y_0^2)_{\max}, \quad (3.361)$$

exponențiala poate fi considerată a fi egală cu 1 și atunci câmpul $E(x,y)$ observat este pur și simplu transformata Fourier a câmpului $E(x_0, y_0)$ de la nivelul aperturii difractante*. În acest caz spunem că planul de observație este în *regiunea difracției Fraunhofer* și putem scrie

$$E(x,y) = \frac{\exp(ikz)}{i\lambda z} \exp\left[\frac{ik}{2z}(x^2 + y^2)\right] \cdot \iint_{-\infty}^{+\infty} E(x_0, y_0) \exp\left[-\frac{2\pi i}{\lambda z}(xx_0 + yy_0)\right] dx_0 dy_0. \quad (3.362)$$

Frecvențele spațiale sunt $v_x = x/(\lambda z)$, $v_y = y/(\lambda z)$.

Dacă dorim a avea o idee despre cât de restrictivă este relația (3.361), să ne referim la o undă cu $\lambda = 600$ nm și la o apertură Σ cu lățimea transversală maximă de 2,5 cm. Obținem $z \gg 800$ m. Chiar dacă cerința pare a fi foarte restrictivă, ea se întâlnește în multe situații concrete. Figura de difracție Fraunhofer poate fi observată și la distanțe mult mai

* Ca și anterior, nu ținem cont de factorii multiplicativi din fața integralei.

mici decât cele "prezise" de cerința (3.361), atunci când apertura Σ este iluminată cu o undă sferică ce converge spre observator sau dacă, între apertură și observator, este intercalată convenabil o lentilă convergentă.

Mai trebuie să remarcăm faptul că restricția (3.361) *distruge* invarianța spațială în cazul acestui sistem (h nu mai depinde aparent de diferențele $x - x_0, y - y_0$) și de aceea, în cazul difracției Fraunhofer, nu mai există o funcție de transfer optic unic asociată. Cu toate acestea, având în vedere că difracția Fraunhofer este un caz particular al difracției Fresnel (la distanțe z mai mari), putem admite că funcția de transfer H dată de (3.355) rămâne valabilă și de data aceasta.

Exemplificăm aproximația de tip Fraunhofer prin studiul difracției pe o apertură dreptunghiulară de laturi a și b , plasată în planul $x_0O_0y_0$, a cărei funcție de transmitanță are forma

$$t_0(x_0, y_0) = \text{rect}\left(\frac{x_0}{a}\right) \text{rect}\left(\frac{y_0}{b}\right). \quad (3.363)$$

Dacă unda plană ce cade normal pe apertură are amplitudinea E_0 , imediat după apertură ea are amplitudinea $E(x_0, y_0) = E_0 \cdot t_0(x_0, y_0)$ și formula difracției Fraunhofer ne dă

$$E(x, y) = \frac{\exp(ikz)}{i\lambda z} \exp\left[\frac{ik}{2z}(x^2 + y^2)\right] E_0 \cdot \iint_{-\infty}^{+\infty} \text{rect}\left(\frac{x_0}{a}\right) \text{rect}\left(\frac{y_0}{b}\right) \exp\left[-\frac{2\pi i}{\lambda z}(xx_0 + yy_0)\right] \cdot dx_0 dy_0 = E_0 \frac{ab}{i\lambda z} \exp(ikz) \exp\left[\frac{ik}{2z}(x^2 + y^2)\right] \cdot \text{sinc}\left(\frac{ax}{\pi\lambda z}\right) \text{sinc}\left(\frac{by}{\pi\lambda z}\right). \quad (3.364)$$

Pentru intensitatea luminoasă $I(x, y) = |E(x, y)|^2$ obținem

$$I(x, y) = \frac{(ab)^2 E_0^2}{\lambda^2 z^2} \cdot \left[\text{sinc}\left(\frac{ax}{\pi\lambda z}\right)\right]^2 \cdot \left[\text{sinc}\left(\frac{by}{\pi\lambda z}\right)\right]^2. \quad (3.365)$$

Această formulă este adevărată la distanțe z mari, în zona difracției Fraunhofer. La distanțe mai mici, în zona difracției Fresnel, structura intensității luminoase este alta (vezi fig.3.56). Foarte aproape de apertura Σ , distribuția de intensitate reproduce fidel forma deschiderii din paravan, adică delimitarea dintre lumină și umbră este netă. Ceva mai departe, lumina pătrunde în zona umbrei geometrice iar, în zona de lumină, intensitatea are un caracter oscilant. Pe măsură ce ne îndepărtăm mai mult de apertura Σ , distribuția de intensitate luminoasă seamănă din ce în ce mai puțin cu cea de lângă apertură, deci cu funcția $E_0^2 \cdot t_0^2(x_0, y_0)$. Când distanța z este atât de mare încât este satisfăcută condiția (3.361), distribuția de intensitate este redată corect de formula (3.365), adică difracția este de tip Fraunhofer.

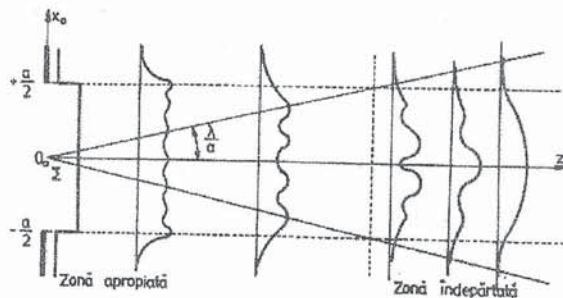


Fig.3.56. Distribuții de intensitate, la diferite distanțe, în urma difracției pe o apertură rectangulară, liniară.

Să urmărim acum modificarea spectrului semnalului optic la trecerea (propagarea) lui prin sistem. Spectrul luminii incidente pe ecran conține numai o singură componentă: $F_0^{(-)}(\alpha, \beta) = E_0 \cdot \lambda^2 \delta(\alpha, \beta)$. La trecerea luminii prin apertură spectrul se lărgeste cu atât mai mult cu cât deschiderea aperturii este mai îngustă

$$F_0^{(+)}(\alpha, \beta) = E_0(ab) \operatorname{sinc}\left(\frac{\alpha a}{\pi \lambda}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{\beta b}{\pi \lambda}\right). \quad (3.366)$$

În planul de observație (la $z > 0$), spectrul se deosebește de cel dat de formula (3.366) numai prin factorii de fază, adică

$$F(\alpha, \beta) = F_0^{(+)}(\alpha, \beta) H(\alpha, \beta) = \\ = E_0(ab) \operatorname{sinc}\left(\frac{\alpha a}{\pi \lambda}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{\beta b}{\pi \lambda}\right) \exp(ikz) \exp\left[-\frac{ikz}{2}(\alpha^2 + \beta^2)\right]. \quad (3.367)$$

Astfel, la propagarea semnalului în spațiul liber, spectrul său de amplitudine nu se modifică; toate schimbările sale de structură, reprezentate schematic în fig.3.56, sunt condiționate de factorii exponențiali, unimodulari, variabili odată cu z și cu frecvențele spațiale (înghiulare).

Exemplul prezentat arată cât de simplu se poate efectua, în unele cazuri, calculul sistemelor optice, prin metoda spectrală: în locul calculării unor integrale greoaie de tipul (3.325), totul se reduce la efectuarea produsului funcțiilor spectrale (F și H).

§. 3. 12. Lentila ca realizator de transformată Fourier bidimensională

Una din cele mai remarcabile și mai utile proprietăți optice ale unei lentile convergente* este abilitatea sa de a realiza transformarea Fourier bidimensională. În cele ce urmează, vom analiza trei situații concrete, distincte, în care se realizează această operație matematică. În toate cazurile se va presupune că iluminarea este monocromatică, în fascicul paralel, și că ne interesează distribuția de amplitudine luminoasă în planul focal posterior (imagine) al lentilei. Distanța focală a lentilei se notează cu $f(> 0)$.

A. Obiectul plasat înaintea lentilei, lângă ea.

Fie un obiect plan, cu transmitanța de amplitudine $t_0(x, y)$, plasat înaintea lentilei, dar lângă ea, așa cum se vede în fig. 3.57. Să presupunem că obiectul este iluminat *uniform* de către o undă incidentă plană, monocromatică, de amplitudine A . Semnalul incident pe lentilă este

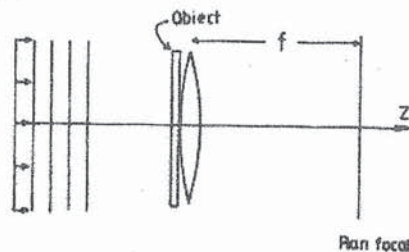


Fig.3.57. Obiect plasat înaintea unei lentile, lângă ea.

* Vom considera numai cazul lentilelor convergente *subțiri*.

$$E_{\ell}(x, y) = At_0(x, y). \quad (3.368)$$

Extinderea finită a aperturii lentilei este descrisă de *funcția pupilară* $P(x, y)$ definită de

$$P(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{în interiorul aperturii lentilei} \\ 0 & \text{în rest.} \end{cases} \quad (3.369)$$

Ținând cont de aceasta, precum și de factorul de transfer (3.317) al lentilei, distribuția de amplitudine în spatele lentilei va fi (până la un factor de proporționalitate constant)

$$E'_{\ell}(x, y) = E_{\ell}(x, y)P(x, y)\exp\left[-i\frac{k}{2f}(x^2 + y^2)\right]. \quad (3.370)$$

Pentru a afla distribuția $E_f(x_f, y_f)$ a amplitudinilor la nivelul planului focal posterior vom aplica formula difracției Fresnel, formula (3.353). Astfel, pentru $z = f$, obținem,

$$E_f(x_f, y_f) = \frac{1}{i\lambda f} \exp\left[\frac{ik}{2f}(x_f^2 + y_f^2)\right] \cdot \iint_{-\infty}^{+\infty} E'_{\ell}(x, y) \cdot \exp\left[\frac{ik}{2f}(x^2 + y^2)\right] \cdot \exp\left[-\frac{2\pi i}{\lambda f}(xx_f + yy_f)\right] dx dy, \quad (3.371)$$

în care un factor exponențial unimodular constant, care nu afectează în nici-un mod semnificativ rezultatul final, a fost abandonat. Dacă înlocuim (3.370) în (3.371), factorii exponențiali pătratici de sub integrală se compensează și rezultă

$$E_f(x_f, y_f) = \frac{1}{i\lambda f} \exp\left[\frac{ik}{2f}(x_f^2 + y_f^2)\right] \cdot \iint_{-\infty}^{+\infty} E_{\ell}(x, y)P(x, y)\exp\left[-\frac{2\pi i}{\lambda f}(xx_f + yy_f)\right] \cdot dx dy. \quad (3.372)$$

Astfel, comparând (3.372) cu (3.262), ajungem la concluzia că distribuția de câmp E_f este *proporțională* cu transformata Fourier bidimensională a porțiunii din câmpul incident subînscris de apertura lentilei. Când extinderea fizică a obiectului este mai mică decât apertura lentilei, factorul pupilar $P(x, y)$ poate fi luat egal cu 1 obținând

$$E_f(x_f, y_f) = \frac{A}{i\lambda f} \exp\left[\frac{ik}{2f}(x_f^2 + y_f^2)\right] \cdot \iint_{-\infty}^{+\infty} t_0(x, y)\exp\left[-\frac{2\pi i}{\lambda f}(xx_f + yy_f)\right] \cdot dx dy. \quad (3.373)$$

Rezultă că amplitudinea și faza semnalului luminos în punctul de coordonate (x_f, y_f) , din planul focal posterior, sunt influențate de amplitudinea și faza componentelor Fourier ale obiectului, la frecvențele spațiale $v_x = x_f/\lambda f$, $v_y = y_f/\lambda f$.

Subliniem că relația de transformare Fourier dintre obiect și distribuția de amplitudine în planul focal nu este exactă (datorită prezenței factorului pătratic, de fază, din fața integralei). Din relația (3.373) rezultă că distribuția de fază în planul focal nu este aceeași ca distribuția de fază la nivelul obiectului. Din fericire, în cele mai multe cazuri, este importantă distribuția de *intensitate* la nivelul planului focal și nu atât amplitudinea complexă. Luând pătratul modulului ultimei relații obținem intensitatea

$$I_f(x_f, y_f) = \frac{A^2}{\lambda^2 f^2} \left| \iint_{-\infty}^{+\infty} t_0(x, y) \exp \left[-\frac{2\pi i}{\lambda f} (xx_f + yy_f) \right] \cdot dx dy \right|^2. \quad (3.374)$$

B. Obiectul plasat în fața lentilei (la o anumită distanță)

Situația pe care o avem în vedere este schițată în fig.3.58 și reprezintă un caz mai general decât cel considerat anterior. Obiectul, plasat la distanța d_0 în fața lentilei, este iluminat normal, de o undă incidentă plană, de amplitudine A . Ca mai sus, notăm prin t_0 transmittanța de amplitudine a obiectului.

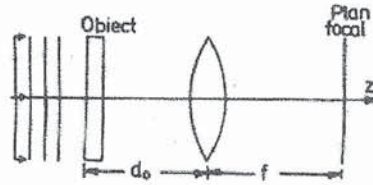


Fig.3.58. Obiect plasat la o anumită distanță, în fața unei lentile.

Fie $F_0(v_x, v_y)$ transformata Fourier a semnalului transmis de obiect și $F_\ell(v_x, v_y)$, spectrul Fourier al semnalului incident pe lentilă, adică

$$F_0(v_x, v_y) = \mathcal{F} \{A t_0\}, \quad F_\ell(v_x, v_y) = \mathcal{F} \{E_\ell\}. \quad (3.375)$$

Presupunând că pentru propagarea pe distanța d_0 este valabilă aproximația Fresnel, funcțiile F_0 și F_ℓ pot fi legate prin relația (3.340) cu $H(v_x, v_y)$ de forma (3.355), adică

$$F_\ell(v_x, v_y) = F_0(v_x, v_y) \exp \left[-i\pi \lambda d_0 (v_x^2 + v_y^2) \right]. \quad (3.376)$$

Și de data aceasta, am lăsat la o parte un factor de fază unimodular, constant, neimportant pentru analiza noastră calitativă.

Pentru moment, vom neglija extinderea finită a aperturii lentilei și vom considera $P(x, y) = 1$. Astfel, relația (3.372) poate fi transcrisă sub forma

$$E_f(x_f, y_f) = \frac{1}{i\lambda f} \exp \left[\frac{ik}{2f} (x_f^2 + y_f^2) \right] \cdot F_\ell \left(\frac{x_f}{\lambda f}, \frac{y_f}{\lambda f} \right). \quad (3.377)$$

Ținând cont de (3.376) avem

$$E_f(x_f, y_f) = \frac{1}{i\lambda f} \exp \left[\frac{ik}{2f} \left(1 - \frac{d_0}{f} \right) (x_f^2 + y_f^2) \right] \cdot F_0 \left(\frac{x_f}{\lambda f}, \frac{y_f}{\lambda f} \right) \quad (3.378)$$

sau,

$$E_f(x_f, y_f) = \frac{A}{i\lambda f} \exp \left[\frac{ik}{2f} \left(1 - \frac{d_0}{f} \right) (x_f^2 + y_f^2) \right] \cdot \iint_{-\infty}^{+\infty} t_0(x_0, y_0) \exp \left[-\frac{2\pi i}{\lambda f} (x_0 x_f + y_0 y_f) \right] \cdot dx_0 dy_0. \quad (3.379)$$

De aici rezultă că amplitudinea și faza semnalului luminos la nivelul planului focal, în punctul de coordonate (x_f, y_f) , sunt din nou legate de amplitudinea și faza spectrului obiectului la frecvențele spațiale $v_x = x_f/\lambda f$, $v_y = y_f/\lambda f$. Nici de data aceasta transformata Fourier (3.379) nu este exactă, căci în general factorul de fază din fața integralei este diferit de zero. În cazul particular $d_0 = f$, exponențiala anterioară integralei devine egală cu 1, deoarece faza corespunzătoare se anulează. Acum transformarea Fourier este *exactă*.

Până în acest moment s-a neglijat extinderea finită a aperturii lentilei. În continuare, ne propunem să luăm în considerare și acest aspect, utilizând o aproximație de tip optică geometrică. O atare aproximație este precisă dacă distanța d_0 este suficient de mică pentru ca obiectul să poată fi considerat în regiunea de difracție Fresnel pe apertura lentilei utilizate (imaginându-ne propagarea luminii în sens invers). Această condiție este îndeplinită în majoritatea cazurilor de interes practic.

Dacă ne referim în mod concret la situația din fig.3.59, amplitudinea luminoasă în punctul (x_f, y_f) este o sumă a tuturor contribuțiilor de la razele de lumină care au cosinuzii directori ai direcției de propagare $\alpha \approx x_f/f$, $\beta \approx y_f/f$. Totuși, numai o parte finită din aceste raze sunt colectate de apertura lentilei.

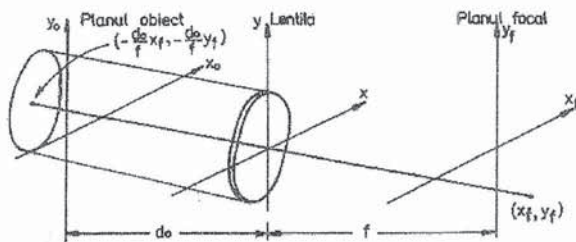


Fig.3.59. Vignetarea obiectului.

Astfel, extinderea finită a aperturii lentilei poate fi luată în considerare proiectând-o înapoi pe planul obiect, proiecția fiind centrată pe linia ce unește punctul (x_f, y_f) cu centrul lentilei (vezi fig.3.59). Prin urmare, *apertura lentilei limitează extinderea efectivă a obiectului* însă, de data aceasta, porțiunea particulară din t_0 care afectează semnalul E_f în (x_f, y_f) , *depinde de coordonatele* (x_f, y_f) . Așa cum se constată din fig. 3.59, valoarea lui E_f în punctul (x_f, y_f) poate fi găsită prin transformata Fourier a acelei porțiuni din obiect care este delimitată de funcția pupilară P centrată pe coordonatele $x_0 = -x_f(d_0/f)$ și $y_0 = -y_f(d_0/f)$. Astfel, putem scrie

$$E_f(x_f, y_f) = \frac{A}{i\lambda f} \exp \left[\frac{ik}{2f} \left(1 - \frac{d_0}{f} \right) (x_f^2 + y_f^2) \right] \cdot \iint_{-\infty}^{+\infty} t_0(x_0, y_0) P \left(x_0 + \frac{d_0}{f} x_f, y_0 + \frac{d_0}{f} y_f \right) \exp \left[-\frac{2\pi i}{\lambda f} (x_0 x_f + y_0 y_f) \right] dx_0 dy_0. \quad (3.380)$$

Efectul de limitare a obiectului de către apertura finită a lentilei este cunoscut sub denumirea de *efect de vignetaire*. El poate fi minimizat când obiectul este plasat aproape de lentilă sau când apertura lentilei este mult mai mare decât obiectul. În practică, se preferă plasarea obiectului chiar lângă lentilă. Alteori, pentru o analiză Fourier riguroasă, obiectul se plasează în planul focal anterior, pentru a avea de-a face cu o transformată Fourier exactă (când $d_0 = f$, factorul exponențial din fața integralei devine egal cu unitatea și nu există nici-o deformare (curbare) a câmpului fazic).

Dacă ne interesează numai distribuția de intensitate luminoasă la nivelul planului focal, se ia pătratul modului expresiilor (3.379) sau (3.380), exact ca în cazul A.

C. Obiectul plasat în spatele lentilei

Să considerăm situația reprezentată schematic în fig.3.60, adică cea a unui obiect plasat la distanța d față de planul focal posterior al unei lentile cu distanța focală f , în spatele lentilei. Ca și până acum, considerăm că lentila este iluminată normal, de o undă incidentă

plană, monocromatică, cu amplitudinea A . Unda incidentă pe obiect va fi, evident, o undă sferică convergentă spre focarul principal imagine al lentilei. Fie t_0 transmitanța de amplitudine a obiectului. În aproximația opticii geometrice, amplitudinea unei unde sferice ce cade pe obiect este $A(f/d)$ iar porțiunea din obiect care este efectiv iluminată se poate determina prin secționarea conului cu vârful în focarul imagine cu planul

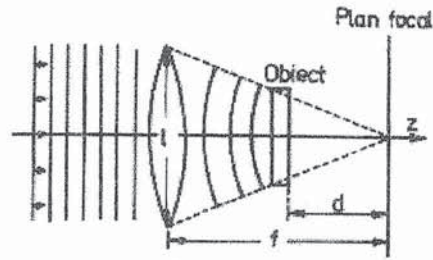


Fig.3.60. Obiect plasat în spatele unei lentile.

obiectului. Dacă lentila este circulară, cu diametrul ℓ , atunci porțiunea de obiect iluminată are diametrul $\ell(d/f)$. Extinderea finită a acestui spot iluminator poate fi reprezentată matematic prin proiectarea funcției pupilare a lentilei, prin conul de raze, pe obiect, obținând o funcție pupilară efectivă $P[x_0(f/d), y_0(f/d)]$ în planul obiect. Notăm de asemenea că, la rândul său, transmitanța t_0 a obiectului va avea și ea o apertură asociată finită. Astfel, apertura efectivă în planul obiect este determinată de intersecția aperturii reale a obiectului cu funcția pupilară proiectată. Dacă apertura obiect este iluminată complet, funcția pupilară proiectată poate fi ignorată, adică poate fi luată egală cu 1.

Utilizând o aproximație paraxială pentru unda sferică ce iluminează obiectul, amplitudinea câmpului transmis de obiect poate fi scrisă sub forma

$$E_0(x_0, y_0) = \left\{ \frac{Af}{d} P\left(x_0 \frac{f}{d}, y_0 \frac{f}{d}\right) \exp\left[-\frac{ik}{2d}(x_0^2 + y_0^2)\right] \right\} \cdot t_0(x_0, y_0). \quad (3.381)$$

Utilizând din nou formula difracției Fresnel de la nivelul planului obiect la nivelul planului focal obținem

$$E_f(x_f, y_f) = \frac{A}{i\lambda d} \exp\left[\frac{ik}{2d}(x_f^2 + y_f^2)\right] \cdot \iint_{-\infty}^{+\infty} t_0(x_0, y_0) P\left(x_0 \frac{f}{d}, y_0 \frac{f}{d}\right) \exp\left[-\frac{2\pi i}{\lambda d}(x_0 x_f + y_0 y_f)\right] \cdot dx_0 dy_0. \quad (3.382)$$

Astfel, până la un factor de fază pătratic, distribuția de amplitudine în planul focal este transformata Fourier a acelei porțiuni din obiect subînscrise de proiecția aperturii lentilei. Rezultatul (3.382) este, în esență, similar cu cel obținut anterior, când obiectul era plasat lângă lentilă, înaintea ei. Cu toate acestea, acum avem de-a face și cu un element nou, anume *scala transformatei Fourier este controlabilă de către experimentator*. Crescând distanța d , se poate crește dimensiunea spațială a transformării - în intervalul în care transparentul își mărește deschiderea spațială până la cea a lentilei (adică până la limita $d=f$). Invers, micșorându-l pe d , dimensiunea transformării se micșorează și ea. Această flexibilitate este deosebit de importantă pentru aplicațiile din domeniul filtrajului spațial (vezi mai departe), unde posibilitatea ajustării convenabile a scalei transformării este de utilitate considerabilă.

§. 3. 13. Formarea imaginilor în lumină monocromatică

În mod indiscutabil, cea mai familiară și, desigur, cea mai importantă proprietate optică a lentilelor este capacitatea lor de a forma imagini; dacă un obiect este așezat în fața unei lentile și este iluminat, atunci, în condiții bine-definite, într-un alt plan, va apare o distribuție de intensitate luminoasă ce seamănă cu cea a obiectului. Distribuția de intensitate este numită *image* a obiectului. Ea poate fi *reală*, în sensul că distribuția de intensitate luminoasă apare la nivelul unui plan dincolo de lentilă, sau *virtuală*, în sensul că lumina ce traversează lentila pare a avea originea într-o distribuție de intensitate de la nivelul unui plan, din fața lentilei.

În acest paragraf vom considera formarea imaginii în condiții ideale, adică vom aborda numai cazul lentilelor convergente subțiri, lipsite de aberații, care formează imagini reale. În plus, vom presupune că iluminarea este perfect monocromatică.

3. 13. 1. Răspunsul la impuls al unei lentile convergente

Să considerăm geometria din fig. 3.61, în care un obiect plan este așezat la distanța d_0 în fața unei lentile convergente și este iluminat monocromatic. Fie $E_0(x_0, y_0)$ câmpul complex în planul situat imediat după obiect și $E_i(x_i, y_i)$ - în planul situat la distanța d_i , după lentilă. Ne propunem să găsim condițiile în care distribuția de câmp E_i poate fi numită, în mod rezonabil, "image" a distribuției obiect E_0 .

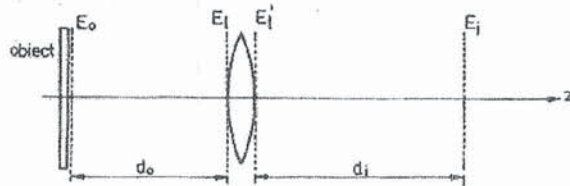


Fig.3.61. Configurația geometrică a formării imaginii unui obiect într-o lentilă.

În virtutea liniarității fenomenului de propagare a undei, putem exprima câmpul E_i prin următoarea relație integrală, de superpoziție (vezi formula (3.323)),

$$E_i(x_i, y_i) = \iint_{-\infty}^{+\infty} E_0(x_0, y_0) h(x_i, y_i; x_0, y_0) dx_0 dy_0, \quad (3.383)$$

în care $h(x_i, y_i; x_0, y_0)$ este câmpul de amplitudine produs în punctul de coordonate (x_i, y_i) de o sursă punctiformă de amplitudine unitate, din punctul (x_0, y_0) , adică răspunsul la impuls. Așadar, proprietățile sistemului de formare a imaginii sunt descrise complet, dacă vom putea specifica funcția h .

Când sistemul optic este de calitate foarte bună, ideală în privința formării imaginii, atunci E_i este practic similar cu E_0 . Aceasta înseamnă că funcția răspunsului la impuls poate fi scrisă sub forma

$$h(x_i, y_i; x_0, y_0) \cong K \cdot \delta(x_i \pm Mx_0; y_i \pm My_0), \quad (3.384)$$

unde K este o constantă complexă, M reprezintă mărirea iar semnele plus sau minus indică posibilitatea ca imaginea să fie dreaptă sau răsturnată. Planul imagine va fi acel plan în care relația (3.384) este satisfăcută cel mai exact.

Pentru a afla funcția h în cazul general, să considerăm că obiectul este o sursă luminoasă punctiformă, situată în punctul de coordonate (x_0, y_0) adică este o funcție δ -Dirac, centrată pe (x_0, y_0) . Unda incidentă pe lentilă va fi o undă sferică divergentă, ce pornește din punctul (x_0, y_0) . În caz paraxial, la nivelul intrării în lentilă putem scrie

$$E_\ell(x, y) = \frac{1}{i\lambda d_0} \exp \left\{ \frac{ik}{2d_0} [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2] \right\}, \quad (3.385)$$

iar după trecerea prin lentilă, la ieșire, având în vedere factorul de transfer (3.317) și funcția pupilară,

$$E'_\ell(x, y) = E_\ell(x, y)P(x, y) \exp \left[-\frac{ik}{2f}(x^2 + y^2) \right]. \quad (3.386)$$

În sfârșit, utilizând ecuația (3.353) a difracției Fresnel la distanța d_i , până la un factor fazic constant avem

$$h(x_i, y_i; x_0, y_0) = \frac{1}{i\lambda d_i} \iint_{-\infty}^{+\infty} E'_\ell(x, y) \exp \left\{ \frac{ik}{2d_i} [(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2] \right\} dx dy. \quad (3.387)$$

Combinând ultimele două relații obținem

$$h(x_i, y_i; x_0, y_0) = \frac{1}{\lambda^2 d_0 d_i} \exp \left[\frac{ik}{2d_i} (x_i^2 + y_i^2) \right] \cdot \exp \left[\frac{ik}{2d_0} (x_0^2 + y_0^2) \right] \cdot \iint_{-\infty}^{+\infty} P(x, y) \exp \left[\frac{ik}{2} \left(\frac{1}{d_0} + \frac{1}{d_i} - \frac{1}{f} \right) (x^2 + y^2) \right] \cdot \exp \left\{ -ik \left[x \left(\frac{x_0}{d_0} + \frac{x_i}{d_i} \right) + y \left(\frac{y_0}{d_0} + \frac{y_i}{d_i} \right) \right] \right\} dx dy. \quad (3.388)$$

Din punct de vedere formal, relațiile (3.383) și (3.388) reprezintă o soluție a problemei legăturii care există între E_0 și E_i . Totuși, fără unele simplificări suplimentare, pe care le vom specifica în continuare, este încă dificil să determinăm condițiile în care E_i poate fi numită în mod rezonabil o imagine a lui E_0 .

3. 13. 2. Eliminarea factorilor de fază pătratici

Cel mai neplăcut aspect din expresia (3.388), a răspunsului la impuls, este prezența factorilor de fază pătratici,

$$\exp \left[\frac{ik}{2d_i} (x_i^2 + y_i^2) \right] \quad \text{și} \quad \exp \left[\frac{ik}{2d_0} (x_0^2 + y_0^2) \right],$$

independenți de coordonatele (x, y) din planul lentilei, ce descriu curbura fazei la nivelul planelor (x_i, y_i) , respectiv (x_0, y_0) . Pentru a elimina primul factor, observăm că, în cele mai multe cazuri de interes practic, distribuția de lumină dincolo de lentilă se cercetează cu detectoare sensibile numai la intensități (de exemplu cu filme fotografice), nu și la faze. Prin urmare, în astfel de situații, acest factor de fază nu afectează măsurătorile și, în consecință, poate fi abandonat.

Din păcate, celălalt factor de fază nu poate fi abandonat așa direct, deoarece el depinde de variabilele de integrare (x_0, y_0) din integrala de superpoziție (3.323), respectiv (3.383)*. Cu toate acestea, în multe cazuri de interes practic, și acest factor poate fi eliminat prin următoarele argumente. Dacă sistemul de format imagini se comportă într-o manieră care este apropiată de cea ideală, descrisă prin relația (3.384), amplitudinea luminoasă în punctul de coordonate (x_i, y_i) trebuie să rezulte din contribuții ce provin numai de la regiuni mici din spațiul obiect, centrate pe puncte geometrice ce reprezintă obiecte punctiforme ideale (vezi fig.3.62). Dacă în interiorul unei regiuni mici din spațiul obiect, argumentul exponențialei $\exp[ik/2d_0 \cdot (x_0^2 + y_0^2)]$ variază cu mai puțin decât o fracțiune de radian, se poate folosi aproximația $x_0 \approx x_i/M, y_0 \approx y_i/M$, adică

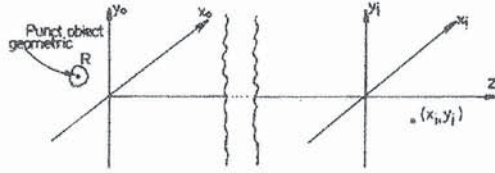


Fig.3.62. Regiunea R în care funcția h are valori semnificative, ce contribuie la amplitudinea luminoasă din punctul imagine (x_i, y_i) .

$$\exp\left[\frac{ik}{2d_0}(x_0^2 + y_0^2)\right] \approx \exp\left[\frac{ik}{2d_0} \cdot \frac{x_i^2 + y_i^2}{M^2}\right] \quad (3.389)$$

și, deoarece în acest fel, dependența de (x_0, y_0) a fost înlăturată, rezultă că și a doua exponențială poate fi abandonată, ea neafectând măsurătorile de intensitate în planul (x_i, y_i) .

Când ambele exponențiale pot fi lăsate la o parte (prin argumentele mai sus menționate), expresia (3.388) a răspunsului la impuls devine

$$h(x_i, y_i; x_0, y_0) \approx \frac{1}{\lambda^2 d_0 d_i} \iint_{-\infty}^{+\infty} P(x, y) \exp\left[\frac{ik}{2}\left(\frac{1}{d_0} + \frac{1}{d_i} - \frac{1}{f}\right)(x^2 + y^2)\right] \cdot \exp\left\{-ik\left[x\left(\frac{x_0}{d_0} + \frac{x_i}{d_i}\right) + y\left(\frac{y_0}{d_0} + \frac{y_i}{d_i}\right)\right]\right\} dx dy \quad (3.390)$$

Să ne concentrăm acum atenția asupra unui plan particular, situat după lentilă, la distanța d_i ce satisface relația

$$\frac{1}{d_0} + \frac{1}{d_i} - \frac{1}{f} = 0. \quad (3.391)$$

Această relație ne este familiară din optica geometrică, unde ea este cunoscută sub denumirea de *legea lentilelor* și precizează distanța concretă d_i , dincolo de lentilă, la care se formează, în sensul opticii geometrice, imaginea punctiformă a unui obiect punctiform situat la distanța d_0 în fața lentilei. Din acest punct de vedere, specific opticii geometrice, legea lentilelor trebuie să fie satisfăcută dacă răspunsul la impuls se comportă ca cel ideal (3.384).

* Se poate arăta că, în cazul iluminării "incoerente", sistemul de format imagini este liniar în intensitate, cu răspunsul la impuls corespunzător egal cu $|h|^2$. În astfel de cazuri ambii factori de fază pot fi abandonați *direct*.

Presupunând că legea lentilelor este satisfăcută, din relația (3.390) rezultă

$$h(x_i, y_i; x_0, y_0) \cong \frac{1}{\lambda^2 d_0 d_i} \iint_{-\infty}^{+\infty} P(x, y) \exp \left\{ -ik \left[\left(\frac{x_0}{d_0} + \frac{x_i}{d_i} \right) x + \left(\frac{y_0}{d_0} + \frac{y_i}{d_i} \right) y \right] \right\} dx dy. \quad (3.392)$$

Definind *mărirea* sistemului prin $M = d_i/d_0$ obținem forma finală, simplificată, a răspunsului la impuls

$$h(x_i, y_i; x_0, y_0) \cong \frac{1}{\lambda^2 d_i d_0} \iint_{-\infty}^{+\infty} P(x, y) \exp \left\{ -\frac{2\pi i}{\lambda d_i} \left[(x_i + Mx_0)x + (y_i + My_0)y \right] \right\} dx dy. \quad (3.393)$$

Rezultă că, dacă legea (3.391) este satisfăcută, răspunsul la impuls este o figură de difracție Fraunhofer a aperturii lentilei, centrată pe coordonatele imagine $x_i = -Mx_0$, $y_i = -My_0$. Acest fapt nu este surprinzător deoarece, prin alegerea lui d_i în conformitate cu legea (3.391), se examinează tocmai planul în care converge unda sferică ce a părăsit apertura lentilei.

3. 13. 3. Relația dintre obiect și imagine

Pentru început, să considerăm natura imaginii în conformitate cu prezicerile opticii geometrice. În acest sens, îi vom permite lungimii de undă λ să devină oricât de mică, adică să tindă spre zero, în așa fel încât efectele difracției să fie neglijabile. Cu schimbarea de variabile

$$\tilde{x} = \frac{x}{\lambda d_i}, \quad \tilde{y} = \frac{y}{\lambda d_i} \quad (3.394)$$

funcția răspunsului la impuls (3.393) devine

$$h(x_i, y_i; x_0, y_0) \cong M \iint_{-\infty}^{+\infty} P(\lambda d_i \tilde{x}, \lambda d_i \tilde{y}) \exp \left\{ -2\pi i \left[\tilde{x}(x_i + Mx_0) + \tilde{y}(y_i + My_0) \right] \right\} d\tilde{x} d\tilde{y}. \quad (3.395)$$

Când $\lambda \rightarrow 0$, intervalul de valori (\tilde{x}, \tilde{y}) în care funcția pupilară P este egală cu unitatea crește nelimitat; astfel, putând pune $P = 1$ obținem

$$\begin{aligned} h(x_i, y_i; x_0, y_0) &\rightarrow M \iint_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ -2\pi i \left[(x_i + Mx_0)\tilde{x} + (y_i + My_0)\tilde{y} \right] \right\} d\tilde{x} d\tilde{y} = \\ &= M \cdot \delta(x_i + Mx_0, y_i + My_0) = \frac{1}{M} \delta \left(x_0 + \frac{x_i}{M}, y_0 + \frac{y_i}{M} \right). \end{aligned} \quad (3.396)$$

Acum, din integrala de supoziție (3.383) rezultă

$$E_i(x_i, y_i) = \frac{1}{M} E_0 \left(-\frac{x_i}{M}, -\frac{y_i}{M} \right), \quad (3.397)$$

adică imaginea prezisă de optica geometrică este o replică exactă a obiectului, mărită și inversată în planul imagine.

Desigur, predicțiile opticii geometrice nu sunt exacte. O înțelegere mai completă a relației dintre obiect și imagine poate fi obținută numai prin includerea efectelor datorate difracției. Pentru a face aceasta, revenim la expresia (3.395) a răspunsului la impuls și, introducând notațiile

$$\tilde{x}_0 = -Mx, \quad \tilde{y}_0 = -My, \quad (3.398)$$

obținem

$$h(x_i, y_i; \tilde{x}_0, \tilde{y}_0) = M \iint_{-\infty}^{+\infty} P(\lambda d_i \tilde{x}; \lambda d_i \tilde{y}) \exp \left\{ -2\pi i \left[\tilde{x}(x_i - \tilde{x}_0) + \tilde{y}(y_i - \tilde{y}_0) \right] \right\} d\tilde{x} d\tilde{y}. \quad (3.399)$$

Se observă că acum funcția h este *invariantă-spațială*, depinzând numai de diferența coordonatelor $x_i - \tilde{x}_0$ și $y_i - \tilde{y}_0$. Cu definiția

$$\tilde{h} = \frac{1}{M} h \quad (3.400)$$

integrala de superpoziție (3.383) devine

$$E_i(x_i, y_i) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{h}(x_i - \tilde{x}_0, y_i - \tilde{y}_0) \left[\frac{1}{M} E_0 \left(-\frac{\tilde{x}_0}{M}, -\frac{\tilde{y}_0}{M} \right) \right] d\tilde{x}_0 d\tilde{y}_0, \quad (3.401)$$

în care recunoaștem *convoluția* răspunsului la impuls (modificat) \tilde{h} , cu imaginea furnizată de optica geometrică. Pentru comoditate, definim funcția

$$E_g(x_i, y_i) \equiv \frac{1}{M} E_0 \left(-\frac{x_i}{M}, -\frac{y_i}{M} \right), \quad (3.402)$$

care reprezintă *imaginea prezisă de optica geometrică* (vezi (3.397)) și, acum, relația (3.401) se scrie simplu sub forma

$$E_i(x_i, y_i) = \tilde{h}(x_i, y_i) \otimes E_g(x_i, y_i), \quad (3.403)$$

unde

$$\tilde{h}(x_i, y_i) \equiv \iint_{-\infty}^{+\infty} P(\lambda d_i \tilde{x}; \lambda d_i \tilde{y}) \exp \left[-2\pi i (x_i \tilde{x} + y_i \tilde{y}) \right] d\tilde{x} d\tilde{y}. \quad (3.404)$$

Ultimele două relații reprezintă rezultatul final al analizei noastre. Ele ne arată că, atunci când sunt luate în considerare efectele difracției, imaginea nu mai este o replică perfectă a obiectului ci o versiune "netezită" a acestuia, consecință a lărgimii nule (finite) a răspunsului la impuls \tilde{h} . Prin această operație de netezire, detaliile fine ale obiectului se pot atenua și astfel se pierde fidelitatea imaginii obținute.

Pentru intuitivitate ne putem referi la o situație analogă, întâlnită în cazul circuitelor electrice liniare. Să presupunem că la intrarea circuitului se aplică un semnal cu variație temporală rapidă și fluctuantă. Dacă sistemul are inerție mare (timp de răspuns mare în comparație cu timpul caracteristic fluctuațiilor semnalului aplicat), semnalul de la ieșire nu va fi o replică fidelă a celui de la intrare ci o versiune netezită a sa, deoarece variațiile rapide ale semnalului "in" nu se vor mai regăsi în semnalul "out".

Am insistat puțin asupra acestor aspecte deoarece ele ne arată că este necesar să trecem la o analiză frecvențială a corelației out-in, adică, în cazul nostru, a relației imagine-obiect.

§. 3. 14. Analiza frecvențială (spectrală) a sistemelor optice de format imagini

3. 14. 1. Considerente introductive. Teoria lui Abbe a microscopului

Paragraful pe care îl începem acum este o prelungire firească a celui anterior. El este consacrat sublinierii rolului analizei Fourier frecvențiale (sau spectrale) pentru studiul relației dintre imagine și obiect, atât în cazul iluminării *coerente*, cât și în cel al iluminării *necoerente (incoerente)*. Spre deosebire de paragraful precedent în care am studiat numai cazul iluminării monocromatice, de data aceasta vom aborda și situația mai realistă a obținerii imaginii în lumină cvasimonocromatică, atât spațial-coerentă cât și spațial-necoerentă. Mai mult, vom lărgi cadrul analizei de la o singură lentilă la un sistem de lentile.

Să presupunem că sistemul de format imagini este compus din mai multe lentile, unele convergente, altele divergente, nu neapărat subțiri, și că, în ultimă instanță, el produce o imagine *reală*. Această presupunere nu reprezintă, cum s-ar putea crede, o restricție pentru modelul de sistem adoptat aici căci, dacă imaginea produsă este virtuală, ea poate fi convertită într-o imagine reală cu ajutorul lentilei ochiului (cristalinului); evident, în această situație, elementul final al sistemului optic va fi lentila ochiului.

Pentru ca abordarea să fie cât mai generală, vom considera sistemul ca o "*cutie neagră*", adică nu vom face referiri la structura sa internă. Vom admite doar că sunt cunoscute *proprietățile terminale* ale cutiei, anume *pupila de intrare* și *pupila de ieșire*, adică niște aperturi finite, reale sau virtuale, prin care lumina ce vine de la obiect pătrunde în "cutie", respectiv lumina care iese din "cutie" se deplasează spre planul imagine (vezi fig. 3.63). De asemenea, se va considera că propagarea luminii între pupila de intrare și cea de ieșire poate fi descrisă suficient de bine de legile opticii geometrice. De aceea, extinderea finită a celor două pupile se poate afla geometric, proiectând cea mai mică apertură a sistemului (cutiei negre), prin raze luminoase, pe planele de intrare, respectiv de ieșire în/din sistem. Evident, pupila de ieșire este imaginea pupilei de intrare formată de întregul sistem.

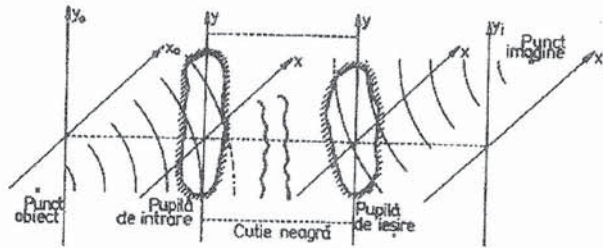


Fig.3.63. Model generalizat pentru un sistem de format imagini (se indică pupilele de intrare și de ieșire).

În sfârșit, vom mai face presupunerea că sistemul de format imagini este *limitat difracțional (diffraction limited)*^{*}, adică el posedă proprietatea terminală de a transforma o undă sferică divergentă la nivelul pupilei de intrare într-o undă sferică convergentă la nivelul pupilei de ieșire. Pentru orice sistem real de format imagini, în cel mai bun caz, această proprietate este satisfăcută numai pentru o regiune finită, relativ mică, a planului obiect.

* În optica geometrică se spune că sistemul este *stigmatic (local, transversal sau longitudinal)*.

Când obiectul ce ne interesează este plasat în această regiune, sistemul optic poate fi considerat limitat difracțional.

Dacă unui punct obiect (undă sferică divergentă la nivelul pupilei de intrare) îi corespunde o undă emergentă din pupila de ieșire cu front de undă ce diferă semnificativ de frontul ideal, sferic, se spune că sistemul prezintă *aberații*. În acest paragraf, ceva mai târziu, vom avea posibilitatea să vedem că, sistemele ce prezintă aberații, produc *defecte* în structura de frecvențe spațiale a răspunsului dat excitațiilor de intrare.

Considerând că sistemul este lipsit de aberații, să trecem acum la analiza efectelor produse de difracție. Având încredere că optica geometrică descrie adecvat trecerea luminii prin sistem, de la nivelul pupilei de intrare la nivelul pupilei de ieșire, efectele de difracție joacă un rol semnificativ numai pe celelalte două porțiuni, adică între planul obiect și pupila de intrare, respectiv între pupila de ieșire și planul imaginii. De fapt, nu este necesar să luăm în discuție ambele porțiuni în care se manifestă efectele de difracție; este suficient să analizăm fie numai prima porțiune, fie numai cea de-a doua, deoarece, așa cum am menționat mai sus, cele două pupile sunt una imaginea geometrică a celeilalte.

Din punct de vedere istoric, efectele de difracție determinate de *caracterul spațial-finit al pupilelor de intrare* au fost evidențiate pentru prima dată de fizicianul german Ernst Abbe în anul 1873. Referindu-se concret la microscop, el a atras atenția că o pupilă de intrare finită interceptează numai o anumită porțiune din ansamblul componentelor difracției produse de obiect (când acesta este mai complicat); acele componente neinterceptate de apertură sunt, cu siguranță, generate de porțiunile de înaltă frecvență spațială ale obiectului. Pentru cazul unui obiect sub formă de rețea plană și a unui sistem compus dintr-o singură lentilă convergentă, punctul de vedere exprimat de Abbe este reprezentat în fig.3.64.a. Se observă că numai o parte din lumina difractată de rețea poate fi captată de lentilă, adică o parte din informația obiect este pierdută și nu poate contribui la formarea imaginii.

Mai departe, Abbe a considerat că formarea imaginii *în lumină coerentă* (toate punctele rețelei obiect plane sunt atinse *simultan* de frontul unei incidente) se produce în două etape: prima etapă este cea a formării imaginii de difracție în planul focal al obiectivului iar cea de-a doua este formarea imaginii finale ca și când lumina ar fi emisă de "sursele" - maximele de difracție - din planul focal ($S_0, S'_1, S''_1, S'_2, S''_2, \dots$). Să analizăm pe rând ce se întâmplă în fiecare etapă.

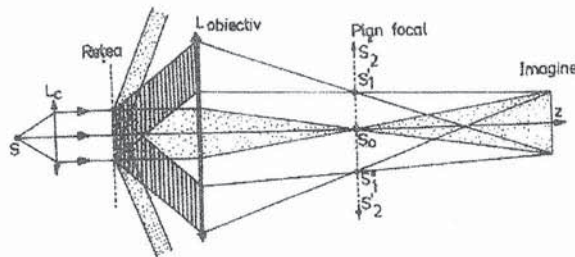


Fig.3.64. a) Formarea imaginii în microscop, conform teoriei lui Abbe (obiect sub formă de rețea; iluminare coerentă; pupilă de intrare finită).

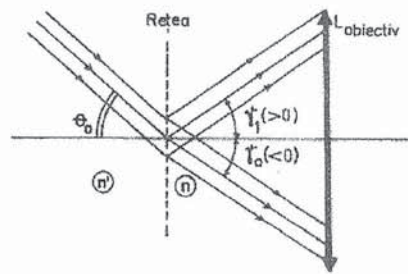


Fig.3.64. b) Cazul incidenței oblice în rețeaua obiect.

Fie $d = a + b$ constanta rețelei de difracție utilizate ca obiect, unde a reprezintă lățimea unei fante transparente iar b este lățimea unei zone opace (zgâriate de diamant).

Maximele principale de difracție din planul focal ($S_0, S'_1, S''_1, S'_2, S''_2, \dots$) se formează în direcții γ_k ce îndeplinesc condiția $d \sin \gamma_k = k\lambda$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; unghiurile γ_k se măsoară față de sensul pozitiv al axei Oz - axa de simetrie a instalației. Imaginea S_0 corespunde lui $k = 0$ și este o bandă luminoasă centrală, imaginile S'_1 și S''_1 corespund lui $k = \pm 1$ și reprezintă două benzi luminoase simetrice față de S_0 , etc. În a doua etapă unde luminoase emise de banda centrală S_0 și de toate celelalte benzi laterale ($S'_1, S''_1, S'_2, S''_2, \dots$) interferă în planul imagine-finală determinând imaginea rețelei-obiect.

Cât de fidelă este imaginea finală față de rețeaua-obiect? În primul rând, ea nu este totalmente fidelă din cauza caracterului finit al pupilei de intrare, respectiv din cauza informației luminoase ce nu intră în sistem. În al doilea rând, imaginea finală are forme diferite în funcție de numărul "surselor" S_k din planul focal ce contribuie la formarea sa. Dacă, de exemplu, avem posibilitatea să obțurăm cu o diafragmă plasată în planul focal toate sursele S'_k și S''_k cu $k = 1, 2, 3, \dots$, lăsând să treacă mai departe numai lumina "emisă" de S_0 , planul imagine va fi iluminat uniform și nu se va observa nici-o imagine a rețelei. Dacă diafragma utilizată obturează toate sursele S'_k și S''_k cu $k = 2, 3, 4, \dots$, lăsând să treacă mai departe numai lumina "emisă" de sursele S_0, S'_1 și S''_1 , de intensități ușor diferite însă cu aceeași fază, în urma interferenței se obține o imagine cu distribuția de intensitate ca în fig. 3.65 a) (curba punctată din figură se referă la imaginea geometrică a rețelei). Prin urmare, în loc să avem o reprezentare netă a fantelor transparente ale rețelei, obținem o imagine cu margini alterate dar de aceeași perioadă ca și la imaginea geometrică a rețelei obiect. Dacă diafragma transmite lumina de la S_0, S'_1, S''_1, S'_2 și S''_2 , obturând celelalte "surse", în planul imagine se obține distribuția de intensitate din fig. 3.65 b) mult mai apropiată de imaginea geometrică a rețelei. În sfârșit, în fig. 3.65 c) este redată distribuția de intensitate luminoasă în planul imagine în cazul în care diafragma obturează

numai S'_k și S''_k cu $k = 4, 5, 6, \dots$. Rezultă că, cu cât este mai mare numărul "surselor coerente" ce contribuie la formarea imaginii finale cu atât aceasta este o replică mai perfectă a rețelei obiect. Diferitele imagini de interferență reprezentate în fig. 3.65 a, b, c reproduc periodicitatea spațială a rețelei obiect. La limită, curba punctată din aceste figuri s-ar obține dacă ar putea contribui la formarea imaginii toate ordinele de difracție, adică dacă apertura numerică a pupilei de intrare ar fi infinit de mare.

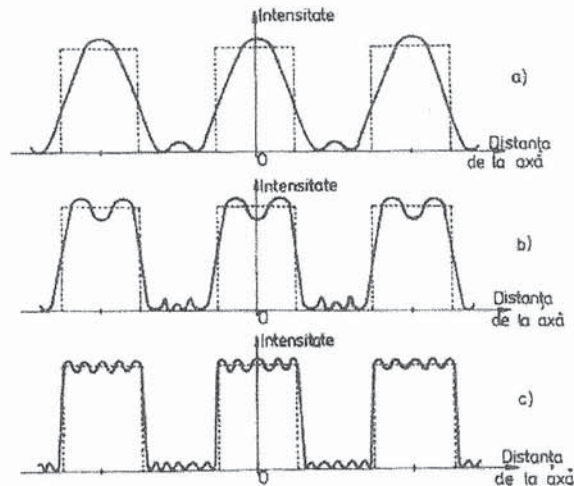


Fig. 3.65. Imaginea obiectului sub formă de rețea: a) contribuie la formarea imaginii numai S_0, S'_1 și S''_1 ; b) contribuie la formarea imaginii numai S_0, S'_1, S'_2, S''_1 și S''_2 ; c) sursele S'_k și S''_k cu $k \geq 4$ sunt obturate.

Pe baza analizei efectuate până aici, să trecem la determinarea puterii de rezoluție a microscopului, presupunând că lumina utilizată este strict monocromatică, cu lungimea de undă λ . După cum am mai spus, diferitele franje (maxime principale) de difracție, S_0, S'_k, S''_k cu $k = 1, 2, 3, \dots$, din planul focal, sunt generate de fasciculele difractate ce satisfac relația $d \sin \gamma_k = \pm k\lambda$, d fiind constanta rețelei. Dacă în spațiul rețea-obiectiv avem un mediu (de imersie) cu indicele de refracție n , în loc de λ trebuie să considerăm λ/n (lungimea de undă în mediu) și relația maximelor principale de difracție devine $d \cdot n \sin \gamma_k = \pm k\lambda$. Fie $A = n \sin u$ *apertura numerică* (vezi secțiunea 1.2.5., punctul C) a lentilei ce captează fasciculele difractate de rețea. Evident, vor fi captate efectiv numai fasciculele difractate pentru care $|n \sin \gamma_k| \equiv k\lambda/d \leq A = n \sin u$ (aici luăm în considerare numai fasciculele de deasupra axei sistemului; cele deviate sub axa de simetrie sunt simetricile primelor). Rezultă cu necesitate $k \leq dA/\lambda$. Valoarea $dA/\lambda \equiv k_{\max}$ este ordinul de difracție maxim interceptat de lentilă. Informația fizică din maximele de difracție cu $k > k_{\max}$ este pierdută și nu are cum să contribuie la formarea imaginii în microscop. Prin urmare, cu cât crește *apertura numerică* A cu atât crește numărul fasciculelor difractate interceptate și se îmbunătățește calitatea imaginii.

Când $k_{\max} \leq 1$, condiția $k < k_{\max} \leq 1$ poate fi îndeplinită numai de $k = 0$, adică în planul focal se formează numai "imaginea" S_0 . Aceasta determină mai departe o iluminare uniformă a planului imagine și nu se observă nici-un detaliu al obiectului.

Dacă parametrul k_{\max} este cuprins între 1 și 2, adică $1 < k_{\max} < 2$, pe lângă "imaginea" S_0 , în planul focal sunt prezente și "imaginile" S'_1 și S''_1 . Sursele S_0, S'_1 și S''_1 fiind coerente, se produce o interferență triplă a undelor ce pleacă de la ele mai departe și, în planul imagine, se obține distribuția de intensitate din fig.3.65 a (între două maxime principale vecine există două minime nule și un maxim secundar slab). Deja acum *detaliile obiectului se pot considera rezolvate* căci se pot sesiza, în planul imagine, zonele transparente și cele opace ale rețelei de difracție. Din condiția de existență a cel puțin trei surse coerente (S_0, S'_1 și S''_1), $k_{\max} \geq 1$ (care asigură rezolvarea trăsăturilor rețelei în figura de interferență), obținem $dA/\lambda \geq 1$ sau $d \geq \lambda/A = \lambda/(n \sin u)$.

Să trecem acum la cazul mai general, în care incidența pe rețea, în fasciculul paralel, este oblică - sub un unghi θ_0 față de normală (vezi fig.3.64 b). Fie n' indicele de refracție al mediului din fața rețelei (de regulă aer) și n - dintre rețea și lentila obiectiv (de regulă un lichid de imersie). Acum, condiția maximelor principale de difracție de ordinul k are forma $d(n \sin \gamma_k - n' \sin \theta_0) = k\lambda$. În particular, pentru $k = 0$ obținem $n' \sin \theta_0 = n \sin \gamma_0$, adică legea Snell-Descartes, a refracției. Pentru $k = 1$ avem $d(n \sin \gamma_1 - n' \sin \theta_0) = \lambda$ sau $d(n \sin \gamma_1 - n \sin \gamma_0) = dn(\sin \gamma_1 - \sin \gamma_0) = \lambda$. Ținând cont de legea refracției, pentru un k arbitrar obținem $dn(\sin \gamma_k - \sin \gamma_0) = k\lambda$.

Condiția de rezoluție a lui Abbe cere ca maximum de ordinul zero și cel de ordinul întâi să *între în obiectiv*, adică $|\gamma_0| + |\gamma_1| \leq 2u$. În situația limită, când maximum de ordinul zero este dirijat spre extremitatea inferioară a lentilei iar cel de ordinul întâi spre extremitatea superioară (diametral opusă) a lentilei - vezi fig.3.64 b - avem $\gamma_0 = -\gamma_1$ și obținem $2dn \sin \gamma_1 = \lambda$. Condiția de rezoluție a lui Abbe devine $\gamma_1 \leq u$ și rezultă $\sin \gamma_1 = \lambda/(2dn) \leq \sin u$ sau

$$d \geq \frac{\lambda}{2n \sin u} = \frac{\lambda}{2A} = \frac{0,5\lambda}{A} \equiv y_c. \quad (3.405)$$

Rețelele de difracție cu $d < y_c$ nu pot fi rezolvate (observate) de (în) microscop deoarece pupila de intrare a obiectivului său nu asigură pătrunderea fasciculelor care ar forma sursele S'_k și S''_k cu $k \geq 1$; altfel spus, apertura numerică A este atât de mică, încât în planul focal se formează numai "sursa" S_0 - care determină o iluminare uniformă a planului imagine.

Comparând acest ultim rezultat cu cel obținut prin cerința ca discurile Airy-imaginile de difracție Fraunhofer a două puncte obiect *independente* situate la distanța y - să nu se întrepătrundă mai mult de jumătate (criteriul lui Rayleigh), $y \geq 0,61\lambda/A = 0,61\lambda/(n \sin u)$, ajungem la concluzia că ele concordă numai ca ordin de mărime. Având în vedere că în ultimul caz sursele punctiforme erau *independente*, distanța $y_{nc} = 0,61\lambda/A$ se numește *limită inferioară de rezoluție în lumină necoerentă* iar distanța $y_c = 0,50\lambda/A$ - *limită inferioară de rezoluție în lumină coerentă*.

Raționamentul lui Abbe, schițat mai sus, este extrem de important pentru înțelegerea progreselor opticii din ultimele trei decenii. El ne arată că prin obturarea în diverse moduri a unor surse (spectre) din planul focal, putem influența în mod convenabil asupra distribuției de intensitate luminoasă din planul imaginii, adică asupra imaginii înseși. În limbajul opticii actuale, distribuția obținută în planul focal al lentilei se numește *spectru al frecvențelor spațiale*. Ea reprezintă o replică, limitată de caracterul finit al pupilei de intrare, a distribuției luminoase obiect. Obturarea unor frecvențe spațiale și transmiterea mai departe, spre planul imagine, a altora se numește *filtrare spațială*. Această operație, care, din punct de vedere practic, s-a dezvoltat în mod vertiginos după apariția *holografiei*, este fundamentală pentru întregul domeniu al prelucrării optice a informației. Vom reveni cu detalii, teoretice și practice, în paragrafele următoare.

Abordarea analizei frecvențiale a sistemelor de tip "cutie neagră" adică a cazului general, o amânăm pentru mai târziu (secțiunea 3.14.3).

3. 14. 2. Teoria (metoda) lui Rayleigh referitoare la difracția pe rețele

De problema difracției luminii coerente pe rețele precum și de problema formării imaginii în microscop a fost asiduu preocupat și lordul Rayleigh, care în perioada 1874-1903, a publicat mai multe articole referitoare la aceste chestiuni. În cele ce urmează, vom reproduce esența unei lucrări din anul 1896 și a unor consecințe ce decurg din ea, în care problema difracției pe rețele este tratată matematic ca o problemă la limită. Ea este importantă pentru originalitatea metodei elaborate, pentru generalitatea ei, precum și pentru utilizarea efectivă a dezvoltărilor Fourier.

Să considerăm o rețea de difracție plană, infinită, cu constanta $d = a + b$, b fiind lățimea unei fâșii opace iar a - lățimea unei zone transparente. Pentru simplitate, vom presupune că rețeaua de difracție este foarte subțire. Fie xOy planul rețelei și Oz o axă perpendiculară pe acest plan cu sensul pozitiv ales în sensul propagării luminii (de la stânga spre dreapta, ca în fig.3.66).

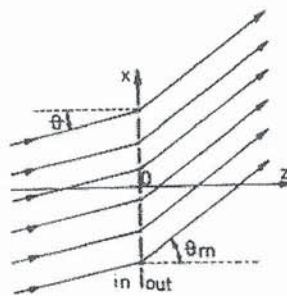


Fig.3.66. Rețea de difracție la incidență oblică, în fascicul paralel.

Alegem axa Ox în așa fel încât ea să fie perpendiculară pe trăsăturile rețelei; atunci, evident, axa Oy este paralelă cu trăsăturile rețelei, cu sensul de la foaie spre cititor.

O undă incidentă plană, monocromatică, cu unghiul de incidență θ cade pe rețea. Câmpul său poate fi scris sub forma

$$E_0 = A \exp \left[i(\vec{k}\vec{r} - \omega t) \right]. \quad (3.406)$$

Luat la nivelul $z=0$, în stânga rețelei, el se numește *câmp de intrare* (E_{in}). Deoarece ecuațiile ce descriu propagarea undelor electromagnetice sunt *liniare*, *câmpul total la ieșire* (E_{out}), la nivelul $z=0$, în dreapta rețelei, rezultat prin superpoziția undei transmise cu cea difractată, se poate scrie sub forma

$$E_{out} = SE_{in}, \quad (3.407)$$

în care, factorul S , dependent în general de lungimea de undă, se numește *transparența rețelei* și este o caracteristică intrinsecă a rețelei. În general, ea este o funcție de forma $S = S(x, y)$ dar, în cazul analizat de noi, problema fiind unidimensională, avem $S = S(x)$.

Problema difracției se reduce la cea a determinării transparenței ce produce fenomenul. Într-adevăr, după cunoașterea lui S , formula (3.407) permite aflarea lui E_{out} și, apoi, cu ajutorul principiului Huygens-Fresnel, se poate determina câmpul undei difractate.

Lordul Rayleigh a arătat că pentru aflarea soluției se poate proceda și altfel, utilizarea principiului Huygens-Fresnel nefiind necesară. El afirmă că este necesar doar să fie rezolvată ecuația lui Helmholtz, $\Delta E + k^2 E = 0$, a cărei soluție, în planul $z=0$, trebuie adusă la forma $E_{out}(x, y) = S(x, y)E_{in}(x, y)$ și, în plus, trebuie să verifice anumite condiții suplimentare dependente de particularitățile fizice ale problemei. Această *metodă* nu este altceva decât un caz particular al unei metode generale din fizica-matematică, de rezolvare a ecuațiilor diferențiale cu condiții la limită. Ea este cunoscută sub denumirea de *metoda lui Rayleigh*. În cele ce urmează, metoda va fi dezvoltată efectiv pentru problema unidimensională enunțată mai sus, a difracției pe o rețea plană.

Având în vedere periodicitatea rețelei, mărirea $S(x)$ poate fi dezvoltată în serie Fourier sub forma (vezi relația (3.3))

$$S = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} S_m e^{impx} \quad \text{cu } p = \frac{2\pi}{d} \quad (3.408)$$

și astfel relația (3.407) devine

$$E_{out} = SE_{in} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} AS_m \exp \{ i[x(k_x + mp) - \omega t] \}. \quad (3.409)$$

Această relație poate fi considerată ca o expresie a *condițiilor la limită* ce trebuie să fie verificate la $z=0$, în dreapta rețelei, de orice soluție fizică a ecuației lui Helmholtz. O soluție particulară a acestei ecuații este unda plană de forma $E = B \exp [i \cdot (\vec{q}\vec{r} - \omega t)]$, în care vectorul \vec{q} trebuie să satisfacă egalitatea $\vec{q}^2 = k^2$. Vectorul de undă poate fi real (cazul undei omogene) sau complex (cazul undei neomogene sau evanescente). Prin superpoziția soluțiilor particulare de acest tip se poate afla soluția generală

$$E = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} B_m \exp [i(\vec{q}_m \vec{r} - \omega t)]. \quad (3.410)$$

Ținând cont de condițiile la limită (3.409) putem scrie

$$q_{mx} = k_x + mp, \quad q_{my} = 0. \quad (3.411)$$

Din relația $q_{mx}^2 + q_{my}^2 + q_{mz}^2 = k^2$ rezultă apoi cu necesitate

$$q_{mz} = \sqrt{k^2 - q_{mx}^2}, \quad (3.412)$$

cu valori reale sau pur imaginare.

Pentru a reține o singură rădăcină, respectiv pentru a obține un rezultat univoc, trebuie să apelăm acum la considerente fizice. Valorilor q_{mz} reale le corespund unde omogene care nu pot decât *să se îndepărteze de la rețea*; propagarea lor în sens invers (spre stânga) fiind exclusă, nu pot corespunde fizic decât valorile q_{mz} pozitive. Valorilor q_{mz} imaginare le corespund unde neomogene care nu pot decât *să se amortizeze* în timpul îndepărtării de la rețea. Prin urmare, coeficientul părții imaginare trebuie să fie strict pozitiv. Considerând că radicalul din relația (3.412) are semnificație *aritmetică*, avem următoarele variante

$$q_{mz} = +\sqrt{k^2 - q_{mx}^2} \quad \text{și} \quad q_{mz} = +i\sqrt{q_{mx}^2 - k^2}. \quad (3.413)$$

Acum vectorii \vec{q}_m sunt definiți în mod *univoc* și putem exprima câmpul E_{out} (la nivelul $z = 0$) sub forma următoare

$$E_{out} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} B_m \exp[i(q_{mx}x - \omega t)]. \quad (3.410')$$

Comparând această expresie cu relația (3.409) putem face identificarea

$$B_m = AS_m \quad \text{adică} \quad S_m = \frac{B_m}{A} \quad (3.414)$$

și cu aceasta problema este practic rezolvată. Scriind

$$k_x = \frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta, \quad q_{mx} = \frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta_m,$$

din ecuația (3.411) obținem bine-cunoscuta relație a rețelei de difracție

$$d(\sin \theta_m - \sin \theta) = m\lambda, \quad m \text{ întreg.} \quad (3.415)$$

Soluția astfel obținută conține în sine și alte rezultate noi. În primul rând, dincolo de rețea, spectrul este compus *numai* din *maxime principale* (nu există maxime secundare). Acest rezultat se explică prin aceea că noi am considerat aici *o rețea nelimitată (infinită)*. În al doilea rând, câmpul (3.410) conține atât unde omogene cât și unde neomogene și de aceea relația (3.410) definește câmpul de unde la *orice* distanță față de rețea, nu numai în zona undelor, ca formula dedusă în capitolul anterior. În cazul incidenței normale ($\theta = 0$) cel mai mare ordin m pentru undele omogene este dat de $m = d/\lambda$. Dacă $m > d/\lambda$, componenta q_{mz} este imaginară și unda neomogenă corespunzătoare se amortizează exponențial după legea $\exp(-z \chi_m)$ unde $\chi_m = \sqrt{q_{mx}^2 - k^2} = (2\pi/d) \cdot \sqrt{m^2 - (d/\lambda)^2}$. La distanța $z = \chi_m^{-1}$, amplitudinea undei a scăzut de e ori iar pătratul său de e^2 ori. Cum cea mai mare distanță caracteristică este de ordinul lui d , dacă $z \ll d$, câmpul dincolo de rețea nu va mai conține decât unde omogene.

În cazul particular $d < \lambda$, pentru o incidență normală ($\theta = 0$) câmpul la distanță mare de rețea nu conține decât o undă plană de ordinul zero ($m = 0$) fără nici-un maxim lateral. Studiul unei transmise (sau reflectate - dacă este vorba de o rețea ce funcționează prin reflexie) la distanțe $z \gg \lambda d / (2\pi \sqrt{\lambda^2 - d^2})$ sau, practic, la distanțe $z \gg \lambda$, nu ne furnizează nici-o informație cu privire la structura rețelei. Astfel, observând rețeaua la microscop, nu putem decela nici-o trăsătură. La fel, pentru aceleași motive, nu putem observa devierile luminii la trecerea printr-un mediu transparent (un cristal, de exemplu), deși el este construit din atomi și molecule discrete și se comportă ca o rețea de difracție. Când totuși astfel de devieri se observă, ele sunt determinate de neomogenitățile mediului și de fluctuațiile termice. Din punctul de vedere al proprietăților lor *optice*, cristalele se comportă ca medii omogene continue, deoarece perioada structurii atomice, ionice sau moleculare este mult prea mică față de lungimile de undă. Când această condiție nu mai este îndeplinită (vezi cazul razelor X), încep să apară maximele de difracție (ca, de exemplu, în metoda Laue).

În imediata apropiere a rețelei, câmpul de unde are o formă foarte complicată. La distanțe $z \gg \chi_m^{-1}$, acest câmp nu mai comportă nici-o undă neomogenă, și devine mai simplu; el rămâne totuși destul de complicat din cauza "suprapunerii" undelor omogene ce îl compun. Îndepărtându-ne de rețea, există o distanță minimă, începând de la care undele plane de diferite ordine se separă spațial. La distanțe relativ mici față de rețea, undelor spațial distincte li se pot aplica legile opticii geometrice. Direcțiile maximelor principale de difracție sunt acelea în lungul cărora undele ieșite din diferitele fante ale rețelei se întăresc reciproc prin interferență constructivă (în focarul unei lentile sau, fără aceasta, la infinit).

Din relația (3.414) rezultă o consecință importantă. Dacă în dezvoltarea în serie Fourier a transparenței S a rețelei lipsește un termen oarecare, maximul principal al ordinului corespunzător va lipsi și el din câmpul de unde de dincolo de rețea. Pentru exemplificare considerăm cazul unei rețele sinusoidale (*rețea Rayleigh*) pentru care transparența are forma (numai trei termeni)

$$S(x) = \alpha + \beta \cos px = \alpha + \frac{\beta}{2}(e^{ipx} + e^{-ipx}), \quad (3.416)$$

α , β , și p fiind constante. Dincolo de rețea, câmpul de unde se compune numai din trei unde plane omogene: o undă nedeviată (maxim de ordinul zero) de amplitudine $B_0 = \alpha A$ și două unde (maxime laterale), de amplitudini $B_1 = B_{-1} = (1/2)\beta A$. Nu mai există nici-un alt maxim principal.

Un corp cu suprafața ondulată sinusoidal (vezi și Cap. II), cu o amplitudine de ondulație mică față de lungimea de undă, se comportă, atât la reflexie, cât și la refracție, ca o rețea de tip Rayleigh. Acest lucru a putut fi pus în evidență experimental de către Wood, care a reușit să realizeze practic rețele ondulate sinusoidal prin atacarea sticlei cu soluție diluată de acid fluorhidric (atac de scurtă durată, de aproximativ 10 secunde).

Trecem acum să analizăm din punct de vedere matematic ce se întâmplă atunci când "*pupila de ieșire*" a rețelei de difracție *este finită*. Orice rețea reală are gabarit finit, adică transparența sa este periodică (exact ca și până acum) în interiorul unui anumit domeniu spațial și se anulează în exteriorul acestuia. Rămânând în cadrul tratării unidimensionale, transparența $S(x)$ se poate scrie ca o integrală Fourier sub forma

$$S(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} C(f) e^{ifx} df, \quad (3.417)$$

unde f este *pulsăția spațială*. Presupunând câmpul E_{in} de aceeași formă ca în cazul tratat anterior, pentru câmpul E_{out} avem

$$E_{out} = \frac{A}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} C(f) e^{i[x(f+k_x) - \omega t]} df. \quad (3.418)$$

Soluția ecuației Helmholtz, care satisface toate condițiile problemei, este de forma

$$E = \frac{A}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} C(f) e^{i(\vec{q} \cdot \vec{r} - \omega t)} df, \quad (3.419)$$

unde $q_x = k_x + f$, $q_y = 0$ iar q_z este dat de formula (3.412). Dacă transparența este definită prin expresia

$$S(x) = \begin{cases} 0, & \text{pentru } -\infty < x < -L, \\ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} S_m e^{imp_x}, & \text{pentru } -L < x < +L, \\ 0, & \text{pentru } +L < x < +\infty, \end{cases} \quad (3.420)$$

transformata sa Fourier $C(f)$ se calculează fără nici-un fel de dificultate obținând

$$C(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(x) e^{-ifx} dx = 2 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} S_m \frac{\sin[L(mp - f)]}{mp - f} = 2L \sum_{m=-\infty}^{+\infty} S_m \text{sinc}[L(mp - f)]. \quad (3.421)$$

Câmpul de unde dincolo de rețea este de forma

$$E = \sum_m E_m$$

unde

$$\begin{aligned} E_m &= \frac{LA}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_m \text{sinc}[L(mp - f)] \cdot e^{i(\vec{q} \cdot \vec{r} - \omega t)} df = \\ &= \frac{NA d}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_m \text{sinc}\left[\frac{Nd}{2}(mp - f)\right] \cdot e^{i(\vec{q} \cdot \vec{r} - \omega t)} df, \quad N = 2L/d. \end{aligned} \quad (3.422)$$

Ca și în cazul rețelei infinite, câmpul din spatele rețelei este compus din unde de diferite ordine m . Însă, unda E_m nu se reduce la o singură undă plană, având o direcție determinată; ea rezultă acum prin suprapunerea unei *mulțimi continue* de unde plane cu direcții diferite, suprapunerea fiind ponderată de factorul sinus cardinal.

Amplitudinea, respectiv intensitatea luminoasă, sunt maxime când argumentul sinusului cardinal este egal cu zero, adică pentru $f = mp = 2\pi m/d$; rezultă $q_x = k_x + mp = k_x + 2\pi m/d$. Ultima relație determină *direcția maximului principal de ordinul m* , obținând din nou rezultatul (3.415). În această situație sinusul cardinal este egal cu 1 și $E_m \sim N$, respectiv intensitatea luminoasă este proporțională cu N^2 . Când numărătorul sinusului cardinal este egal cu zero iar numitorul său este diferit de zero, intensitatea undei este egală cu zero. Aceasta se întâmplă pentru $(Nd/2)(mp - f) = m'\pi$, $m' = 1, 2, \dots$ și în

direcțiile corespunzătoare avem *minime* de difracție. Numărul minimelor cuprinse între două maxime principale vecine este egal cu $N - 1$. Între două minime nule succesive se află maximele secundare foarte puțin intese. Am obținut astfel, prin metoda lui Rayleigh, toate rezultatele cunoscute, referitoare la difracția pe rețeaua plană.

Deoarece sinusul cardinal din formula (3.422) scade destul de repede (în valoare absolută) la creșterea argumentului său, rezultă că ponderea frecvențelor (pulsaiilor) spațiale mari este din ce în ce mai mică în figura de difracție.

În încheierea acestei secțiuni, să trecem la aplicarea metodei lui Rayleigh pentru câteva cazuri concrete, presupunând că perioada d a rețelelor este mult mai mare decât lungimea de undă λ ; aceasta înseamnă că *transparența* $S(x)$ a acestor rețele *poate fi calculată în aproximația opticii geometrice* (căci raportul λ/d este foarte mic, aproape nul).

1. Rețeaua plană de amplitudine, cu constanta $d = a + b$, unde a este lățimea unei fante iar b - lățimea unei zone opace, are *transparența* $S(x) = 1$ în interiorul unei fante și $S(x) = 0$ în intervalul dintre fante. Coeficienții Fourier S_m au forma (vezi (3.4))

$$S_m = \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{+d/2} S(x) e^{-impx} dx = \frac{1}{d} \int_{-a/2}^{+a/2} e^{-impx} dx = \frac{a}{d} \operatorname{sinc}\left(m\pi \frac{a}{2}\right), \quad (3.423)$$

unde $p = 2\pi/d$ este pulsația spațială fundamentală, căreia îi corespunde frecvența spațială fundamentală $v_x = 1/d$. În principiu, pentru a calcula intensitatea fascicului difractat, ar trebui să ținem cont de variația secțiunii sale în funcție de înclinarea față de planul rețelei. În cazul de față nu este însă necesar acest lucru deoarece, în aproximația opticii geometrice pe care am utilizat-o, rezultatul (3.423) este valabil numai pentru unghiuri de difracție mici ($\cos\theta_m \approx 1$), la care variația secțiunii fascicului este nesemnificativă. Prin urmare, în această aproximație, intensitatea relativă a fascicului difractat, de ordinul m , este $I_m = S_m^2$ (intensitatea fascicului incident, normal pe rețea, a fost luată egală cu unitatea). Pentru spectrul de ordinul zero avem $S_0 = a/d$ și $I_0 = (a/d)^2$. În general, putem scrie

$$I_m = I_0 \operatorname{sinc}^2\left(m\pi \frac{a}{2}\right) = I_0 \operatorname{sinc}^2\left(m\pi \frac{a}{d}\right). \quad (3.424)$$

În teoria seriilor Fourier se demonstrează următoarea relație generală

$$\frac{a}{d} = \left(\frac{a}{d}\right)^2 + \frac{2}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \sin^2\left(m\pi \frac{a}{d}\right). \quad (3.425)$$

Aplicată problemei noastre, în care a/d este intensitatea luminoasă transmisă de rețea și $(a/d)^2 = I_0$, obținem

$$\frac{2}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \sin^2\left(m\pi \frac{a}{d}\right) = I_{\text{trans}} - I_0 = I_{\text{difr.}}^{(m \neq 0)}, \quad (3.426)$$

unde $I_{\text{difr.}}^{(m \neq 0)}$ este intensitatea difractată în toate celelalte maxime, cu excepția maximului de ordinul zero. Mărimea

$$\frac{I_{\text{difr.}}^{(m \neq 0)}}{I_{\text{trans.}}} = 1 - \frac{I_0}{I_{\text{trans.}}} = 1 - \frac{a}{d} \quad (\leq 1) \quad (3.427)$$

ne dă fracțiunea din lumina transmisă difractată în toate ordinele $m \neq 0$. Ea tinde spre valoarea maximă 1, când $a/d \rightarrow 0$, însă, în acest caz și $I_{\text{trans.}} \rightarrow 0$. Revenind la expresia (3.424) a intensității unui maxim oarecare observăm că pentru $a/d \rightarrow 0$ am avea $I_m \rightarrow I_0$. Să nu uităm însă că în această limită $I_{\text{trans.}} \rightarrow 0$.

Când argumentul $m\pi(a/d) = n\pi$, adică $a/d = n/m$, în care n este un număr întreg mai mic decât m , numerele n și m fiind prime între ele, intensitățile spectrelor de ordinul m , $2m$, $3m$, ... devin nule. De exemplu, pentru $a/d = 1/2$, toate spectrele de ordin m par vor fi eliminate ($I_m = 0$) - vezi și Cap. II, secțiunea 2. 8. 3.

2. Să considerăm acum o situație mai generală, când la rețeaua analizată, pe distanța a transparența este α iar pe distanța b transparența este β (vezi fig.3.67). În general, la o rețea amplitudino-fazică constantele α și β sunt complexe. Când α și β sunt numere reale, rețeaua este "de amplitudine" iar când ele au forma $e^{i\rho}$ (ρ - reale), rețeaua este "de fază". Rețeaua mixtă, amplitudino-fazică, este echivalentă cu superpoziția unei lame cu fețe plan-paralele de transparență β cu o rețea de difracție cu transparența variabilă între 0 și $\alpha - \beta$. Transparența unei astfel de rețele este egală cu $(\alpha - \beta)$ pe distanța a și este nulă pe distanța b (ca și cum originea s-ar muta în O'). Evident, permutând mărimile α și β , respectiv a și b , obținem un sistem echivalent, care nu se distinge de primul decât prin notații. De aceea, ne vom referi numai la primul exemplu, scriind $S(x) = S_{\text{lame}}(x) + S_{\text{rețea}}(x)$.

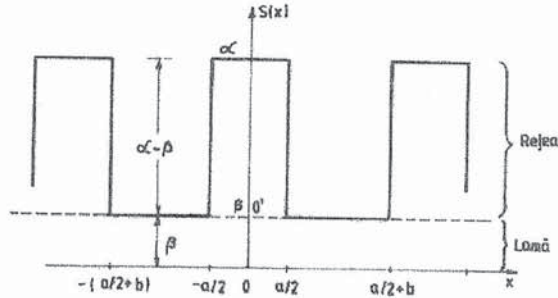


Fig.3.67. Rețea cu transparență cuprinsă între β și α .

Calculul coeficienților Fourier S_m se face ca la punctul 1. Pentru lama cu fețe plan paralele toți coeficienții Fourier sunt nuli, cu excepția celui de ordinul zero care are valoarea β . De aceea, plasând originea coordonatei x în centrul unei fante de lățime a (ca și în expresia (3.423)) obținem

$$S_m = (\alpha - \beta) \frac{a}{d} \text{sinc}\left(m\pi \frac{a}{d}\right) + \beta \cdot \delta_m \quad (3.428)$$

unde $\delta_m = 1$ pentru $m = 0$ și $\delta_m = 0$ pentru $m \neq 0$. Când $\beta = 0$ și $\alpha = 1$ obținem desigur rezultatul de la punctul 1, adică formula (3.423).

3. Să analizăm separat cazurile particulare, de rețele de amplitudine, respectiv de fază. În prima situație, mărimile α și β sunt reale și pozitive iar coeficienții S_m (orice m) sunt reali. Începând cu $m = \pm 1$, semnele acestor coeficienți sunt alternativ pozitive și negative. În funcție de raportul transparențelor α și β , coeficienții de ordin zero și unu pot avea același semn, sau semne opuse. În cazul unei rețele de fază, transparențele α și β sunt de forma $\exp(i\rho)$. Având în vedere că este importantă numai diferența de fază dintre undele

ce ies din zonele de lărgime a și b , vom putea pune $\beta = 1$ și $\alpha = \exp(i\rho)$, fără ca prin aceasta să pierdem din generalitate. În conformitate cu (3.428), vom scrie

$$\begin{cases} S_m = (e^{i\rho} - 1) \frac{a}{d} \operatorname{sinc}\left(m\pi \frac{a}{d}\right), & m \neq 0, \\ S_0 = (e^{i\rho} - 1) \frac{a}{d} + 1, & m = 0. \end{cases} \quad (3.429)$$

Ca și în cazul unei rețele de amplitudine, semnele coeficienților Fourier S_m , începând cu $m = \pm 1$, sunt alternativ pozitive și negative. Între acești coeficienți nu există nici-un defazaj suplimentar.

Rețelele de amplitudine se deosebesc calitativ de rețele de fază prin aceea că, la ultimele, apare un defazaj suplimentar φ între spectrul de ordinul zero și toate celelalte spectre. Pentru a afla acest defazaj calculăm raportul S_m/S_0 cu ajutorul ultimelor formule și argumentul numărului complex obținut este chiar defazajul φ căutat. Un calcul simplu ne conduce la

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a+b}{a-b} \cdot \frac{\sin\rho}{1-\cos\rho}. \quad (3.430)$$

Defazajul este același pentru toate ordinele m . Având în vedere că, în urma difracției pe rețea, spectrele de diferite ordine se separă spațial, formând fascicule independente, putem acționa asupra fiecăruia din aceste fascicule, fără a modifica amplitudinile și fazele tuturor celorlalte fascicule. De exemplu, dacă pe traiectul fasciculului de ordinul zero se interpune o lamă transparentă ce face să varieze faza sa cu φ , relațiile de fază între fasciculele difractate vor fi același ca în cazul unei rețele de amplitudine. În prezența acestei lame, rețeaua de fază acționează ca o rețea de amplitudine. Acest rezultat constituie fundamentul *metodei contrastului de fază*, care se utilizează în microscopie (vezi secțiunea 3.15.2).

Să ne referim în mod special la două cazuri particulare. Mai întâi, pentru $a = b$, $\operatorname{tg}\varphi = \infty$ și $\varphi = \pi/2$. Apoi, când ρ este destul de mic avem $\operatorname{tg}\varphi \cong (2/\rho)(a+b)/(a-b)$ și $\operatorname{tg}\varphi$ fiind foarte mare, putem considera din nou φ practic egal cu $\pi/2$. În aceste două cazuri, pentru a transforma o rețea de fază într-o rețea de amplitudine este suficient să interpunem pe traiectul fasciculului de ordinul zero (sau pe traiectul tuturor celorlalte fascicule difractate) o lamă care să introducă un defazaj suplimentar de $\pm\pi/2$.

4. În sfârșit, să considerăm o rețea de fază, funcționând prin transmisie, cu trăsături în dinte de ferăstrău (vezi fig.3.68). Fie a proiecția laturii lungi AB pe axa Ox și b - proiecția laturii scurte AC , tot pe axa Ox . Originea O este aleasă la mijlocul lui AB . Dacă

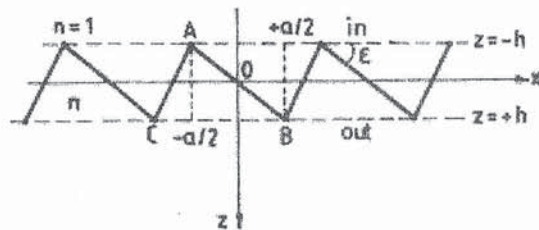


Fig.3.68. Rețea de fază funcționând prin transmisie (cu profil "dinti de ferăstrău").

$b \ll a$ putem neglija contribuția pe care o aduc laturile scurte (AC) la integralele de forma (3.423). În această aproximație putem pune $a \approx d$, considerând doar transparenta rețelei pe porțiunile lungi (AB). Să presupunem că unda incidentă cade normal pe planul xOy câmpul său având forma $E(z) = E_0 e^{ikz}$. La nivelul planului $z = -h$ (plan de intrare) putem scrie $E_{in} = E_0 e^{-ikh}$.

Calculul câmpului la ieșire, adică pentru $z = +h$, se poate face neglijând refracția, deoarece panta ε a profilului este mică. Notând cu z_0 coordonata curentă pe dreapta AB, câmpul la ieșire, într-un punct situat sub această dreaptă, este

$$E_{\text{out}} = E_0 e^{ikz_0} e^{ikn(h-z_0)} = e^{i\delta} \cdot e^{-ik(n-1)z_0} E_{\text{in}},$$

unde δ este o constantă. Factorul de fază $e^{i\delta}$ ne jucând nici-un rol, poate fi abandonat. Scriind $z_0 = x \text{tg} \varepsilon \approx \varepsilon \cdot x$ obținem următoarea transparență a rețelei

$$S(x) = e^{-ik(n-1)\varepsilon x}. \quad (3.431)$$

Calculând coeficienții Fourier S_m , ca la primul exemplu, obținem

$$S_m = \text{sinc}\{\pi[m + (d/\lambda)(n-1)\varepsilon]\}. \quad (3.432)$$

Energia luminoasă difractată este concentrată în maximul de ordin m care satisface relația $m + (d/\lambda)(n-1)\varepsilon = 0$ și pentru care $d \sin \theta = m\lambda$, sau aproximativ $d\theta \cong m\lambda$. De aici rezultă $\theta = -(n-1)\varepsilon$. Totul se întâmplă ca și când direcția fasciculului respectiv ar fi cea dată de deviația printr-o prismă de indice n și unghi refringent ε . Maximul respectiv are ordinul $m = -(d/\lambda) \cdot (n-1)\varepsilon$.

3. 14. 3. Metoda lui Rayleigh în caz general

După prezentarea raționamentelor lui Abbe și Rayleigh referitoare la producerea difracției pe rețele și la influența caracterului spațial-finit al "pupilelor" de intrare, respectiv de ieșire, asupra formei imaginii de difracție, să trecem din nou la abordarea generală, sistemică, a acestor chestiuni. În ambele exemple prezentate am presupus că iluminarea rețelei este coerentă, adică există relații de fază bine-definite, și stabile în timp, între radiațiile luminoase incidente, respectiv emergente pe/de la diversele fante ale rețelei. La studiul microscopului am prezentat comparativ puterea sa de rezoluție în cazul iluminării coerente și necoerente, arătând că ele sunt diferite. De aceea, în continuare, vom face distincție netă între cele două situații limită (nu ne vom ocupa în acest prim volum de cazul iluminării parțial coerente).

Este cazul să atragem atenția asupra faptului că modul în care a fost tratată problema formării imaginilor (în paragraful 3.13) nu este altceva decât o extindere și o generalizare a metodei lui Rayleigh, căci, într-un anumit sens, între funcția h a răspunsului la impuls și funcția $S(x)$ a transparenței rețelei există o netrivială analogie.

În cele ce urmează, ne vom referi la cazul general al unui sistem limitat difracțional și la geometria reprezentată în fig. 3.63. Ne propunem să determinăm FTO a sistemului și apoi, cu ajutorul relației generale (3.327), să specificăm spectrul frecvențelor spațiale la nivelul planului imagine.

A. Cazul iluminării coerente

În acest caz, sistemele de format imagini sunt *liniare* în raport cu transformarea amplitudinilor complexe ale câmpurilor și sunt puternic neliniare față de transformarea intensităților, adică a mărimilor definite prin medieri temporale de forma

$$I(\vec{r}) = \langle E(\vec{r}, t)E^*(\vec{r}, t) \rangle, \quad (3.433)$$

pe intervale de timp infinit (suficient) de lungi.

Dacă sistemul este invariant-spațial (SLIS), prin generalizarea relației (3.401) putem scrie

$$E_i(x_i, y_i) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{h}(x_i - \tilde{x}_0, y_i - \tilde{y}_0) E_g(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) d\tilde{x}_0 d\tilde{y}_0, \quad (3.434)$$

în care E_g reprezintă imaginea prezisă de optica geometrică.

Construim transformatele Fourier ale funcțiilor E_i și E_g sub forma

$$G_i(v_x, v_y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} E_i(x_i, y_i) \exp[-2\pi i(x_i v_x + y_i v_y)] dx_i dy_i = \mathcal{F}\{E_i(x_i, y_i)\}, \quad (3.435)$$

respectiv

$$G_g(v_x, v_y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} E_g(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) \exp[-2\pi i(\tilde{x}_0 v_x + \tilde{y}_0 v_y)] d\tilde{x}_0 d\tilde{y}_0 = \mathcal{F}\{E_g(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)\}. \quad (3.436)$$

În plus, definim funcția de transfer a sistemului ca transformata Fourier a răspunsului la impuls (invariant-spațial)

$$H(v_x, v_y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{h}(x_i, y_i) \exp[-2\pi i(x_i v_x + y_i v_y)] dx_i dy_i = \mathcal{F}\{\tilde{h}(x_i, y_i)\}. \quad (3.437)$$

Având în vedere că relația (3.434) exprimă *convoluția* funcțiilor \tilde{h} și E_g , conform teoremei (3.273) putem scrie

$$G_i(v_x, v_y) = H(v_x, v_y) G_g(v_x, v_y). \quad (3.438)$$

Astfel, efectele de difracție ale sistemului de format imagini, limitat difracțional, au fost exprimate, cel puțin formal, în domeniul frecvențelor spațiale. Funcția $H(v_x, v_y)$ se numește acum *funcția de transfer coerent (FTC)*. Rămâne să stabilim o legătură mai directă între această funcție și proprietățile fizice ale sistemului de format imagini.

Relația (3.404), stabilită în cazul unei singure lentile, rămâne valabilă și în cazul general analizat în această secțiune. Putem scrie deci,

$$\tilde{h}(x_i, y_i) = \iint_{-\infty}^{+\infty} P(\lambda d_1 \tilde{x}, \lambda d_1 \tilde{y}) \exp[-2\pi i(\tilde{x} x_i + \tilde{y} y_i)] d\tilde{x} d\tilde{y}, \quad (3.439)$$

adică

$$\tilde{h}(x_i, y_i) = \mathcal{F}\{P(\lambda d_1 \tilde{x}, \lambda d_1 \tilde{y})\}. \quad (3.440)$$

Finalmente obținem

$$H(v_x, v_y) = \mathcal{F}\{\tilde{h}(x_i, y_i)\} = \mathcal{F}\{\mathcal{F}\{P(\lambda d_1 \tilde{x}, \lambda d_1 \tilde{y})\}\} = P(-\lambda d_1 v_x, -\lambda d_1 v_y). \quad (3.441)$$

Ultima relație prezintă o importanță deosebită căci ea ne dezvăluie informația "ascunsă" în domeniul frecvențelor spațiale, de funcția pupilară. Deoarece funcția pupilară este egală fie cu 1, fie cu zero, același lucru este adevărat și pentru FTC. Altfel spus, în domeniul frecvențelor spațiale există o *bandă finită de trecere* pe care sistemul o transmite

fără distorsiuni de amplitudine sau de fază (afirmație valabilă numai dacă sistemul nu prezintă aberații). Frecvențele spațiale din exteriorul benzii de trecere sunt complet atenuate.

Pentru a scăpa de semnele minus din expresia funcției pupilare, din relația (3.441), se inversează sensul axelor de coordonate în planul imagine și atunci

$$H(v_x, v_y) = P(\lambda d_i v_x, \lambda d_i v_y). \quad (3.442)$$

Această oglindire de axe nu crează dificultăți deoarece pentru foarte multe probleme de interes practic există o simetrie a distribuției frecvențelor spațiale v_x, v_y .

Exemplificăm cele discutate mai sus prin următoarele funcții pupilare:

$$a) P(x, y) = \text{rect}\left(\frac{x}{\ell}\right) \text{rect}\left(\frac{y}{\ell}\right), \quad (3.443)$$

$$b) P(x, y) = \text{circ}\left(\frac{2r}{\ell}\right), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (3.444)$$

Funcțiile de transfer coerent (FTC) corespunzătoare sunt ușor de calculat. Obținem

$$a) H(v_x, v_y) = \text{rect}\left(\frac{\lambda d_i v_x}{\ell}\right) \text{rect}\left(\frac{\lambda d_i v_y}{\ell}\right), \quad (3.445)$$

$$b) H(v_x, v_y) = \text{circ}\left(2\lambda d_i \frac{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}{\ell}\right). \quad (3.446)$$

Ele sunt redată grafic în fig.3.69 a și b. În ambele cazuri avem aceeași *frecvență de tăiere* $v_0 = \ell/2\lambda d_i$, cu semnificația evidentă de pe figuri. De exemplu, pentru $\ell = 2$ cm, $d_i = 10$ cm și $\lambda = 10^{-6}$ m avem frecvența de tăiere $v_0 = 10^3 \text{ cm}^{-1}$.

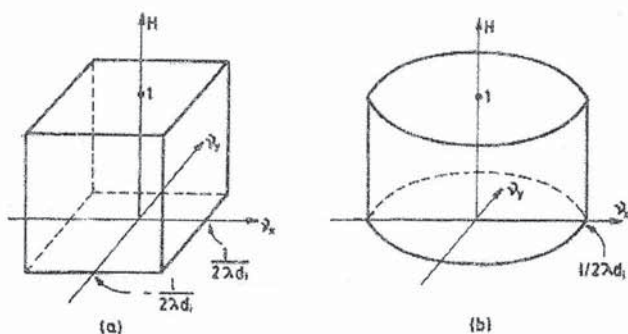


Fig.3.69. Funcții de transfer coerent (FTC) pentru: a) funcția pupilară (3.443) și b) funcția pupilară (3.444).

B. Cazul iluminării necoerente

Vom analiza acum cazul în care radiația luminoasă este *cvasimonocromatică*, cu frecvența centrală $\bar{\nu}$ și cu banda de frecvențe $\Delta\nu \ll \bar{\nu}$. Considerând că cel mai lung drum optic prin sistem este d , vom admite de asemenea că este îndeplinită condiția $c/\Delta\nu \gg d$ sau $\Delta\nu \ll c/d$.

În situația unei iluminări nemonocromatice, relația (3.401), respectiv relația (3.434), rămân valabile cu observația că E_i și E_g sunt acum fazori ce variază și în timp. De aceea, vom scrie

$$E_i(x_i, y_i; t) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{h}(x_i - \tilde{x}_0, y_i - \tilde{y}_0) E_g(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0; t) d\tilde{x}_0 d\tilde{y}_0, \quad (3.447)$$

unde, în expresia (3.404) a funcției \tilde{h} , λ trebuie înlocuit prin $\bar{\lambda} = c/\bar{v}$. Având în vedere definiția (3.433) a intensității luminoase, cu ajutorul relației anterioare obținem

$$I_i(x_i, y_i) = \iint_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{x}_0 d\tilde{y}_0 \iint_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{x}_0 d\tilde{y}_0 \tilde{h}(x_i - \tilde{x}_0, y_i - \tilde{y}_0) \times \\ \times \tilde{h}^*(x_i - \tilde{x}_0, y_i - \tilde{y}_0) \langle E_g(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0; t) E_g^*(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0; t) \rangle \quad (3.448)$$

și, deoarece proprietățile statistice ale funcției E_g sunt identice cu cele ale funcției E_0 , expresia din interiorul parantezelor ascuțite poate depinde numai de *relația de coerență spațială* a iluminării obiectului.

Când iluminarea este *perfect coerentă*, fazorii amplitudinilor la nivelul planului obiect diferă numai printr-un factor constant (în general complex). Vom putea scrie deci

$$E_g(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0; t) = E_g(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) \cdot \frac{E_g(0, 0; t)}{\langle |E_g(0, 0; t)|^2 \rangle} \quad (3.449)$$

și o relație absolut analoagă pentru $E_g(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0; t)$, unde E_g independent de timp, care apare în fața fracției din membrul drept, este amplitudinea fazorului relativă la variațiile temporale din origine. Substituind relații de forma (3.449) în (3.448), integralele spațiale se separă și obținem

$$I_i(x_i, y_i) = \left| \iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{h}(x_i - \tilde{x}_0, y_i - \tilde{y}_0) E_g(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) d\tilde{x}_0 d\tilde{y}_0 \right|^2. \quad (3.450)$$

În final, definind $E_i(x_i, y_i)$ ca amplitudinea fazorului $E_i(x_i, y_i; t)$ - variabil spațio-temporal, relativă la variațiile temporale din origine (ca în relația (3.449)), din ultima expresie rezultă imediat relația (3.434) care a însemnat punctul de plecare al discuției anterioare, de la punctul A.

Dacă iluminarea la nivelul planului obiect, este *perfect incoerentă*, amplitudinile fazoriale variază în mod independent din punct de vedere statistic. Această proprietate, oarecum idealizată, poate fi exprimată matematic prin ecuația

$$\langle E_g(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0; t) E_g^*(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0; t) \rangle = K I_g(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) \cdot \delta(\tilde{x}_0 - \tilde{x}_0, \tilde{y}_0 - \tilde{y}_0), \quad (3.451)$$

unde K este o constantă reală. Revenind acum în relația generală (3.448) obținem în final

$$I_i(x_i, y_i) = K \iint_{-\infty}^{+\infty} \left| \tilde{h}(x_i - \tilde{x}_0, y_i - \tilde{y}_0) \right|^2 \cdot I_g(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) d\tilde{x}_0 d\tilde{y}_0. \quad (3.452)$$

Prin urmare, intensitatea din planul imagine este o *convoluție* dintre intensitatea ideală I_g cu răspunsul la impuls $|\tilde{h}|^2$, adică

$$I_i = K(I_g \otimes |\tilde{h}|^2). \quad (3.453)$$

În continuare, pentru simplitate, vom scrie $K = 1$. Rezultă deci că, în cazul iluminării incoerente a obiectului, sistemul optic de format imagini este *liniar* față de transformarea intensităților și nu a amplitudinilor, cum era cazul la iluminarea coerentă.

Să definim acum așa-numitele *spectre normate* (în domeniul frecvențelor spațiale) pentru I_g și I_i , sub forma

$$\mathcal{G}_g(v_x, v_y) = \frac{\iint_{-\infty}^{+\infty} I_g(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) \exp[-2\pi i(\tilde{x}_0 v_x + \tilde{y}_0 v_y)] d\tilde{x}_0 d\tilde{y}_0}{\iint_{-\infty}^{+\infty} I_g(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) d\tilde{x}_0 d\tilde{y}_0}, \quad (3.454)$$

$$\mathcal{G}_i(v_x, v_y) = \frac{\iint_{-\infty}^{+\infty} I_i(x_i, y_i) \exp[-2\pi i(x_i v_x + y_i v_y)] dx_i dy_i}{\iint_{-\infty}^{+\infty} I_i(x_i, y_i) dx_i dy_i}. \quad (3.455)$$

Se observă că mărimile de la numitor sunt valorile, la $v_x = v_y = 0$, ale mărimilor de la numărător. Necesitatea normărilor realizate mai sus este dictată și de argumente matematice, dar și de motive fizice. Intensitatea luminoasă este prin definiție o mărime nenegativă, iar distribuția sa are întotdeauna o componentă continuă ($v_x = v_y = 0$), *de fond*, diferită de zero. Calitatea vizuală a unei imagini este în mare măsură dependentă de *contrastul* său, adică de variațiile intensității față de "valoarea de referință" a intensității de fond. În relațiile anterioare, spectrele au fost normate față de fond.

În mod similar, definim acum *funcția de transfer normată (FTN)*.

$$\mathcal{H}(v_x, v_y) = \frac{\iint_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{h}(x_i, y_i)|^2 \exp[-2\pi i(x_i v_x + y_i v_y)] dx_i dy_i}{\iint_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{h}(x_i, y_i)|^2 dx_i dy_i}. \quad (3.456)$$

Acum, având în vedere relația (3.453) cu $K=1$ și teorema convoluției, putem scrie

$$\mathcal{G}_i(v_x, v_y) = \mathcal{H}(v_x, v_y) \cdot \mathcal{G}_g(v_x, v_y). \quad (3.457)$$

Modulul $|\mathcal{H}|$ al FTN se numește *funcție de transfer de modulație (FTM)*. Mărimea $\mathcal{H}(v_x, v_y)$ este factorul complex de pondere, pe care îl aplică sistemul componentelor de frecvență spațială (v_x, v_y) , față de factorul de pondere aplicat componente de frecvențe spațiale $(0,0)$.

Deoarece

$$H(v_x, v_y) = \mathcal{F}\{\tilde{h}\} \quad \text{și} \quad \mathcal{I}(v_x, v_y) = \frac{\mathcal{F}\{|\tilde{h}|^2\}}{\mathcal{F}\{|\tilde{h}|^2\}_{(0,0)}},$$

rezultă direct că

$$\mathcal{I}(v_x, v_y) = \frac{\iint_{-\infty}^{+\infty} H(\xi', \eta') H^*(\xi' - v_x, \eta' - v_y) d\xi' d\eta'}{\iint_{-\infty}^{+\infty} |H(\xi', \eta')|^2 d\xi' d\eta'}. \quad (3.458)$$

Prin schimbarea de variabile $\xi = \xi' - \left(\frac{1}{2}\right)v_x$, $\eta = \eta' - \left(\frac{1}{2}\right)v_y$ obținem

$$\mathcal{I}(v_x, v_y) = \frac{\iint_{-\infty}^{+\infty} H\left(\xi + \frac{v_x}{2}, \eta + \frac{v_y}{2}\right) H^*\left(\xi - \frac{v_x}{2}, \eta - \frac{v_y}{2}\right) d\xi d\eta}{\iint_{-\infty}^{+\infty} |H(\xi, \eta)|^2 d\xi d\eta}. \quad (3.459)$$

Această relație, în care, în membrul stâng este prezentată FTN, iar în membrul drept FTC este variabilă atât pentru sistemele lipsite de aberații, cât și pentru cele cu aberații. Ea leagă direct proprietățile sistemelor în cazul iluminării lor coerente și necoerente.

Prezentăm pe scurt, câteva proprietăți ale FTN, care pot fi deduse ușor din relația (3.459):

$$\mathcal{I}(0,0) = 1; \quad \mathcal{I}(-v_x, -v_y) = \mathcal{I}^*(v_x, v_y); \quad |\mathcal{I}(v_x, v_y)| \leq |\mathcal{I}(0,0)|. \quad (3.460)$$

Dacă primele două proprietăți sunt aproape evidente, ultima este o consecință directă a *inegalității lui Schwartz*

$$\left| \iint_{-\infty}^{+\infty} X(\xi, \eta) \cdot Y(\xi, \eta) d\xi d\eta \right|^2 \leq \iint_{-\infty}^{+\infty} |X(\xi, \eta)|^2 d\xi d\eta \cdot \iint_{-\infty}^{+\infty} |Y(\xi, \eta)|^2 \cdot d\xi d\eta,$$

semnul de egalitate corespunzând *numai* cazului $Y = KX^*$ (K - o constantă complexă). Punând

$$X(\xi, \eta) = H\left(\xi + \frac{v_x}{2}, \eta + \frac{v_y}{2}\right) \quad \text{și} \quad Y(\xi, \eta) = H^*\left(\xi - \frac{v_x}{2}, \eta - \frac{v_y}{2}\right),$$

obținem ușor rezultatul exprimat de ultima proprietate din (3.460).

Subliniem că deși întotdeauna $\mathcal{I}(0,0) = 1$, aceasta nu implică un același nivel de fond pentru imagine și obiect. Nivelul intensității absolute în planul imagine este întotdeauna mai mic decât în planul obiect, din cauza caracterului finit al pupilei de intrare.

Pentru mai multă intuitivitate, în continuare prezentăm o interpretare geometrică a FTN pentru un sistem de format imaginii limitat difracțional. Ținând cont că funcția $\mathcal{I}(v_x, v_y)$ poate fi scrisă ca $P(\lambda d_1 v_x, \lambda d_1 v_y)$ - vezi ecuația (3.442) din cazul iluminării coerente - relația generală (3.459) se poate scrie și sub forma

$$\mathcal{C}(v_x, v_y) = \frac{\iint_{-\infty}^{+\infty} P\left(\xi + \frac{\lambda d_i}{2} v_x, \eta + \frac{\lambda d_i}{2} v_y\right) P\left(\xi - \frac{\lambda d_i}{2} v_x, \eta - \frac{\lambda d_i}{2} v_y\right) d\xi d\eta}{\iint_{-\infty}^{+\infty} P(\xi, \eta) d\xi d\eta}, \quad (3.461)$$

unde am ținut cont că $P(x, y)$ este o funcție reală, care, având numai valorile 1 sau 0, îndeplinește condiția $P^2 = P$ (vezi numitorul din (3.459)).

Ultima expresie poate fi interpretată geometric ușor și, de aceea, ea este extrem de importantă din punct de vedere practic. Numărătorul fracției (3.461) reprezintă *aria comună* a două funcții pupilare deplasate, una centrată pe punctul de coordonate $(\lambda d_i v_x / 2; \lambda d_i v_y / 2)$ iar cealaltă, pe punctul de coordonate $(-\lambda d_i v_x / 2; -\lambda d_i v_y / 2)$ - vezi fig.3.70. Numitorul reprezintă aria întregii pupile. Prin urmare

$$\mathcal{C}(v_x, v_y) = \frac{\text{aria comună}}{\text{aria totală}}. \quad (3.462)$$

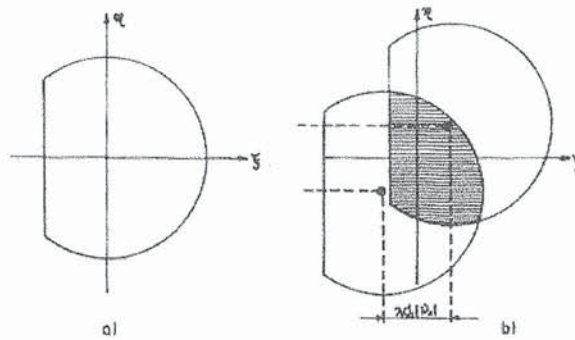


Fig.3.70. Interpretarea geometrică a relației (3.461).

Evident, în cazul unor funcții pupilare simple, calculul acestor arii este ușor de efectuat analitic. În cazul unor funcții mai complicate, evaluarea ariilor se poate face cu ajutorul unui planimetru sau a unui calculator digital.

Această interpretare geometrică ne arată că FTN pentru un sistem limitat difracțional este întotdeauna *reală* și *nenegativă*.

În încheiere evaluăm FTN pentru pupile de ieșire pătratice și circulare.

a) *Pupila pătratică de latură l* . În fig. 3.71 se reprezintă cele două funcții pupilare deplasate și aria lor comună. Aria comună se poate exprima analitic prin formula

$$\mathcal{A}(v_x, v_y) = \begin{cases} (l - \lambda |v_x| d_i)(l - \lambda |v_y| d_i) & \text{pentru } \begin{cases} |v_x| \leq \frac{l}{\lambda d_i} \\ |v_y| \leq \frac{l}{\lambda d_i} \end{cases} \\ 0 & \text{în rest.} \end{cases}, \quad (3.463)$$

Împărțind în ambele părți prin aria totală l^2 obținem

$$\mathcal{H}(v_x, v_y) = \Lambda\left(\frac{v_x}{2v_0}\right) \cdot \Lambda\left(\frac{v_y}{2v_0}\right), \quad (3.464)$$

funcția "triunghi" Λ fiind definită în (3.296) iar frecvența de tăiere $v_0 = \ell/2\lambda d_i$ este cea definită în cazul coerent. În cazul de față, incoerent, frecvența de tăiere este $2v_0$ atât pe axa v_x cât și pe axa v_y . Funcția $\mathcal{H}(v_x, v_y)$ este reprezentată în fig.3.72.

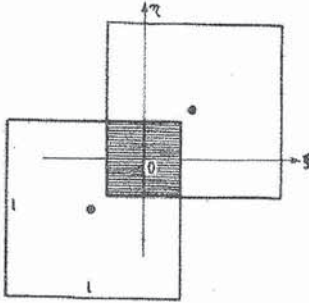


Fig.3.71. Pupilă pătratică de latură ℓ (aria comună reprezintă numărătorul FTN).

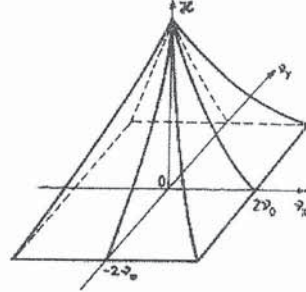


Fig.3.72. Funcția de transfer necoerent (FTN) pentru pupila pătratică.

b) *Pupilă circulară de diametru ℓ* De data aceasta, calculul funcției \mathcal{H} nu mai este chiar direct. Având în vedere simetria circulară, este suficient să calculăm aria comună la deplasarea celor două funcții pupilare de-a lungul axei ξ (și nu de-a lungul primei bisectoare, ca în exemplul anterior), conform reprezentării geometrice din fig.3.73. Aria comună este de patru ori mai mare decât aria B din figura 3.74. Aria sectorului circular A+B are expresia

$$\text{Aria}(A+B) = \frac{\theta}{2\pi} \left[\pi \left(\frac{\ell}{2} \right)^2 \right] = \frac{1}{2\pi} \arccos \left(\frac{\lambda v_x d_i}{\ell} \right) \cdot \left[\pi \left(\frac{\ell}{2} \right)^2 \right]. \quad (3.465)$$

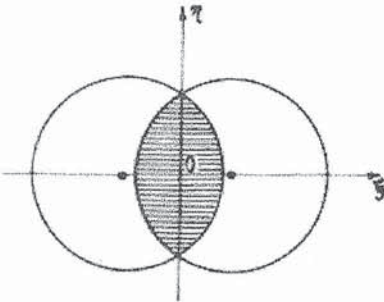


Fig.3.73. Pupilă circulară de diametru ℓ .

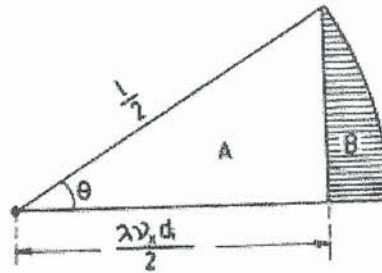


Fig.3.74. Desen ajutător, pentru calcularea ariei comune la suprapunerea pupilelor circulare deplasate.

Aria triunghiului A este

$$\text{Aria}(A) = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda v_x d_i}{2} \right) \sqrt{\left(\frac{\ell}{2} \right)^2 - \left(\frac{\lambda v_x d_i}{2} \right)^2}. \quad (3.466)$$

Finalmente putem scrie

$$\mathfrak{H}(v_x, v_y) = \frac{4 \cdot \text{Aria}(B)}{\pi \left(\frac{\ell}{2}\right)^2} = \frac{16[\text{Aria}(A+B) - \text{Aria}(A)]}{\pi \ell^2} \quad (3.467)$$

adică

$$\mathfrak{H}(v_x, 0) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \left[\arccos\left(\frac{v_x}{2v_0}\right) - \frac{v_x}{2v_0} \sqrt{1 - \left(\frac{v_x}{2v_0}\right)^2} \right] & \text{pentru } v_x \leq 2v_0, \\ 0 & \text{în rest.} \end{cases} \quad (3.468)$$

Notând $\rho (= \sqrt{v_x^2 + v_y^2})$ o distanță oarecare față de origine, în planul (v_x, v_y) și cu $\rho_0 (= \ell/2\lambda d_i)$ frecvența de tăiere în caz coerent, rezultatul anterior devine

$$\mathfrak{H}(\rho) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \left[\arccos\left(\frac{\rho}{2\rho_0}\right) - \frac{\rho}{2\rho_0} \sqrt{1 - \left(\frac{\rho}{2\rho_0}\right)^2} \right] & \text{pentru } \rho \leq 2\rho_0, \\ 0 & \text{în rest.} \end{cases} \quad (3.469)$$

Imaginea geometrică a acestor dependențe este redată în fig.3.75 și 3.76.

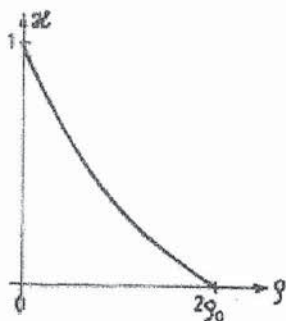


Fig.3.75. Dependenta $\mathfrak{H}(\rho)$ a FTN pentru pupila circulară.

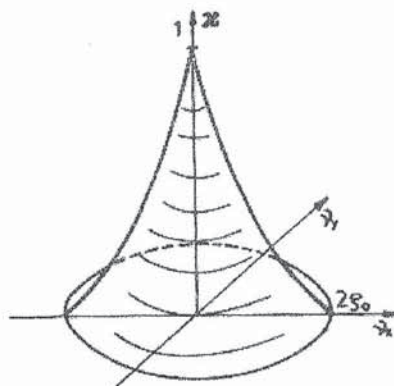


Fig.3.76. Dependenta $\mathfrak{H}(v_x, v_y)$ a FTN pentru pupila circulară.

3. 14. 4. Influența aberațiilor asupra spectului răspunsului

Dacă sistemul optic nu mai este limitat difracțional, unui punct obiect din planul (x_0, y_0) nu-i mai corespunde, dincolo de pupila de ieșire, o undă sferică perfectă, convergentă spre un punct imagine din planul (x_i, y_i) . Se spune că sistemul prezintă *aberații*.

În secțiunea de față nu ne propunem să reluăm întreaga discuție a aberațiilor, făcută în capitolul de optică geometrică, ci doar să ilustrăm prin câteva exemple, efectul lor asupra spectrului frecvențelor spațiale.

După cum am văzut, în cazul sistemelor limitate difracțional, răspunsul (coerent) la impuls este figura de difracție Fraunhofer a pupilei de ieșire, centrată pe punctul imagine

ideală. Acest fapt ne sugerează un artificiu convenabil pentru a îngloba discuția aberațiilor în rezultatele noastre precedente. Mai exact, ne putem imagina că atunci când există deformări de front de undă (abateri de la sfericitate, de exemplu), pupila ar fi iluminată de o undă sferică, ideală, dar a cărei fază este afectată de o *placă de fază* existentă la nivelul aperturii. Dacă în pupila de ieșire, în punctul (x,y) există o "eroare" de fază de forma $kW(x,y)$, unde $k = 2\pi/\lambda$ iar W este "eroarea" efectivă de drum, putem defini *transmitanța complexă* \tilde{P} a plăcii de fază ca fiind

$$\tilde{P}(x, y) = P(x, y) \exp[ikW(x, y)]. \quad (3.470)$$

Această funcție poate fi interpretată ca *funcție pupilară generalizată* și atunci, răspunsul la impuls a sistemului aberant, în condiții de coerență, este pur și simplu figura de difracție Fraunhofer a aperturii cu transmitanța \tilde{P} . În cazul iluminării incoerente a sistemului cu aberații, ca și în cazul sistemului lipsit de aberații, vom avea grijă ca răspunsul la impuls să fie considerat ca pătratul modulului celui din caz coerent (căci sistemul se comportă liniar față de intensitățile luminoase și nu față de amplitudinile câmpului!).

În *caz coerent*, FTC a sistemului cu aberații este

$$H(v_x, v_y) = \tilde{P}(\lambda d_1 v_x, \lambda d_1 v_y) = P(\lambda d_1 v_x, \lambda d_1 v_y) \exp[ikW(\lambda d_1 v_x, \lambda d_1 v_y)]. \quad (3.471)$$

Se observă că nu apar limitări suplimentare ale benzii de frecvențe spațiale ci numai *distorsionări de fază* în interiorul benzii de trecere. Aceste distorsionări pot determina efecte directe asupra fidelității sistemului.

Ce se întâmplă în *caz necoerent*? Pentru a răspunde la această întrebare, să simplificăm mai întâi notațiile utilizate anterior, scriind FTN sub forma

$$\mathcal{H}(v_x, v_y) = \left[\iint_{\mathcal{A}(v_x, v_y)} d\xi d\eta \right] : \left[\iint_{\mathcal{A}(0,0)} d\xi d\eta \right] \quad (3.472)$$

unde prin $\mathcal{A}(v_x, v_y)$ înțelegem *funcția ariei comune (de suprapunere)* a funcțiilor pupilare

$$P\left(\xi - \frac{\lambda d_1 v_x}{2}, \eta - \frac{\lambda d_1 v_y}{2}\right) \quad \text{și} \quad P\left(\xi + \frac{\lambda d_1 v_x}{2}, \eta + \frac{\lambda d_1 v_y}{2}\right).$$

În prezența aberațiilor, înlocuind (3.471) în (3.459), obținem

$$\mathcal{H}(v_x, v_y) = \frac{\iint_{\mathcal{A}(v_x, v_y)} \exp\left\{ik\left[W\left(\xi + \frac{\lambda d_1 v_x}{2}, \eta + \frac{\lambda d_1 v_y}{2}\right) - W\left(\xi - \frac{\lambda d_1 v_x}{2}, \eta - \frac{\lambda d_1 v_y}{2}\right)\right]\right\} d\xi d\eta}{\iint_{\mathcal{A}(0,0)} d\xi d\eta}, \quad (3.473)$$

relație ce exprimă influența erorii W a frontului asupra FTN.

Din inegalitatea lui Schwartz, folosită și în secțiunea anterioară, cu

$$X(\xi, \eta) = \exp\left[ikW\left(\xi + \frac{\lambda d_1 v_x}{2}, \eta + \frac{\lambda d_1 v_y}{2}\right)\right] \equiv \exp(ikW_+)$$

și

$$Y(\xi, \eta) = \exp \left[-ikW \left(\xi - \frac{\lambda d_i v_x}{2}, \eta - \frac{\lambda d_i v_y}{2} \right) \right] \equiv \exp(-ikW_-),$$

având în vedere că $|X|^2 = |Y|^2 = 1$, obținem

$$|\mathcal{H}(v_x, v_y)|_{\text{cu aberații}}^2 = \left| \frac{\iint_{\mathcal{A}(v_x, v_y)} \exp \{ ik[W_+ - W_-] \} d\xi d\eta}{\iint_{\mathcal{A}(0,0)} d\xi d\eta} \right|^2 \leq \left[\frac{\iint_{\mathcal{A}(v_x, v_y)} d\xi d\eta}{\iint_{\mathcal{A}(0,0)} d\xi d\eta} \right]^2 \equiv |\mathcal{H}(v_x, v_y)|_{\text{fără aberații}}^2 \quad (3.474)$$

Această relație ne arată că prezența aberațiilor nu poate să crească în nici-un caz modulul FTO. Cu alte cuvinte, aberațiile vor micșora în general contrastul fiecărei componente de frecvență spațială a intensității. Frecvența absolută de tăiere rămâne nemodificată însă aberațiile vor reduce sever frecvențele înalte, astfel încât frecvența de tăiere efectivă este mult mai mică decât în cazul limitat-difracțional. În plus, este posibil ca aberațiile să genereze în anumite benzi, *valori negative* pentru FTO, lucru imposibil în cazul sistemelor fără aberații. Când FTO este negativă componentele imagine ale acelor frecvențe prezintă un *contrast inversat* (vârfulurile intense devin nule iar valorile nule devin intense).

Un exemplu concret este, credem, edificator. Să considerăm o apertură pătratică și o "eroare" de focalizare ε , în sensul că

$$\frac{1}{d_i} + \frac{1}{d_0} - \frac{1}{f} = \varepsilon.$$

Din ecuațiile (3.390) și (3.471) rezultă imediat

$$W(x, y) = \frac{\varepsilon}{2}(x^2 + y^2). \quad (3.475)$$

Dacă apertura are latura ℓ , eroarea fazică maximă la marginile ei (în lungul axelor x sau y), este $\frac{1}{8}\varepsilon k \ell^2$. Rezultă că eroarea maximă de drum este

$$w = \frac{\varepsilon}{8} \ell^2, \quad (3.476)$$

parametru ce poate da indicații clare asupra severității erorii de focalizare. Înlocuind funcția W sub forma (3.475) în (3.473), după câteva calcule elementare obținem

$$\mathcal{H}(v_x, v_y) = \Lambda \left(\frac{v_x}{2v_0} \right) \cdot \Lambda \left(\frac{v_y}{2v_0} \right) \text{sinc} \left[\frac{8w}{\pi\lambda} \left(\frac{v_x}{2v_0} \right) \left(1 - \frac{|v_x|}{2v_0} \right) \right] \cdot \text{sinc} \left[\frac{8w}{\pi\lambda} \left(\frac{v_y}{2v_0} \right) \left(1 - \frac{|v_y|}{2v_0} \right) \right]. \quad (3.477)$$

În fig.3.77 se reprezintă o secțiune a acestei suprafețe cu planul $v_y = 0$. Cazul sistemului limitat - difracțional corespunde lui $\varepsilon = 0$, adică lui $w = 0$. Când w crește, forma curbei se modifică sensibil. Pentru $w \leq \lambda/2$, curba rămâne în domeniul valorilor pozitive. Dacă w depășește valoarea $\lambda/2$, curba FTN trece și în domeniul valorilor negative, adică, pentru anumite frecvențe spațiale apar *inversări de contrast*. Când eroarea de focalizare este foarte mare ($w \gg \lambda$), frecvențele răspunsului coboară mult (se apropie de zero) și putem scrie

$$1 - \frac{|v_x|}{2v_0} \approx 1 - \frac{|v_y|}{2v_0} \approx 1.$$

În consecință, din relația (3.417) rezultă

$$\mathfrak{I}(v_x, v_y) \approx \text{sinc} \left[\frac{8w}{\pi\lambda} \left(\frac{v_x}{2v_0} \right) \right] \cdot \text{sinc} \left[\frac{8w}{\pi\lambda} \left(\frac{v_y}{2v_0} \right) \right]. \quad (3.478)$$

Cititorul poate verifica ușor că această relație reprezintă tocmai FTN prezisă de optica geometrică.

3. 14. 5. Asemănări și deosebiri între imaginile coerente și necoerente

În secțiunea 3.14.3 am arătat că FTO pentru un sistem limitat difracțional se întinde până la frecvența spațială v_0 în cazul iluminării coerente și până la frecvența spațială $2v_0$ în cazul iluminării necoerente. De aici ar putea rezulta concluzia că, în cazul unui același sistem, imaginea necoerentă ar fi "mai bună" decât cea coerentă, ceea ce în, general, nu este adevărat. Trebuie să ducem raționamentele noastre mai departe, pentru a înțelege mai profund consecințele celor două feluri de iluminări.

De fapt, frecvențele v_0 și $2v_0$ nici nu pot fi comparate direct deoarece ele se referă la imaginea *în amplitudine* - prima, și respectiv la imaginea *în intensitate* - cea de a doua, în timp ce observația finală se face întotdeauna în intensitate. Prin urmare, frecvențele de tăiere ar trebui și ar putea fi comparate numai pentru aceeași mărime observabilă - intensitatea luminoasă. Pe de altă parte, afirmația că o anumită imagine ar fi "mai bună" decât o altă imagine este lipsită de sens atâta timp cât termenul "mai bună" nu a fost definit. În general, nu există un criteriu universal de calitate pe care să se bazeze compararea a două imagini. Pot fi invocate anumite criterii (de exemplu, cele mai mici abateri pătratice medii între intensitățile obiect și imagine) dar, până la urmă, interacția imaginii (obiective) cu observatorul uman (subiectiv) este atât de complexă și atât de puțin înțeleasă încât este greu de adoptat un criteriu realist, general acceptabil.

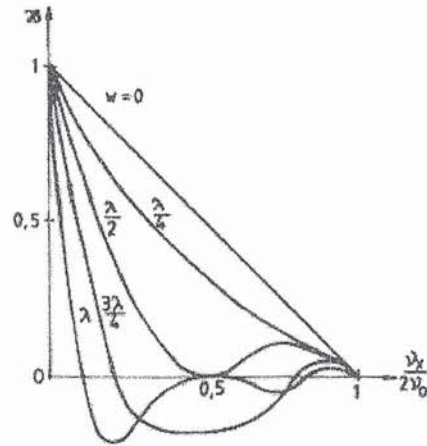


Fig.3.77. Secțiune prin FTN pentru o pupilă pătratică (la diferite valori ale "erorii" de focalizare; w reprezintă diferența de drum).

Cu toate acestea, nimic nu ne poate împiedica să facem *anumite* comparații și să evidențiem *unele* diferențe dintre cele două feluri de imagini.

1. *Spectrul de frecvențe al intensității imagine.* Începem prin a reafirma că în timp ce sistemele incoerente sunt liniare în intensitate, cele coerente sunt puternic neliniare în raport cu această mărime. De aceea, trebuie să fim extrem de prudenți, atunci când ne propunem determinarea spectrului intensității în caz coerent.

După cum am văzut, în cazul *incoerent*, intensitatea imagine este

$$I_i = |\tilde{h}|^2 \otimes I_g = |\tilde{h}|^2 \otimes |E_g|^2, \quad (3.479)$$

iar în cazul *coerent*

$$I_i = |\tilde{h} \otimes E_g|^2. \quad (3.480)$$

Cu ajutorul noțiunii de *autocorelație* (vezi formula (3.278)) relațiile anterioare ne permit să scriem

$$\mathcal{F}\{I_i\} = [H * H] \cdot [G_g * G_g], \quad \text{în cazul } \textit{incoerent}, \quad (3.481)$$

$$\mathcal{F}\{I_i\} = HG_g * HG_g, \quad \text{în cazul } \textit{coerent},$$

unde G_g este spectrul lui E_g iar H este FTO coerent (adică FTC). Din ultimele două relații, care par a fi, într-un anumit sens, similare, rezultă că, totuși, conținutul în frecvențe poate fi destul de diferit în cele două cazuri. Rezultatul comparării celor două intensități imagine va depinde mult atât de *intensitatea*, cât și de *faza* obiectului.

Vom exemplifica ultima afirmație considerând două obiecte A și B, cu aceeași transmitanță de intensitate dar cu distribuție fazică diferită, despre unul din ele putându-se spune, în final, că are imagine "mai bună" în lumină coerentă iar despre celălalt - în lumină incoerentă. Fie transmitanța de intensitate a obiectelor, aceeași în ambele cazuri

$$\tau(x_0, y_0) = \cos^2(2\pi \bar{f} x_0), \quad (3.482)$$

unde, vom presupune că

$$\frac{f_0}{2} < \bar{f} < f_0, \quad (3.483)$$

f_0 fiind frecvența spațială de tăiere coerentă ($f_0 = \ell / 2\lambda d_1$, pentru aperturi pătratice, de latură ℓ , sau circulare, de diametru ℓ). Transmitanțele de amplitudine pentru cele două obiecte sunt

$$\begin{cases} t_a(x_0, y_0) = \cos(2\pi \bar{f} x_0), & \text{obiectul A,} \\ t_b(x_0, y_0) = |\cos(2\pi \bar{f} x_0)|, & \text{obiectul B.} \end{cases} \quad (3.484)$$

Așadar, cele două diferă numai printr-o distribuție fazică periodică.

Figura 3.78. ilustrează diferitele domenii de frecvențe spațiale care conduc la spectrul imagine al obiectului A. Subliniem că contrastul distribuției de intensitate imagine este *mai rău* în cazul necoerent decât în cazul coerent. Pe această bază putem afirma că, pentru obiectul A, este *mai bună* iluminarea coerentă.

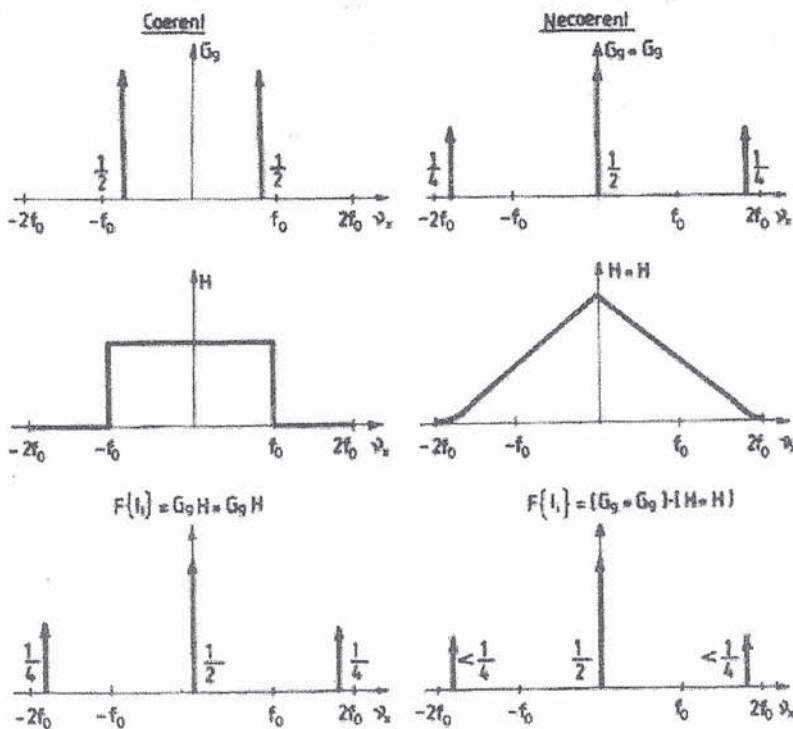


Fig.3.78. Calcularea spectrului intensității imagine pentru obiectul A în lumină coerentă și necoerentă.

Pentru obiectul B, analiza necesită mai puține detalieri. Amplitudinea obiect este acum periodică cu frecvența fundamentală $2\bar{f}$. Însă, deoarece $2\bar{f} > f_0$, în caz coerent nu vor exista variații de intensități imagine, în timp ce, în caz incoerent, sistemul va forma aceeași imagine ca și pentru obiectul A. Acum iluminarea incoerentă poate fi numită *mai bună* decât cea coerentă (căci ultima nu crează nici-un contrast).

Din acest exemplu, ca și din altele care s-ar putea da, rezultă că nu se poate preciza, *a priori*, ce iluminare trebuie preferată într-un anumit caz concret. Alegerea tipului de iluminare depinde de structura obiectului, în particular de distribuția sa de fază.

2. Rezoluția a două puncte. În conformitate cu criteriul de rezoluție propus de Rayleigh, două surse punctiforme *necoerente* pot fi "rezolvate", într-un sistem lipsit de aberații, dacă distanța dintre ele îndeplinește condiția

$$\delta \geq 1,22 \frac{\lambda d_i}{\ell} \equiv \delta_{\min}, \quad (3.485)$$

unde ℓ este diametrul pupilei de ieșire. Acest criteriu se utilizează mai ales în aplicațiile astronomice (surse stelare independente) unde s-a dovedit extrem de util. Pentru cazul a două surse identice, situate la distanța δ_{\min} , distribuția de intensitate luminoasă este

reprezentată în fig.3.79. Față de maximele laterale, minimul central este cu aproximativ 19 procente mai coborât. Ne punem acum următoarea întrebare: dacă punctele obiect sunt situate la distanța δ_{\min} , când este "mai bună" rezoluția, în caz coerent, sau în caz necoerent? Deși pentru aplicațiile astronomice întrebarea este pur academică, răspunsul său este important pentru aplicațiile din domeniul microscopiei.

Ca și în exemplul precedent, răspunsul la această întrebare depinde de distribuția de fază asociată cu obiectul. O secțiune transversală prin distribuția de intensitate imagine ($x = 0$) ne dă*

$$I(y) = \left| 2 \cdot \frac{J_1[\pi(y-0,61)]}{\pi(y-0,61)} + e^{i\phi} \cdot 2 \cdot \frac{J_1[\pi(y+0,61)]}{\pi(y+0,61)} \right|^2, \quad (3.486)$$

unde ϕ este faza relativă între cele două surse punctiforme. În fig.3.80 sunt reprezentate trei cazuri distincte: $\phi = 0$ - surse în fază, $\phi = 90^\circ$ - surse în cuadratură și $\phi = 180^\circ$ - surse în opoziție de fază. Când sursele sunt în cuadratură obținem rezultatul anterior, adică distribuția de intensitate luminoasă imagine coincide cu cea din caz necoerent. Dacă sursele sunt în fază, nu mai există minim central și, deci, nu există rezoluție. În acest caz, din punctul de vedere al rezoluției, este "mai bună" varianta necoerentă. În sfârșit, când sursele oscilează în opoziție de fază, minimul central este nul și rezoluția este "mai bună" în cazul coerent. Se desprinde concluzia că, nici de data aceasta, nu se poate afirma că o anumită iluminare ar fi preferabilă altelea pentru a îmbunătăți rezoluția a două puncte.

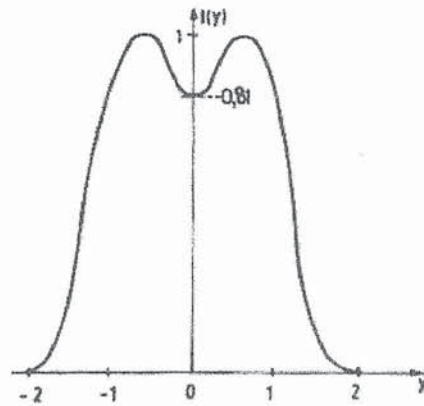


Fig.3.79. Intensitatea imaginii a două surse punctiforme incoerente, separate prin "distanța Rayleigh".

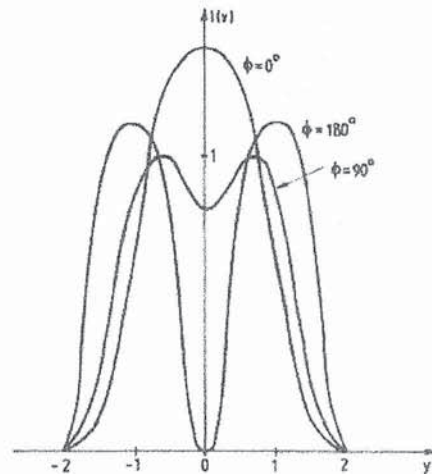


Fig.3.80. Intensitatea imaginii a două surse punctiforme, (mutual coerente), separate prin "distanța Rayleigh", pentru diferite valori ale fazelor relative ϕ .

3. *Alte efecte.* Să presupunem că în planul obiect am avea o muchie rectilinie (lamă de cuțit) care separă net un semiplan opac de unul perfect transparent și că pupila de ieșire a sistemului ar fi pătratică, cu latura l . În fig.3.81 se prezintă răspunsul teoretic, în unități relative, al sistemului pentru acest semnal "step", în cele două cazuri de iluminare. Când iluminarea este coerentă, în zona de lumină apar maximele și minimele de difracție,

* Se utilizează coordonate normate (adimensionale).

iar la o iluminare necoerentă, trecerea de la o zonă la cealaltă se face monoton, numai crescător. Observăm, de asemenea, că poziția aparentă a muchiei separatoare, adică poziția la care răspunsul de intensitate este egal cu jumătate din excitație, este diferită în cele două cazuri ("eroarea" apare în cazul iluminării coerente).

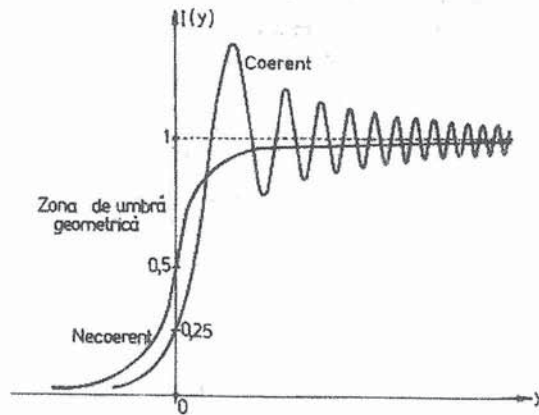


Fig.3.81. Răspunsul teoretic, în intensitate (unități relative), al unui sistem - coerent, respectiv necoerent - la un semnal obiect de tip "step".

sa, observată în fasciculul difuzat, pare a fi pistruiată, adică acoperită cu un sistem foarte fin de puncte. Explicația este aceea că centrul difuzanți ai obiectului formează pe retină pete de difracție specifice, prin interferența cărora apare aspectul granular denumit speckle. Fenomenul poate fi pus în evidență și prin fotografiere în lumină coerentă. Fotografia realizată în lumină necoerentă pare a fi "mai bună" decât cea realizată în lumină coerentă. Dar, această afirmație nu este nici ea generală. Efectul speckle este deranjant pe imaginea coerentă numai atunci când structura de rugozități a obiectului este apropiată de limita de rezoluție a sistemului (ochiul observatorului, aparatul fotografic etc.).

Deși la prima vedere s-ar părea că efectul speckle este numai supărător, realitatea este alta; el s-a dovedit extrem de important pentru aplicațiile din domeniul controlului calității și structurii suprafețelor. Cititorului interesat de acest subiect îi recomandăm studierea lucrărilor [21, 29].

§. 3. 15. Filtrajul spațial și prelucrarea optică a informației

3. 15. 1. Experiențele Abbe - Porter

În secțiunea anterioară am încercat să evidențiem importanța proprietății de liniaritate prin *analiza* frecvențială a sistemelor de format imagini. În continuare, ne propunem să extindem investigația începută, trecând de la analiză la *sinteză*, pentru a-l putea convinge pe cititor de adevărata importanță a acestor concepte, respectiv de larga lor paletă de aplicații practice.

Din punct de vedere istoric, tehnica sintezei Fourier își are începuturile în lucrarea, deja menționată, a lui Abbe, din anul 1873 și, apoi, într-o altă lucrare, a lui Porter, din anul 1906, în care se puneau prima oară problemele controlării și influențării convenabile a spectrului imagine, la microscop. Ambele lucrări porneau de la necesitatea verificării în practică a teoriei lui Abbe referitoare la mecanismul formării imaginii în microscop și investigării consecințelor sale (vezi și secțiunea 3.14.1).

În esență schema experimentelor Abbe-Porter este redată în fig.3.82. Un obiect sub formă de rețea plană, format din fire subțiri, reciproc perpendiculare, este iluminat frontal de la o sursă coerentă. La dreapta lentilei, există două plane importante, anume planul focal posterior și planul imaginii. Așa cum am mai arătat, conform teoriei lui Abbe, în procesul de formare a imaginii există

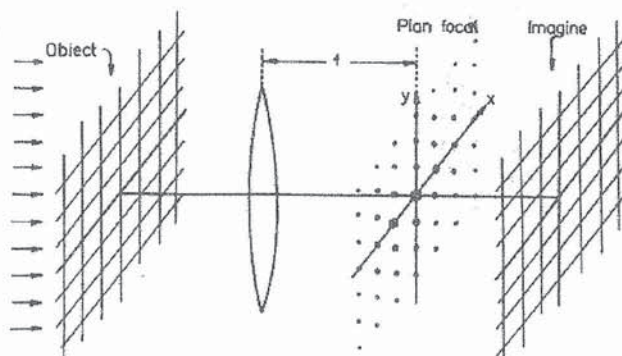


Fig.3.82. Schema experimentului Abbe-Porter.

doă etape: mai întâi, în planul focal posterior al lentilei apare spectrul Fourier al rețelei periodice obiect, limitat de apertura lentilei, și apoi, în planul imagine sunt recombinate diferitele componente Fourier care au trecut prin lentilă și au focalizat, pentru a se forma imaginea rețelei obiect. Natura periodică a obiectului folosit în experiențe dă naștere în planul focal la o serie de componente spectrale, fiecare cu o anumită întindere, dependentă de (și de) deschiderea lentilei utilizate. Spoturile din exteriorul axelor corespund componentelor direcționate sub diverse unghiuri față de planul obiect și axa de simetrie.

Introducând în planul focal diferite filtre (diafragme fine = pinhole, mici obstacole, fante etc.), apar multiple posibilități de manevrare a spectrului imaginii formate, adică de realizare a ceea ce se numește *filtraj spațial*. De exemplu, dacă în planul focal se introduce un paravan cu fantă orizontală ce transmite mai departe numai un singur rând de componente spectrale, cele așezate de-a lungul axei x, imaginea obținută redă numai liniile verticale (întunecate, pe fond luminos) ale rețelei obiect; invers, dacă, prin rotirea paravanului cu fantă cu 90^0 , sunt transmise mai departe numai componentele spectrale așezate de-a lungul axei y, imaginea va conține numai liniile orizontale ale rețelei obiect. În ambele cazuri, suprimarea liniilor complementare (orizontale, respectiv verticale) este aproape completă.

Pot fi observate și alte efecte interesante. Dacă în planul focal se introduce o placă opacă cu un mic orificiu circular (pinhole) ce permite doar transmiterea componentei Fourier din originea axelor, planul imagine va fi iluminat uniform, adică imaginea nu mai are nimic comun cu obiectul. Mărind însă treptat diametrul orificiului, numărul componentelor Fourier transmise crește și imaginea rețelei de fire reciproc perpendiculare se reconstituie (se sintetizează) din ce în ce mai bine (rețea întunecată pe fond luminos). Invers, dacă în loc de diafragmă utilizăm un disc circular opac, ce oprește numai componenta centrală și apoi, prin creșterea diametrului său, din ce în ce mai multe componente din zona mediană a planului focal (spectral), se pune în evidență o inversare a contrastului față de cazul utilizării diafragmei (la început imaginea este destul de bună, după care ea se înrăutățește progresiv).

Nu ne vom ocupa acum de matematica aspectelor relevate de experiența Abbe-Porter lăsând-o pentru mai târziu (vezi secțiunea 3.15.7, figura 3.101, respectiv formulele (3.520) - (3.522)). Acolo se va putea constata că teoria explică întru-totul comportamentul evidențiat de aceste experiențe considerate, pe bună dreptate, de pionierat în domeniul filtrajului spațial și al prelucrării optice a informației.

3. 15. 2. Microscopul cu contrast de fază

În practica biologică, de foarte multe ori, se cer a fi analizate microorganisme sau țesuturi care sunt complet sau aproape complet transparente. Cu un microscop obișnuit aceste analize nu se pot efectua deoarece, la o transparență aproape totală, undele luminoase nu se pot modula în amplitudine. În consecință, pentru orice detector pătratic (cum este și cazul ochiului uman), contrastul imaginii este practic nul. Cu toate acestea dacă mediul de analizat este neomogen din punct de vedere optic, adică indicele său de refracție variază din loc în loc, undele luminoase care îl străbat se vor modula în fază.

Pentru observarea unor astfel de obiecte au fost încercate diferite metode interferometrice. Una dintre acestea (metoda fondului central întunecat sau metoda strioscopică) utilizează un mic obstacol opac ce blochează componenta spectrală centrală. Interpretarea imaginii obținute, cu contrast bun, dar de intensitate slabă, este destul de dificilă. O altă metodă (metoda Schlieren) propune excluderea (obținerea) tuturor componentelor spectrale de o parte a ordinului central cu ajutorul unei "lame de cuțit" (metoda "knife-edge"). Din păcate, cu tot succesul lor relativ, aceste metode conduc la intensități luminoase observabile mici, care sunt *neliniare* în raport cu shifturile de fază de la nivelul obiectului și, de aceea, contrastul imaginii nu este direct proporțional cu contrastul de fază (de exemplu, pentru un obiect cu indice de refracție n dat, dar de grosime variabilă, contrastul imaginii nu reflectă fidel variațiile de grosime). O altă metodă care s-a propus pentru observarea țesuturilor transparente (sau a altor structuri biologice importante) a fost metoda colorării locale cu anumite soluții de pigmenți. Deși, uneori, metoda dă rezultate destul de bune, în cazul obiectelor vii colorarea este dăunătoare, căci ea conduce la degradarea și uneori chiar la moartea respectivului țesut.

Există obiecte transparente (fără contrast de amplitudine) nu numai în biologie ci și în alte domenii ale științei. De exemplu, neregularitățile fine ale unei suprafețe metalice, cu putere reflectantă uniformă, se comportă ca și obiectele transparente. La fel, neomogenitățile din structura cristalelor, variațiile de indice de refracție din interiorul unui lichid, ușoarele deformații ale unei suprafețe de lichid etc., sunt la rândul lor, "obiecte transparente".

În anul 1935, fizicianul olandez Frits Zernike (laureat al premiului Nobel în anul 1953) a propus o nouă metodă pentru vizualizarea obiectelor transparente, care se bazează pe filtraj spațial și care are avantajul că intensitatea observată *este* (în condiții pe care le vom preciza mai jos) *liniară* față de shifturile de fază introduse de obiect. În plus, spre deosebire de metoda colorării, în care se acționează direct asupra obiectului, în metoda lui Zernike se obține un contrast al imaginii fără să se acționeze asupra obiectului. Ideea lui Zernike era aceea de a transforma contrastul de fază al obiectului în contrast de amplitudine, adică de intensitate luminoasă. Microscopul construit pe baza acestei idei este cunoscut în literatura optică sub denumirea de *microscop cu contrast de fază*. Inventarea sa a dat un puternic avânt cercetărilor din domeniul biologiei vegetale și animale, medicinei, fiziologiei și altor științe.

Să vedem cum funcționează un astfel de microscop, respectiv cum poate fi transformat *liniar* un contrast de fază într-un contrast de amplitudine. Fie un obiect transparent, cu transmitanța complexă de amplitudine

$$t(x, y) = A \exp(i\phi(x, y)), \quad A = \text{real}, \quad (3.487)$$

iluminat coerent, plasat la intrarea într-un sistem (microscop) de format imagini. Pentru comoditate putem considera $A = 1^*$ și admitem că pupilele de intrare și de ieșire în/din sistem sunt foarte mari (în principiu, infinit de mari). În plus, o condiție necesară pentru a obține transformare liniară între shiftul de fază și intensitatea luminoasă, este aceea ca faza ϕ să fie mult inferioară valorii de 1 radian astfel încât să poată fi adevărată aproximația

$$t(x, y) \cong 1 + i\phi(x, y), \quad (3.487')$$

(termenii de ordinul ϕ^2, ϕ^3, \dots să fie efectiv neglijabili). Primul termen din ultima relație dă naștere unei unde intense, care trece prin obiect fără nici-un fel de modificare, în timp ce al doilea termen generează o undă difractată, mai slabă, ce este deviată în exteriorul axei de simetrie a sistemului optic. Intensitatea imaginii obținute cu un microscop obișnuit (fără nici-un fel de filtrare intermediară) poate fi scrisă sub forma

$$I_i \cong |t(x, y)|^2 \cong |1 + i\phi(x, y)|^2 \approx 1. \quad (3.488)$$

Deoarece $\phi(x, y)$ este mult mai mic decât 1, termenul al doilea (ϕ^2) din expresia lui I_i este efectiv neglijabil și imaginea nu posedă practic nici-un fel de contrast sesizabil. Zernike a înțeles că lumina difractată nu este observabilă din cauză că termenul $i\phi(x, y)$ se află în *cuadratură de fază* ($i = \exp(i(\pi/2))$) față de termenul 1, adică față de unda fondului. Mai mult, el și-a dat seama că această relație de cuadratură poate fi modificată prin modificarea fazei termenului de fond cu ajutorul unei *lame de fază* introdusă în centrul planului focal posterior al lentilei obiectiv sau, mai exact, în planul imaginii intermediare. Dacă această lamă de fază este o *lamă sfert de undă*, adică are o grosime egală cu $\lambda/4$, faza undei de fond se modifică cu $\pi/2$ (vezi și finalul secțiunii 3. 14. 2). În locul termenului de fond 1, lama transmite mai departe termenul $\exp(\pm i\frac{\pi}{2}) = \pm i$ și intensitatea luminoasă în planul imagine devine

$$I_i \cong |\pm i + i\phi(x, y)|^2 = |i[\phi(x, y) \pm 1]|^2 \approx 1 \pm 2\phi(x, y). \quad (3.489)$$

Ca și până acum, termenul mic ϕ^2 , neglijabil, nu a mai fost scris în mod explicit în rezultatul final. În acest fel, cu ajutorul lamei de fază, intensitatea imagine a devenit *liniară* în ϕ și contrastul de fază al obiectului s-a transformat în contrast de intensitate la nivelul planului final imagine. Semnele \pm din relația (3.489) corespund unei retardări de $+\pi/2$ radiani, respectiv unei retardări de $+3\pi/2$ (sau $-\pi/2$) radiani a undei de fond. În primul caz se spune că s-a realizat un *contrast de fază pozitiv* iar în cel de-al doilea caz - un *contrast de fază negativ*. În cele două situații, contrastul imaginii obținute este complementar.

Prezentăm acum un model simplu, fazorial, care ne va permite să înțelegem mai bine care este deosebirea dintre un microscop obișnuit și un microscop cu contrast de fază.

Să considerăm mai întâi un obiect sub formă de *rețea de amplitudine*, cu două zone I și II, de transparență diferită, care alternează periodic: zona I are transparență mare iar zona a II-a - mică. Putem admite, fără a micșora generalitatea tratării, că cele două zone au aceeași lărgime. Evident, amplitudinea undelor transmise de zona I este mare iar cea a

* Redefinim transmitanța sub forma $(1/A)t(x, y)$.

undelor transmise de zona II este mică. În desenul din partea superioară a fig.3.83, fazorul \vec{a} , mai lung, reprezintă unda transmisă de zona I iar fazorul \vec{b} , mai scurt, unda transmisă de zona II. Deoarece o rețea de amplitudine nu introduce defazaje între undele care o traversează, fazorii \vec{a} și \vec{b} au fost desenați pe aceeași direcție și cu același sens (am presupus tacit că rețeaua de amplitudine este iluminată de o undă plană, sub incidență normală). Contrastul imaginii obținute în acest caz, într-un microscop obișnuit, provine din diferența care există între $|\vec{a}|^2$ și $|\vec{b}|^2$.

Să ne referim acum la o rețea de fază, constituită tot din două regiuni I și II ce alternează succesiv, de aceeași transparentță, care afectează faza undelor ce o traversează (lăsând amplitudinea nemodificată). Vectorii \vec{A} și \vec{B} din fig.3.83, a), au aceeași lungime, dar au orientări diferite. Ei reprezintă undele transmise de cele două regiuni I și II. Ceea ce contează pentru raționamentul nostru ulterior este diferența de fază relativă; de aceea, fără a pierde din generalitate, am reprezentat vectorii \vec{A} și \vec{B} cu același unghi față de orizontală. Putem descompune acum vectorii \vec{A} și \vec{B} ca în desenul b); avem $\vec{A} = \vec{D} + \vec{c}$, $\vec{B} = \vec{D} - \vec{c}$. Să rotim vectorii \vec{c} și $-\vec{c}$ în același sens cu 90° (în sens orar pe desenul c) și în sens antiorar pe desenul d)). În microscopul lui Zernike această operație este realizată de lama de fază (sfert de undă). Astfel, în desenul c), zona I transmite amplitudinea $\vec{a} = \vec{D} + \vec{c}'$ ($|\vec{c}'| = |\vec{c}|$) iar zona II - amplitudinea $\vec{b} = \vec{D} - \vec{c}'$ și, deoarece $|\vec{b}| < |\vec{a}|$, imaginea va avea contrast de amplitudine (adică de intensitate luminoasă). În desenul d), zona I transmite amplitudinea $\vec{a} = \vec{D} + \vec{c}'$, ceea ce înseamnă că, finalmente, contrastul imaginii d) este complementar celui din cazul c).

Înainte de introducerea lamei de fază (desenele a) și b)) energia transmisă de zona I este $A^2 = D^2 + c^2$ iar cea transmisă de zona II este $B^2 = D^2 + c^2 = A^2$. În total, cele două zone transmit energia $2(D^2 + c^2)$. După introducerea lamei, zona I transmite energia $(D + c)^2$ iar zona II transmite energia $(D - c)^2$, adică în total $(D + c)^2 + (D - c)^2 =$

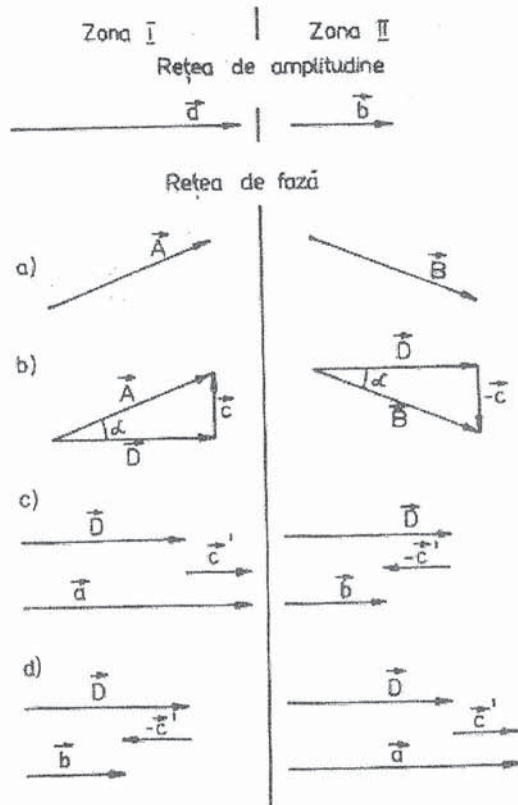


Fig.3.83. Model fazorial pentru înțelegerea principiului microscopului cu contrast de fază.

$= 2(D^2 + c^2)$. Prin urmare, introducerea lamei nu modifică energia totală transmisă ci doar o distribuie altfel (apare un supliment $\pm 2Dc$ transmis de zona I și un supliment $\mp 2Dc$ transmis de zona II).

Prin ceea ce a realizat, Zernike a dovedit odată în plus, că ideile mari, revoluționare, sunt întotdeauna simple. Sperăm că modelul prezentat confirmă afirmația că ideea lui Zernike a fost într-adevăr simplă, dar, să recunoaștem, genială.

Încheiem analiza referitoare la microscopia de tip Zernike cu câteva considerații sumare despre construcția lamelor de fază.

În anul 1941, Zernike a propus și a experimentat următoarea lamă (vezi fig. 3.84 a și b). Între cele două elemente ale unui dublet (cazul a) sau între două lame cu fețe plan-paralele (cazul b), lipite cu balsam de Canada, se introduce o lamă (inelară sau dreptunghiulară) de colodiu.

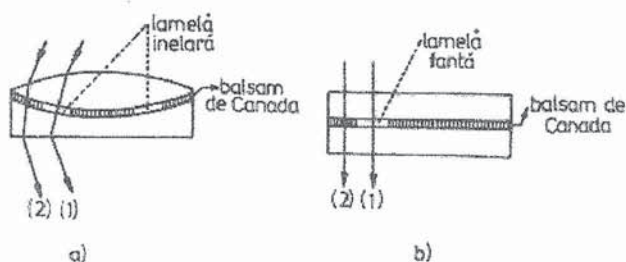


Fig.3.84. (a, b). Lame de fază propuse și experimentate de Zernike.

Grosimea e a stratului de balsam (indice n_2) și de colodiu (indice n_1) este astfel aleasă încât să satisfacă relația $4e(n_1 - n_2) = \lambda$.

O altă lamă de fază, de tip interferențial, a fost propusă în anul 1951 de către M. Locquin. Ea este reprezentată în fig.3.85. Pe o lamă de sticlă omogenă L , cu fețe plan-paralele, se depune un set de pelicule subțiri de criolit (indice $n = 1,36$) și de sulfură de zinc (indice $n = 2,3$), alternative, în număr total impar (5 - pe desenul nostru, 15 - în situația reală, pe prima lamă realizată de către Locquin). Grosimea peliculelor extreme (hașurate pe desen) și a celei mediane se ia egală cu $\lambda/2$ iar a celorlalte (nehașurate) - egală cu $\lambda/4$.

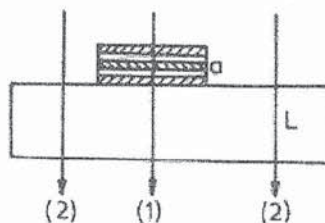


Fig.3.85. Lama de fază a lui Locquin.

În acest fel, se realizează un filtru interferențial (vezi volumul II al cărții noastre) ce lasă să treacă numai anumite lungimi de undă. Dacă lumina incidentă este albă, lumina transmisă în zona filtrului este colorată (cu o bandă de trecere de aproximativ 6 nm); filtrul se comportă ca un monocromator. Să presupunem că, pentru lungimea de undă mediană λ , filtrul introduce un defazaj de $\pi/2$ între razele (1) și (2) și nu produce nici-o absorbție razei (1). Dacă se schimbă puțin lungimea de undă incidentă, filtrul începe să absoarbă semnificativ. În consecință, lucrând în lumină monocromatică, în vecinătatea valorii mediane λ (pentru care filtrul are transmitanță maximă), această lamă combină efectul contrastului de fază cu cel al contrastului de amplitudine (dependente ambele de cât de mult ne îndepărtăm de lungimea de undă λ).

În afara acestor două tipuri de lame, mai sunt cunoscute și altele: compensatorul (pana) lui Lyot - 1946, lama de fază a lui Osterberg - 1946, lama de tip Kastler - Montarnal - 1946, 1948 (două versiuni), lama lui Taylor - 1947, lama reflectantă a lui Françon și Nomarski - 1949 (vezi, de exemplu [21]). Calitățile unui microscop echipat cu astfel de lame depind nu numai de calitățile lamelor ci și de precizia cu care ele sunt așezate în interiorul sistemului optic.

3. 15. 3. Filtrajul compensator al lui Maréchal

În jurul anului 1950, cercetătorii Institutului de optică de pe lângă Universitatea din Paris erau asiduu preocupați de problema îmbunătățirii calității fotografiilor cu ajutorul filtrajului spațial în lumină coerentă. Rezultatele obținute atunci de către A. Maréchal și de colaboratorii săi au relansat interesul pentru filtrajul spațial - în particular și pentru procesarea optică a informației - în general. Așa se explică faptul că, în deceniul al șaselea al secolului nostru, înainte de inventarea laserilor, au apărut deja câteva lucrări considerate și azi ca lucrări de referință pentru domeniul prelucrării optice a informației; este vorba de lucrările grupului condus de P. Elias (1952- 1953), ale lui E. L. O'Neill (1956-1959) și apoi ale lui L. J. Cutrona (1960-1966) - toate în S.U.A.

Revenind la A. Maréchal vom spune că el a înțeles, de la bun început, că în fotografiere, unele efecte nedorite apar ca o consecință a "defectelor" corespunzătoare ale funcției de transfer optic a sistemului de format imaginea. Mai mult, pentru corectarea acestor defecte, el a propus următorul procedeu: în planul obiect al unui alt sistem, iluminat coerent, să se introducă transparentul obținut după dezvoltarea și fixarea filmului expus; dacă în planul focal al acestui sistem se introduce o lamă de shift fazic și o lamă atenuatoare bine alese, numite *filtru compensator*, atunci este posibil să fie sintetizată o imagine în care defectele inițiale ale transparentului (fotografiei) să fie eliminate, cel puțin parțial. În fond, raționamentul teoretic era următorul: dacă funcția de transfer optic a sistemului inițial (cel fotografic) este proastă, prin înmulțirea ei cu o altă funcție de transfer (cea a sistemului compensator) apare posibilitatea obținerii unui răspuns spectral mai bun - totul depinzând de calitățile filtrului compensator.

Să dăm un exemplu concret. De regulă, detaliile mici ale unor obiecte fotografice nu se pot pune în evidență prin procedeul tradițional. Aceasta este o consecință a faptului că procedeul tradițional nu permite "captarea" tuturor frecvențelor spațiale înalte. Maréchal nu propune "prinderea" acestor frecvențe spațiale ci, din contră, atenuarea, într-o oarecare măsură, a celor joase.

Un succes deosebit au înregistrat cercetătorii din grupul lui Maréchal în privința eliminării voalului unor imagini fotografice. Pentru a înțelege esența procedeeului să presupunem că, din greșeală, sistemul original (fotografic) a fost defocalizat mult, în așa fel încât răspunsul său la un impuls punctiform este un cerc luminos uniform (raționând în aproximația opticii geometrice!). Funcția de transfer optic corespunzătoare este de forma

$$\mathcal{H}(\rho) \approx 2 \frac{J_1(\pi\rho)}{\pi\rho}, \quad (3.490)$$

unde a este o constantă spațială iar $\rho = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$. În cel de-al doilea sistem, în planul focal posterior, se așează axial o lamelă absorbantă care atenuază puternic frecvențele joase din centrul lui \mathcal{H} , și o lamelă care defazează cu 180° primul lob negativ al lui \mathcal{H} . Funcția de transfer originală (curba punctată) și cea rezultată prin compensare (curba continuă) sunt reprezentate în fig.3.86. Îmbunătățirea contrastului imaginii prin compensare este evidentă.

În alte cazuri, din contră, în loc să fie utilă atenuarea frecvențelor spațiale joase, este utilă tocmai transmiterea lor și atenuarea sau eliminarea celorlalte frecvențe. Atunci, în planul focal al frecvențelor spațiale, filtrarea se realizează cu ajutorul unei diafragme iris (pinhole), care înlătură complet "zgomotele" imaginii.

Principiile propuse și investigate experimental de A. Maréchal, referitoare la filtrajul spațial, au fost analizate amănunțit, din punct de vedere teoretic, de către fizicianul american G. W. Stroke (în perioada 1967 - 1971).

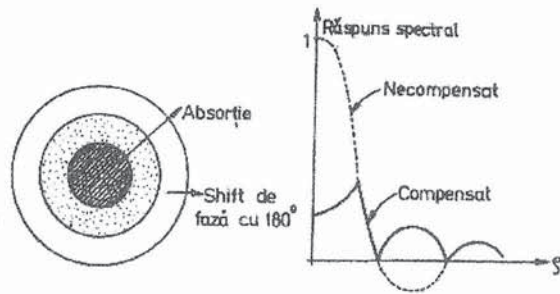


Fig.3.86. Principiul filtrajului compensator al lui Maréchal.

3. 15. 4. Apodizația

Nu de puține ori, cercetătorii cerului înstelat sunt confrunțați cu următoarea situație: pe o anumită direcție de observație, lângă o stea mare, strălucitoare, se află o stea mică, puțin strălucitoare, care practic abia poate fi observată. Ei au ridicat în fața opticienilor problema găsirii unei metode prin care steaua mică să poată fi observată mai bine. Așa a luat naștere tehnica cunoscută astăzi sub denumirea de *apodizație*.

După cum s-a arătat deja, câmpul luminos la nivelul planului imagine depinde în mod esențial atât de gabaritul pupilei de intrare în sistemul optic de format imagini cât și de forma transmitanței de amplitudine de la intrare. Ideea pe care se bazează apodizația este aceea de a modifica în mod convenabil transmitanța deschiderii la intrarea în instrument (lunetă, telescop), în așa fel încât intensitatea luminoasă a imaginii să fie distribuită practic numai în maximumul principal; în timpul apodizării, odată cu extinderea maximumului principal, are loc și o micșorare a intensității sale. Cercetările teoretice au arătat că acest lucru poate fi realizat prin micșorarea transmitanței intrării, de la centru spre marginile pupilei de intrare, după o anumită lege.

Exemplificăm principiul apodizației considerând o apertură de intrare de tip fantă liniară cu lărgimea a și cu transmitanța constantă peste tot. Dacă admitem că valoarea transmitanței este egală cu 1 în interiorul fantei și este nulă în exterior, putem scrie

$$t(x) = \text{rect}\left(\frac{x}{a}\right), \quad (3.491)$$

iar transformata sa Fourier are expresia

$$\mathcal{F}\{t(x)\} = a \cdot \text{sinc}(\pi a v_x), \quad (3.492)$$

v_x fiind frecvența spațială. Evident, intensitatea luminoasă la nivelul planului imagine este proporțională cu pătratul acestei mărimi, adică

$$I_i \sim a^2 \cdot \text{sinc}^2(\pi a v_x). \quad (3.493)$$

Să modificăm transmitanța intrării trecând de la funcția $\text{rect}(x/a)$ la funcția triunghi $\Lambda(2x/a)$ - vezi fig.3.87. Fie, deci, noua transmitanță

$$t_1(x) = \Lambda\left(\frac{2x}{a}\right), \quad (3.494)$$

a cărei transformată Fourier este

$$\mathcal{F}\{t_1(x)\} = \frac{a}{2} \cdot \text{sinc}^2\left(\frac{\pi a v x}{2}\right). \quad (3.495)$$

În acest caz, intensitatea luminoasă este

$$I_i^{(1)} \sim \frac{a^2}{4} \cdot \text{sinc}^4\left(\frac{\pi a v x}{2}\right). \quad (3.496)$$

Figura 3.87 redă comparativ, în partea de jos, dependența intensităților I_i (înainte de apodizație) și $I_i^{(1)}$ (după apodizație). Intensitatea maximului principal a scăzut de patru ori iar lărgimea sa, în domeniul frecvențelor spațiale, s-a dublat. Dacă comparăm și intensitatea primului maxim secundar, față de intensitatea maximului principal corespunzător, înainte și după apodizație, ajungem la concluzia că detecția s-a ameliorat considerabil: raportul a scăzut de la 4,5% la 0,2% - după apodizație. În schimb, după apodizație, rezoluția este mai puțin bună.

Un alt exemplu de apodizație este cel cu transparentă cosinusoidală. Fie deci

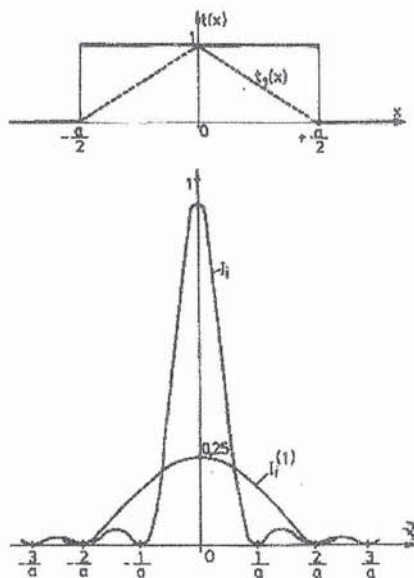


Fig.3.87. Apertură rectangulară apodizată cu funcția triunghi.

$$t_2(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) & \text{pentru } |x| \leq \frac{a}{2}, \\ 0 & \text{în rest,} \end{cases} \quad (3.497)$$

formă reprezentată comparativ cu forma rectangulară în fig.3.88. Transformata sa Fourier are expresia

$$\mathcal{F}\{t_2(x)\} = \frac{2a}{\pi} \cdot \frac{\cos(\pi a v x)}{4a^2 v_x^2 - 1}. \quad (3.498)$$

Intensitatea luminoasă, proporțională cu pătratul transformatei Fourier, are forma

$$I_i^{(2)} \sim a^2 \cdot \frac{4 \cos^2(\pi a v x)}{\pi^2 (4a^2 v_x^2 - 1)^2} \quad (3.499)$$

și este reprezentată grafic în fig.3.88 (jos). Și de data aceasta, maximul principal coboară și se lărgeste. Raportul dintre intensitatea primului maxim secundar și cea a maximului

principal a scăzut de la 4,5% la 0,1% după apodizație, o valoare ceva mai bună decât cea obținută cu transmitanța de tip triunghi.

De la această formă simplă de apodizație, în care transparentul cu transmitanța stabilită se așează direct în planul semnalului sau, prin depunere, pe suprafața lentilei obiectiv, teoria și practica apodizației a evoluat mult în ultima perioadă, problema punându-se, atât în cazul sistemelor coerente și necoerente, cât și în cazul celor cu coerență parțială. În principiu, se încearcă să se micșoreze cât mai mult posibil domeniul funcției $h(x, y)$ a răspunsului. Deoarece din acest punct de vedere nu poate fi depășită o anumită limită, problema apodizației se formulează practic mai puțin pretențios: să se găsească funcția $h(x, y)$ a sistemului studiat, în cadrul unui criteriu de calitate dat, care să satisfacă constrângerea $H(v_x, v_y) = 0$ pentru $|v_x| > v_{1 \max}$, $|v_y| > v_{2 \max}$. O constrângere la care este supusă

maximizarea energiei poate fi, de exemplu, limita de rezoluție Rayleigh. În această situație, determinarea funcției de apertură se reduce la rezolvarea unei ecuații integrale de tip Fredholm, liniară și omogenă. Valoarea proprie corespunzătoare reprezintă energia maximă posibilă pentru limita Rayleigh specificată (vezi de exemplu, lucrarea [36]).

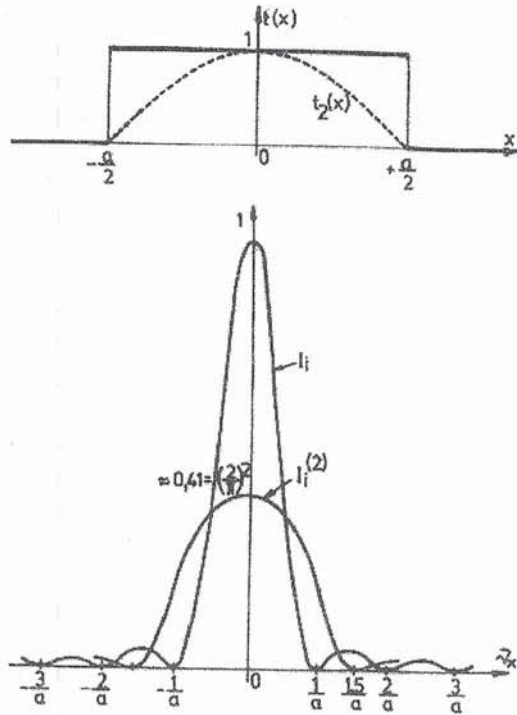


Fig.3.88. Apertură rectangulară apodizată cu funcția cosinus.

3. 15. 5. Filmele (plăcile) fotografice și proprietățile lor

Filmele (plăcile) fotografice au fost, sunt și vor continua să rămână materialele de bază pentru înregistrarea și stocarea optică (inclusiv holografică) a informației. Fără înțelegerea fenomenelor fizico-chimice care se petrec în procesul de interacțiune a semnalului optic cu filmul (și în etapele ulterioare de prelucrare), precum și fără cunoașterea caracteristicilor acestora, nu se poate înainta pe drumul analizei proceselor de prelucrare optică a informației, respectiv al înțelegerii corecte a proceselor de filtraj. De aceea, abătându-ne puțin de la linia expunerii, în această secțiune ne vom ocupa ceva mai detaliat de problematica filmelor (plăcilor) foto(holo)grafice și a proprietăților lor fundamentale.

În prezent, există un număr impresionant de "alte medii" și de "alte mijloace" utilizate pentru a substitui filmul fotografic în unul sau mai multe din rolurile sale clasice. Dintre acestea menționăm materialele de tip fotorezist, gelatinele dicromate, peliculele metalice (evaporabile sub acțiunea unor pulsuri luminoase intense), fotopolimerii, materialele magneto- și electro-optice, materialele fotocrome, dispozitivele

termoplast-fotoconductor, materialele feroelectrice (ceramice sau cristaline), cristalele lichide, dispozitivele de tip RUTICON sau FERICON etc. Acestea pot avea calități mai bune într-un domeniu spectral sau într-altul, timpi de stocare mai mici sau mai mari, fiabilitate mai bună sau mai puțin bună etc., dar, cu siguranță, nu vor putea înlocui total filmul (placa fotografică).

Un film fotografic, neexpus, este format dintr-un *mediu suport* (sticlă, acetat, hârtie) pe care este depusă o emulsie fotosensibilă ce constă dintr-o suspensie de halogenură de argint (AgCl - cea mai puțin sensibilă la lumină, AgBr, AgI - cea mai sensibilă) în gelatină. Când materialul fotosensibil este expus la lumină, granulele de halogenură de argint absorb energia optică și suferă un proces fizico-chimic complex. Cele care au absorbit destul de multă energie luminoasă vor conține "pete" subțiri de argint metalic, adică centri de dezvoltare. Filmul expus este supus apoi procesului chimic de *developare*, în timpul căruia, cu un *revelator* adecvat, sărurile de argint din centrul de dezvoltare sunt reduse și transformate în mici cristale de argint metalic. Granulele de halogenură de argint care nu au fost impresionate suficient nu vor conține centri de dezvoltare și deci, prin dezvoltare, nu vor suferi procesul de reducere la argint metalic. Urmează operația de *fixare* prin care se spală granulele de halogenură neimpresionate și se păstrează (se fixează) argintul metalic revelat prin operația anterioară. Granulele de argint metalic sunt desigur extrem de opace la frecvențe optice; de aceea opacitatea filmului sau plăcii dezvoltate și fixate va depinde de densitatea granulelor de argint metalic din fiecare porțiune a emulsiei inițiale.

Vom trece acum la introducerea unor mărimi fizice cu ajutorul cărora să putem da o descriere cantitativă. Fie \mathcal{I} intensitatea luminii incidente pe film la expunere, și T - durata expunerii sale. Mărimea

$$H = \mathcal{I} \cdot T, \quad (3.500)$$

poartă denumirea de *expunere*. Ea este proporțională cu energia incidentă pe unitatea de arie, în fiecare punct de pe suprafața fotosensibilă. Pentru filmul dezvoltat se definește *transmitanța de intensitate* $\tau(x, y)$ sub forma

$$\tau(x, y) = \text{Media locală} \left\{ \frac{I(\text{transmis în } (x, y))}{I(\text{incident în } (x, y))} \right\}. \quad (3.501)$$

Media locală din această definiție se consideră pe o suprafață mare în comparație cu granulația transversală a filmului, dar mică în comparație cu aria în care intensitatea transmisă variază semnificativ. Pentru a evita unele posibile confuzii ulterioare precizăm că vom nota cu \mathcal{I} - intensitatea luminoasă din procesul de expunere și cu I - intensitatea luminoasă (incidentă și transmisă) pe/de film, după dezvoltare.

Se numește *coeficient de înnegrire* sau *densitate fotografică* mărimea adimensională D definită prin relația

$$D = \log \left(\frac{1}{\tau} \right) = -\log \tau, \quad (3.502)$$

logaritmul fiind luat în baza 10. Acest parametru a fost introdus, pentru prima oară, în anul 1890, de către F. Hurter și V. C. Driffield, într-o lucrare în care se arată că transmitanța de intensitate (adică până la urmă D) depinde de masa de argint de pe unitatea de suprafață a filmului dezvoltat.

Foarte multă vreme, proprietățile de fotosensibilitate ale emulsiilor fotografice s-au reprezentat prin *curba de înnegrire* sau *curba Hurter-Driffield (curba H-D)*: $D = D(\log H)$. Ea exprimă variația densității de înnegrire D în funcție de logaritmul zecimal al expunerii $H = \mathcal{G} \cdot T$. În fig.3.89. se arată forma tipică a acestei curbe pentru un negativ. După cum se poate constata, curba H-D are trei porțiuni principale: o porțiune liniară intermediară (BC) și două porțiuni cu densitate cvasiconstantă (AB și CF). Porțiunea liniară, în care unor variații mici ΔD , egale, le corespund variații relative mici $\Delta H/H$, egale, se numește regiune de *expunere normală* și prezintă cea mai mare importanță (ea reprezintă regiunea de lucru). Această porțiune este caracterizată printr-o pantă $\gamma = \text{tg} \alpha$ și prin valoarea H_f - numită *inerția emulsiei* ($1/H_f$ poartă denumirea de *rapiditatea emulsiei*). Pantă γ - numită *factor de contrast*, depinde de natura emulsiei, a revelatorului și de timpul de dezvoltare (crește, ușor neliniar, odată cu acest timp). Celelalte două porțiuni ale curbei nu corespund unor expuneri normale: AB este porțiunea de *subexpunere* (valoarea cvasiconstantă D_f din acest domeniu se numește *val fotografic*) iar CF este porțiunea de *supraexpunere* (D are o valoare apropiată de cea de saturație).

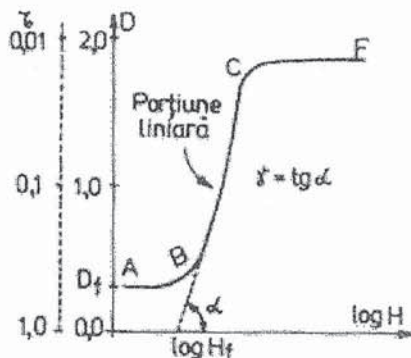


Fig.3.89. Curba Hurter-Driffield (H-D).

Revenind la porțiunea liniară, când γ este mare se spune că avem un *contrast ridicat*, iar când γ este mic - un *contrast coborât*. Printr-o alegere convenabilă a tipului de emulsie, a revelatorului și a timpului de dezvoltare, experimentatorul poate obține un negativ cu un γ impus apriori (fie subunitar, fie supraunitar). Pentru o expunere H dată, există și o ușoară dependență a lui γ de lungimea de undă. Curbele ce dau dependența lui D - ales în regiunea liniară, de lucru, de lungimea de undă se numesc *curbe de sensibilitate spectrală* ale emulsiilor. Din acest punct de vedere există emulsii ordinare, emulsii pancromatice - sensibile în tot domeniul vizibil, emulsii pentru infraroșu etc.

Puterea separatoare a emulsiilor fotografice este determinată de granulație. Cu cât granulația este mai fină, cu atât avem o putere separatoare mai bună. În general, limita de rezoluție determinată de granulație este cuprinsă între 10 și 30 μm și, numai pentru emulsii speciale, ea ajunge la valori de ordinul 1 μm . Limita de rezoluție datorată granulației este, de regulă, mult superioară celei datorate difracției în sistemul optic (de exemplu, la nivelul obiectivului) sau chiar aberațiilor sistemului.

Din mai multe motive, filmul fotografic poate fi privit ca un element (sistem) care transformă o distribuție incidentă de intensitate luminoasă \mathcal{G} , corespunzând intervalului de timp cât durează expunerea, într-o distribuție de intensitate luminoasă transmisă de filmul dezvoltat. Un astfel de punct de vedere, sistemic, poate fi adoptat atunci când filmul este înglobat, ca un element al său, într-un sistem optic *necorent*.

Dacă se lucrează în porțiunea liniară (expunerea normală) a curbei de înnegrire, putem scrie

$$D = \gamma_n \log H - D_0 = \gamma_n \log(\mathcal{G}T) - D_0, \quad (3.503)$$

unde γ_n este panta iar $-D_0$ este ordonata la origine. Indicele n a fost atașat pentru a indica faptul că ne referim la un film cu transparență negativă (sau "negativ"). Ținând cont că $D = -\log \tau_n$ obținem

$$\log \tau_n = D_0 - \gamma_n \log(\mathcal{G} T) \text{ sau } \tau_n = 10^{D_0} \cdot (\mathcal{G} T)^{-\gamma_n},$$

adică

$$\tau_n = K_n \cdot \mathcal{G}^{-\gamma_n}, \quad (3.504)$$

unde K_n este o constantă pozitivă. Transformarea descrisă de ultima relație - vezi și ecuația (3.501) - este puternic *neliniară* pentru orice $\gamma_n > 0$. Totuși, printr-un proces fotografic în două etape, este posibil să obținem o lege de forma (3.504) cu putere pozitivă în membrul drept. Cum trebuie procedat? În prima etapă se lucrează în mod obișnuit (expunere și dezvoltare), obținându-se un negativ. Apoi, în a doua etapă, lumina transmisă de acest negativ, este utilizată pentru expunerea unui al doilea film. După dezvoltare, acesta din urmă va avea o transparență pozitivă, adică va fi un "pozitiv". Într-adevăr, pentru prima etapă avem $\tau_{n1} = K_{n1} \cdot \mathcal{G}^{-\gamma_{n1}}$. Punând acest negativ în contact cu un film neexpus și iluminându-l ansamblul cu intensitatea luminoasă I_0 , intensitatea luminoasă de expunere pentru al doilea film este $I_0 \tau_{n1}$. După o nouă dezvoltare avem

$$\tau_p = K_{n2} \cdot (I_0 \cdot \tau_{n1})^{-\gamma_{n2}} = K_{n2} I_0^{-\gamma_{n2}} \cdot (K_{n1} \cdot \mathcal{G}^{-\gamma_{n1}})^{-\gamma_{n2}},$$

adică

$$\tau_p = K_p \cdot \mathcal{G}^{\gamma_{n1} \gamma_{n2}} = K_p \cdot \mathcal{G}^{\gamma_p}, \quad (3.505)$$

unde $K_p = K_{n1}^{-\gamma_{n2}} \cdot K_{n2} \cdot I_0^{-\gamma_{n2}} > 0$ este o constantă, iar $\gamma_p = \gamma_{n1} \cdot \gamma_{n2}$ este panta (factorul de contrast) pentru curba H-D a procesului în două etape. *Când $\gamma_p = 1$ (și numai atunci!) avem de-a face cu o transformare liniară de intensitate luminoasă*, adică filmul se comportă ca un element liniar în sistemul necoerent.

Ne propunem acum să analizăm modul în care se comportă filmul fotografic într-un sistem optic *coerent*. Abordarea problemei poate fi făcută în două moduri: 1) să considerăm că este vorba de o transformare a intensității luminoase din timpul expunerii într-o amplitudine complexă transmisă după dezvoltare sau 2) să considerăm că avem de-a face cu o transformare a amplitudinii complexe incidente în timpul expunerii într-o amplitudine complexă transmisă după dezvoltare. Ultima variantă poate fi adoptată dacă și numai dacă lumina incidentă pe transparent este la rândul său coerentă.

Amplitudinea complexă a luminii transmise de transparent este o mărime importantă din ambele puncte de vedere ce se pot adopta și, de aceea, este necesar să descriem transparentul prin *transmitanța complexă de amplitudine t* . Putem fi tentați să scriem pur și simplu că t este rădăcina pătrată a transmitanței de intensitate τ (definită în (3.501)). O astfel de definiție a lui t neglijează, totuși, posibilitățile de diferențe relative de fază ce apar când lumina trece prin transparent (ele pot apărea ca o consecință a variațiilor de grosime ale filmului, generate de neplaneitatea optică a suportului emulsiei, sau ale emulsiei). În mod corect, ar trebui să scriem $t(x, y) = +\sqrt{\tau(x, y)} \exp[i\phi(x, y)]$, unde $\phi(x, y)$ este shiftul de fază introdus de transparent.

În aplicațiile practice (în majoritatea lor) variațiile de grosime care îl determină pe $\phi(x, y)$ nu sunt dorite deoarece ele nu pot fi ușor controlate. De aceea, se încearcă eliminarea

sau diminuarea lor. Aceasta se poate realiza cu ajutorul așa-numitelor *celule de imersie*. O astfel de celulă este formată din două plăci paralele, de sticlă, cu suprafețe *plane din punct de vedere optic*. În spațiul dintre aceste plăci se află emulsia iar în stânga și în dreapta ei se introduce un lichid (ulei) cu indicele de refracție apropiat de cel al peliculei de emulsie - fig. 3.90. Filmul dezvoltat (transparentul) introdus într-o astfel de celulă, cu lichidul de imersie bine ales printr-un compromis avantajos, nu mai generează shifturi de fază apreciabile pentru transmitanța de amplitudine și putem scrie

$$t(x, y) = +\sqrt{\tau(x, y)} . \quad (3.506)$$

În aceste condiții, din relațiile (3.504) și (3.505), obținem

$$t_n = k_n |E|^{-\gamma_n} \quad \text{pentru un "negativ"}, \quad (3.507)$$

$$t_p = k_p |E|^{\gamma_p} \quad \text{pentru un "pozitiv"}, \quad (3.508)$$

E fiind amplitudinea complexă a câmpului incident în timpul expunerii ($\mathcal{G} = |E|^2$) iar k_n și k_p sunt constante pozitive.

În practică sunt importante (și deci dorite) mai ales situațiile în care filmul acționează ca un transformator *pătratic* de amplitudine complexă. Această situație se poate obține din relația (3.508) cu $\gamma_p = 2$. Este bine ca valoarea $\gamma_p = 2$ să corespundă unui interval de expunere cât mai mare. De aceea, ca și în cazul necoerent, analizat mai sus, se lucrează în două etape. În prima etapă se utilizează un film cu γ subunitar (de exemplu $\gamma_{n1} = 1/2$), iar în cea de-a doua etapă - un film cu contrastul γ destul de mare, astfel încât produsul celor doi factori de contrast să fie egal cu 2 (pentru $\gamma_{n1} = 1/2$ se alege $\gamma_{n2} = 4$ astfel încât $\gamma_p = \gamma_{n1} \cdot \gamma_{n2} = 2$). Valoarea mică a factorului de contrast în prima etapă mărește semnificativ intervalul dinamic de expunere.

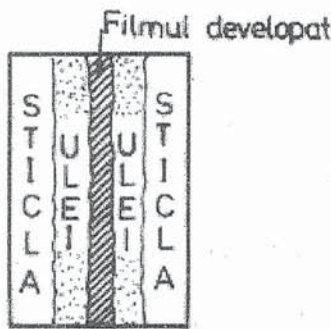


Fig.3.90. Celulă de imersie.

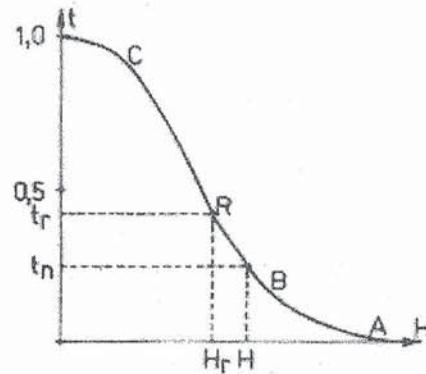


Fig.3.91. Curba t-H (transmitanță-expunere).

Pentru un interval de expunere *limitat*, este posibil totuși să obținem o lege de transformare pătratică pentru amplitudine cu un singur transparent, de orice pantă γ . Putem înțelege acest lucru dacă în locul curbei clasice H-D, de înnegrire, vom utiliza curba $t = t(H)$ propusă de francezul A. Maréchal. Din formulele scrise anterior, putem stabili ușor că, pentru un negativ, unor valori mari ale expunerii H le corespund valori mici ale

transmitanței t și, invers, valorile mari ale transmitanței t corespund unor valori mici ale expunerii. Forma tipică a unei curbe t - H pentru un negativ este redată în fig. 3.91. Aici porțiunea AB corespunde zonei de subexpunere iar porțiunea intermediară BC - zonei de expunere normală. În porțiunea BC se află și punctul de inflexiune R al curbei t - H , în vecinătatea căruia curba este practic liniară. Dacă se alege punctul de lucru suprapus peste punctul de inflexiune sau în apropierea acestuia, curba se poate aproxima local prin dreapta

$$t_n = t_r + \beta(H - H_r) = t_r + \beta' |\Delta E|^2, \quad (3.509)$$

unde β este panta locală a curbei t - H în punctul de referință ales, iar ΔE este creșterea (în general - variația) de amplitudine. Evident $\beta' = \beta \cdot T$ unde T este timpul de expunere. Pentru un negativ, atât β cât și β' sunt mărimi negative. Rezultă că, în vecinătatea punctului de referință, deci pe un interval limitat de expunere, filmul asigură o transformare pătratică pentru amplitudinea câmpului.

Forma curbei t - H se modifică semnificativ în funcție de valoarea factorului de contrast γ . În fig.3.92 se prezintă formele tipice pentru cazul unor filme cu contrast γ mare și mic. Filmele cu contrast mare oferă posibilitatea transformării unor variații mici de expunere în variații mari de transmitanță. Cu toate acestea, ele au dezavantajul micșorării intervalului dinamic de expunere. De regulă, pentru a lărgi la maximum intervalul de expunere, punctul de referință pe curba t - H se alege în imediata vecinătate a punctului corespunzător lui B de pe curba D- H (vezi fig.3.92)).

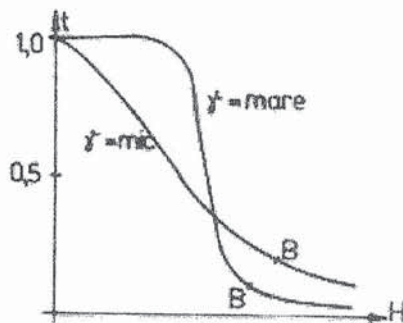


Fig.3.92. Forme ale curbei t - H pentru valori mari și mici ale lui γ .

În încheierea acestei secțiuni vom prezenta câteva date referitoare la funcțiile de transfer ale filmelor fotografice (ca elemente de sistem) și la modulația lor. Până aici noi am presupus - în mod tacit - că orice variație a expunerii, oricât de fină pe scala spațială, este transformată în variații corespunzătoare de densitate fotografică pe curba H - D a emulsiei. Practica ne arată însă că, atunci când variațiile de expunere (ΔH) sunt mai mici decât o anumită valoare, la transparentul rezultat nu vor apare variații corespunzătoare de densitate fotografică (ΔD). În limbajul frecvențelor spațiale aceasta înseamnă că filmul are un răspuns limitat.

Așa cum am arătat, filmul se comportă, în general, ca un element neliniar și de aceea nu i se poate asocia în mod propriu o funcție de transfer pentru transformarea pe care o realizează. Cu toate acestea, având în vedere că, în cea mai mare parte a lor, fenomenele fizice care limitează frecvențele spațiale ale răspunsului sunt liniare, vom încerca să introducem (totuși) o astfel de funcție. Între aceste fenomene menționăm împrăștierea luminii în emulsie în timpul procesului de expunere și difuzia chimică în cursul procesului de dezvoltare. Este de dorit și este posibil să separăm proprietățile liniare - care limitează frecvența spațială a răspunsului - de cele neliniare. Altfel spus, transformarea fotografică generală, globală, poate fi considerată ca o succesiune de procese: o transformare liniară, invariantă spațial, care posedă o anumită funcție de transfer și, apoi, o transformare neliniară, fără memorie, cu proprietăți de tipul celor analizate deja în acest paragraf.

Transformarea liniară poate fi presupusă ca analogă cu acțiunea unui filtru. Fie, de exemplu, următoarea expunere cosinusoidală

$$H = H_0 + H_1 \cos(2\pi fx), \quad (3.510)$$

ușor de realizat din punct de vedere practic, caracterizată prin modulația adimensională

$$M_i = \frac{H_1}{H_0}, \quad (3.511)$$

adică prin raportul amplitudinii de oscilație spațială a expunerii (H_1) la valoarea de fond (H_0). Dacă se măsoară apoi variațiile densității D a transparentului rezultat, pe baza formei *cunoscute* a curbei H-D putem determina (vezi sensul săgeții din fig.3.93) o distribuție "efectivă" de expunere cosinusoidală. Modulația M_{ef} a distribuției efective de expunere, astfel determinată, va fi întotdeauna mai mică decât modulația adevărată M_i a distribuției de expunere inițială. Vom defini, prin urmare, o *funcție de transfer a modulației* sub forma

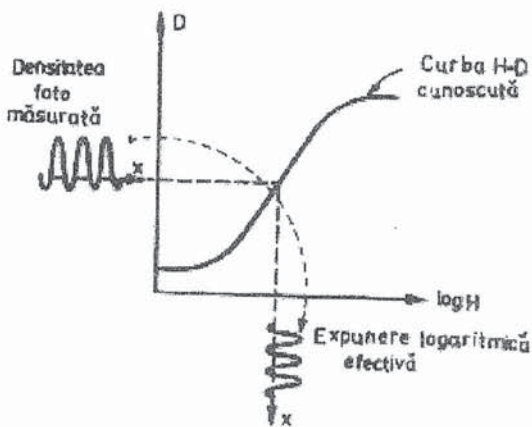


Fig.3.93. Măsurarea distribuției efective de expunere.

$$M(f) = \frac{M_{ef}(f)}{M_i(f)}, \quad (3.512)$$

unde am pus în evidență dependența de frecvența spațială f a tuturor mărimilor. În plus, depinzând de forma concretă și de extinderea spațială a răspunsului la impuls δ - form a părții liniare din transformarea realizată de film, distribuția efectivă de expunere poate suferi și un shift de fază $\Omega(f)$ față de distribuția adevărată de expunere. De aceea, în general, răspunsul spectral al părții liniare din transformarea produsă de film poate fi descris de *funcția complexă de transfer*

$$M_C(f) = M(f) \cdot \exp[-i\Omega(f)]. \quad (3.513)$$

Distribuția efectivă de expunere, aplicată *părții neliniare* a transformării realizată de film poate fi scisă acum sub forma

$$H = H_0 + M_C(f)H_1 \cos(2\pi fx) = H_0 + M(f)H_1 \cdot \cos(2\pi fx - \Omega(f)). \quad (3.514)$$

În fig.3.94 se redă forma tipică a dependenței $M(f)$ pentru un film cu performanțe uzuale. În general, intervalul de frecvențe spațiale pentru care $M(f)$ este apropiat de unitate variază de la film la film și depinde de granulație, de grosimea emulsiei și de alți factori. În mod obișnuit, f_{\max} ajunge până la 3000 linii/milimetru iar la unele materiale fotocrome - până la 10000 linii/milimetru.

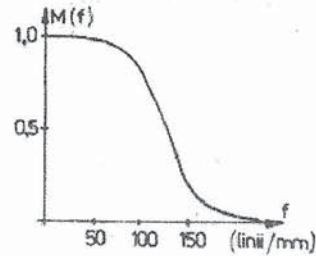


Fig.3.94. Forma tipică a funcției $M(f)$.

3. 15. 6. Sisteme de prelucrare optică a informației în lumină necoerentă

O clasă importantă de sisteme pentru prelucrarea optică a informației este cea la care, în esență, proiectarea se bazează numai pe considerente de optică geometrică. Deoarece putem fi încrezători în ceea ce prezice optica geometrică doar într-o primă aproximație, aceste sisteme nu au, desigur, performanțe deosebite și se utilizează numai în cazul iluminării necoerente. Ele sunt relativ simple - ca principii constructive și funcționale - dar au, din mai multe puncte de vedere, o capacitate de operare limitată. Având în vedere toate acestea, cititorul va putea înțelege că sistemele pe care le vom prezenta imediat sunt importante mai mult pentru exemplificarea metodologică (de proiectare și operare) pe care ne-o oferă.

1. *Obținerea integralei produsului a două funcții.* Primul proiect al unui sistem optic capabil să dea integrala produsului a două funcții (integrator) a fost propus în perioada 1927-1931 de către fizicianul german E. Goldberg din Dresda. Esența sa este următoarea: dacă un transparent cu transmitanța de intensitate $\tau_1(x, y)$ este urmat de un alt transparent cu transmitanța de intensitate $\tau_2(x, y)$, lipit de primul, atunci, în lumină necoerentă, transmitanța de intensitate a ansamblului este egală cu produsul $\tau_1(x, y) \cdot \tau_2(x, y)$.

Ansamblul este introdus între două lentile convergente L_1 și L_2 , ca în fig.3.95, unde S este o sursă uniformă, necoerentă, iar D este un fotodetector mic, ce măsoară intensitatea *totală* transmisă de sistem prin ansamblul celor două transparente. Intensitatea curentului la fotodetector este proporțională cu integrala produsului $\tau_1 \cdot \tau_2$, adică

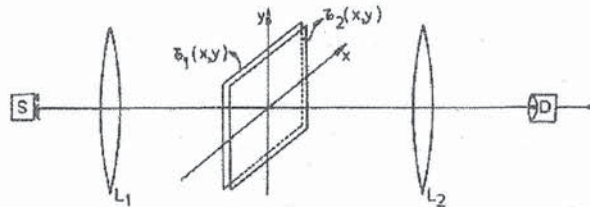


Fig.3.95. Primul sistem optic capabil să dea integrala unui produs.

$$I \sim \iint_{-\infty}^{+\infty} \tau_1(x, y) \cdot \tau_2(x, y) dx dy. \quad (3.515)$$

Precizăm că limitele de integrare sunt $-\infty$ și $+\infty$ numai dacă admitem că extinderea finită a transparentelor a fost luată în considerare la definirea funcțiilor τ_i , $i = 1, 2$. Se subînțelege că lentila L_1 are rolul de a proiecta imaginea mărită a sursei S pe transparentul τ_1 iar lentila

L_2 proiectează imaginea micșorată, transmisă de τ_2 , pe fotodetectorul D.

Atunci când este necesar să schimbăm rapid un anumit transparent cu un altul, din cauza contactului strâns între τ_1 și τ_2 configurația din fig.3.95 este greoaie, dezavantajoasă. De aceea, în practică, se utilizează mai ales

configurația schițată în fig.3.96 funcționând cu trei lentile. Lentila L_1 proiectează, ca și în cazul anterior, pe primul transparent, imaginea mărită a sursei S. Planele celor două transparente sunt *conjugate optic* față de lentila intermediară L_2 . În sfârșit, lentila L_3 strânge lumina pe fotodetectorul D, la care, curentul înregistrat este dat de aceeași relație (3.515). Observăm că, pentru compensarea răsturnării imaginii este necesar ca transparentul τ_1 să fie introdus în procesor cu o geometrie inversată.

O operație liniară mai generală care se poate efectua cu funcțiile τ_1 și τ_2 este *operația de convoluție*. Ambele scheme reprezentate anterior pot servi, cel puțin în principiu, pentru realizarea sa practică. De exemplu, convoluția unidimensională a funcțiilor τ_1 și τ_2 poate fi obținută prin deplasarea uniformă (cu viteză constantă) a unui transparent și menținerea fixă a celuilalt. Referindu-ne la configurația din fig.3.96 și admitând că transparentul τ_2 este cel introdus cu geometrie inversată în sistem, fotocurentul detectat are forma

$$I \sim \iint_{-\infty}^{+\infty} \tau_1(x, y) \cdot \tau_2(-x, -y) dx dy.$$

Dacă transparentul τ_2 se mișcă în sensul negativ al axei x, cu viteza constantă v, la fotodetector se înregistrează fotocurentul

$$I(t) \sim \iint_{-\infty}^{+\infty} \tau_1(x, y) \cdot \tau_2(vt - x, -y) dx dy, \quad (3.516)$$

adică o convoluție unidimensională (până la un factor de proporționalitate) a funcțiilor τ_1 și τ_2 . Putem să ne imaginăm că baleierea în lungul axei x este repetată secvențial, pentru diferite deplasări - y_m de-a lungul axei y; fotocurenții obținuți vor fi

$$I_m(t) \sim \iint_{-\infty}^{+\infty} \tau_1(x, y) \cdot \tau_2(vt - x, y_m - y) dx dy. \quad (3.516')$$

Acest șir de funcții $I_m(t)$ reprezintă convoluții bidimensionale; șirul este eșantionat prin deplasările - y_m în lungul axei y.

2. *Obținerea convoluției fără mișcarea mecanică a transparentelor.* Procedeu descris pentru obținerea convoluției bidimensionale este extrem de incomod din cauza baleiajului și al deplasării secvențiale; în plus, el necesită scurgerea unui interval de timp îndelungat pentru realizare. Prezentăm acum un procedeu prin care se poate realiza operația de convoluție *fără mișcare mecanică relativă*. Sistemul capabil să realizeze această

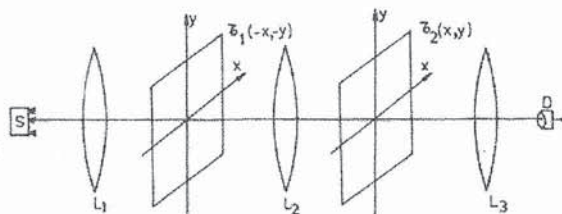


Fig.3.96. Alt sistem optic capabil să furnizeze integrala unui produs.

operație este reprezentat în fig.3.97, în care D este un film fotografic sau, mai bine, un detector electronic (de exemplu, un tub vidicon) așezat în planul focal posterior al lentilei L_2 . Sursa extinsă S este plasată în planul focal anterior al lentilei convergente L_1 . Dincolo

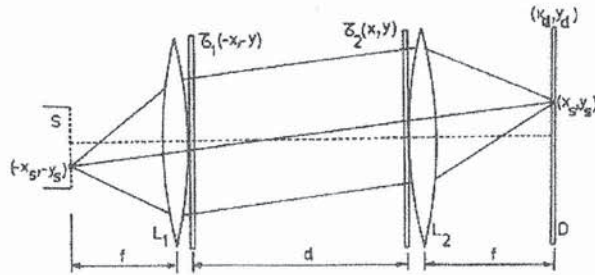


Fig.3.97. Sistem optic ce realizează convoluția, fără mișcarea mecanică a părților sale.

de L_1 , în imediata sa apropiere, se află transparentul τ_1 introdus cu geometrie inversată. La distanța d față de primul transparent, în fața unei a doua lentile L_2 , se așează, fără inversare de axe, transparentul τ_2 . Detectorul D înregistrează distribuția de intensitate luminoasă la nivelul planului focal posterior al lentilei L_2 .

Fie o sursă luminoasă punctiformă, cu coordonatele $(-x_s, -y_s)$. Fasciculul emis de această sursă punctiformă, *oricare* ar fi coordonatele sale, devine paralel între L_1 și L_2 , adică, practic, între transparentele τ_1 și τ_2 . Transparentul τ_2 este astfel iluminat cu o distribuție de intensitate proporțională cu $\tau_1[-x + x_s(d/f); -y + y_s(d/f)]$. După trecerea prin τ_2 , razele luminoase ale fasciculului se strâng în planul focal D al lentilei L_2 , în punctul de coordonate (x_s, y_s) - dacă cele două lentile au distanțe focale egale. Astfel, distribuția de intensitate la nivelul detectorului poate fi scrisă sub forma

$$I(x_d = x_s, y_d = y_s) \sim \iint_{-\infty}^{+\infty} \tau_1\left(\frac{d}{f}x_s - x, \frac{d}{f}y_s - y\right)\tau_2(x, y)dx dy, \quad (3.517)$$

adică, până la un factor de proporționalitate, avem de-a face cu convoluția bidimensională a funcțiilor τ_1 și τ_2 .

3. Sinteza răspunsurilor la impuls. Prezentăm acum principiul sintezei unui anumit răspuns la impuls cu ajutorul sistemului reprezentat în fig.3.98. Lentila L_1 proiectează obiectul S pe transparentul τ_1 , aflat la distanța $2f$ de lentila L_2 . Ultima lentilă formează imaginea lui τ_1 , cu mărirea 1, în planul P', aflat la distanța $2f$ în dreapta sa. În imediata apropiere a lentilei L_2 se află transparentul τ_2 a cărui transmitanță are forma răspunsului la impuls pe care îl dorim. Semnalul de ieșire este detectat la nivelul planului P, situat la distanța Δ față de planul P'.

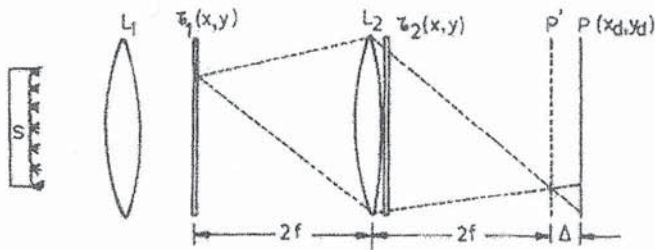


Fig.3.98. Sinteza răspunsului la impuls cu un sistem defocalizat.

Modul în care operează sistemul poate fi înțeles mai ușor dacă admitem că o sursă punctiformă, de intensitate unitate, este plasată într-un punct oarecare (x, y) de pe transparentul τ_1 și determinăm distribuția de intensitate luminoasă la nivelul planului P.

În conformitate cu optica geometrică, razele ce trec prin τ_2 converg într-un punct, de pe planul P' , conjugat optic cu punctul sursă, după care diverg și dau o proiecție micșorată a transparentului τ_2 pe planul P (vezi traseele punctate din fig. 3.98.). Proiecția este centrată pe punctul de coordonate $x_d = -x[1 + (\Delta/2f)]$, $y_d = -y[1 + (\Delta/2f)]$ și ea este mai mică decât τ_2 de $2f/\Delta$ ori. Ținând cont de inversarea lui τ_2 , prin proiecția ce se realizează, pentru răspunsul la impulsul unitar (punctiform) considerat putem scrie

$$|h(x_d, y_d; x, y)|^2 \sim \tau_2 \left\{ -\frac{2f}{\Delta} \left[x_d + \left(1 + \frac{\Delta}{2f} \right) x \right], -\frac{2f}{\Delta} \left[y_d + \left(1 + \frac{\Delta}{2f} \right) y \right] \right\}. \quad (3.518)$$

Intensitatea luminoasă detectată la nivelul punctului de coordonate $(-x_d, -y_d)$ are deci forma unei integrale de convoluție

$$I(-x_d, -y_d) \sim \iint_{-\infty}^{+\infty} \tau_1(x, y) \tau_2 \left\{ \frac{2f}{\Delta} \left[x_d - \left(1 + \frac{\Delta}{2f} \right) x \right], \frac{2f}{\Delta} \left[y_d - \left(1 + \frac{\Delta}{2f} \right) y \right] \right\} dx dy. \quad (3.519)$$

Toate sistemele de procesare necoerentă, bazate pe legile opticii geometrice, au o deficiență comună: datele de intrare și răspunsul la impuls fiind numai pozitive (intensități luminoase), nu există posibilitatea de procesare a semnalelor negative sau bipolare. În plus, toate sistemele proiectate cu ajutorul opticii geometrice trebuie să aibă o asemenea "structură internă" și un asemenea gabarit încât efectele de difracție să fie în întregime neglijabile. Această cerință este satisfăcută de sistemul reprezentat în fig.3.95 și, cu anumite precauții, o putem obține și în cazul sistemului din fig.3.96. În schimb, sistemele reprezentate în următoarele două figuri sunt deficitare din acest punct de vedere, mai ales atunci când structura spațială de date a transparentelor (de apertură finită!) este bogată în detalii. Acum difracția este cu atât mai importantă cu cât structura spațială de pe transparente este mai fină; în consecință, propagarea luminii se abate de la legile opticii geometrice și rezultatul procesării nu mai poate fi cel proiectat.

În concluzie, sistemele de tipul celor prezentate în această secțiune se pot utiliza numai pentru prelucrarea unor funcții reale nenegative, care au un număr nu foarte mare de elemente ce se cer a fi rezolvate, adică pentru funcții simple, fără multe "complexități". Chiar și în aceste condiții, rezultatul procesării este numai aproximativ.

La un moment dat, după apariția laserilor s-a crezut că neajunsurile procesării necoerente pot fi înlăturate sau evitate în cadrul unor scheme de procesare coerentă. Este adevărat, cu ajutorul radiațiilor coerente s-au putut realiza progrese mari în acest domeniu dar au apărut, în mod inevitabil, limite și neajunsuri și în procesarea coerentă. De aceea, în ultimii 15-20 ani, s-a observat o revenire și o creștere a interesului cercetătorilor față de procesarea necoerentă, cu luarea în considerare a efectelor de difracție. Pentru exemplificare, în fig.3.99 redăm schema simplificată a unui procesor ce permite

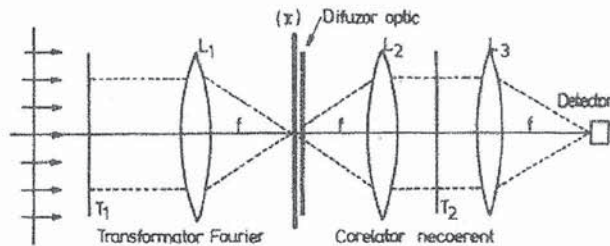


Fig.3.99. Schema unui procesor pentru recunoașterea caracterelor, bazat pe corelarea spectrului energetic.

recunoașterea caracterelor (formelor), bazat pe corelarea spectrului energetic. Transparentul T_1 este iluminat de o undă plană (cvasi) monocromatică, astfel că la dreapta sa avem amplitudinea complexă E_1 . În planul focal (π) al lentilei L_1 obținem transformata Fourier $\mathcal{F}\{E_1\}$. Difuzorul optic ce urmează distruge coerența în planul transformării Fourier și creează o distribuție necoerentă de intensități (asemănătoare unor surse "autoluminoase") care este proporțională cu $|\mathcal{F}\{E_1\}|^2$, adică cu *spectrul energetic* al semnalului E_1 . Un al doilea transparent, T_2 , plasat între lentilele L_2 și L_3 ale "corelatorului necoerent", filtrează informația incidentă, făcând ca la nivelul detectorului să obținem convoluția lui $|\mathcal{F}\{E_1\}|^2$ cu spectrul său energetic.

Având în vedere că transmitanțele de intensitate ale transparentelor T_1 și T_2 sunt, de obicei, funcții reale și considerând că axele din planul T_2 sunt oglindite față de cele din planul T_1 , putem considera că ieșirea din sistemul optic analizat este în realitate o corelație. De aceea, acest sistem se numește *corelator de spectre energetice*. El poate fi utilizat în practică pentru recunoașterea caracterelor literale și cifrice, căci semnalul de ieșire (corelația) este sensibil diferit de zero numai dacă cele două transparente au spectre identice de frecvențe spațiale. În poziția T_1 se așează transparentul în care dorim să știm dacă este prezent caracterul (cifra, litera) de pe transparentul T_2 . Succesul recunoașterii depinde de cât de mult se deosebesc diferitele spectre ce "se compară". Față de metoda de recunoaștere în lumină coerentă, bazată pe utilizarea filtrelor adaptate (vezi secțiunea 3. 15. 9), cea de aici prezintă un mare avantaj: semnalul de corelație de la ieșire nu este așa de sensibil la poziționarea și orientarea transparentelor T_1 și T_2 .

Pe principiul schițat mai sus, a fost posibilă construirea unor procesoare pentru recunoașterea cifrelor și literelor din diverse limbi, respectiv a mașinilor de traducere dintr-o limbă în alta.

3. 15. 7. Sinteza în domeniul frecvențelor (lumină coerentă)

Sistemele optice iluminate coerent sunt *liniare în raport cu amplitudinea complexă a luminii*. De aceea, pentru descrierea lor se poate opera cu amplitudini complexe, trecându-se la intensități luminoase numai în etapa finală, la ieșirea din sistem. Un exemplu tipic de procesor optic analogic, ce utilizează metoda filtrajului spațial, este reprezentat în fig.3.100. Lentila L_1 transformă fasciculul emis de sursa punctiformă S într-un fascicul colimat. Semnalul de intrare ce trebuie filtrat este introdus ca o transmitanță de amplitudine $g(x_1, y_1)$ - cu variații spațiale - în planul P_1 . Lentila L_2 (destul de mare, pentru a face ca efectele de vigneta să fie neglijabile) transformă Fourier funcția g , producând la nivelul planului P_2 o distribuție de amplitudine $k_1 G(x_2/\lambda f, y_2/\lambda f)$; aici k_1 este o constantă complexă, iar G este transformata Fourier a lui g .

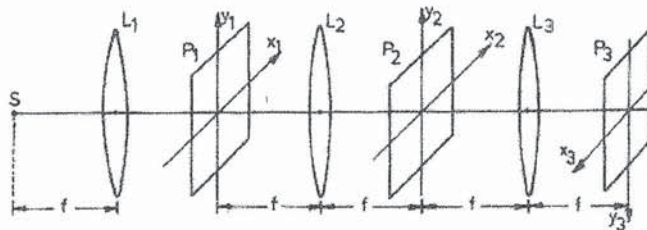


Fig.3.100. Procesor optic coerent funcționând pe principiul filtrajului spațial.

În planul P_2 se introduce un filtru cu ajutorul căruia putem manevra atât amplitudinea cât și faza spectrului G . Fie $t_2(x_2, y_2)$ transmitanța de amplitudine a acestui filtru. Dacă $H(\xi, \eta)$, unde $\xi = x_2/\lambda f$, $\eta = y_2/\lambda f$, este funcția de transfer optic a filtrului, atunci $t_2 \sim H(\xi, \eta)$. Distribuția de amplitudine dincolo de filtru este proporțională cu produsul GH . În sfârșit, lentila L_3 transformă această distribuție de amplitudine într-o distribuție de intensitate care, la nivelul planului P_3 , are forma

$$I(x_3, y_3) = K \left| \iint_{-\infty}^{+\infty} g(\xi, \eta) h(-x_3 - \xi, -y_3 - \eta) d\xi d\eta \right|^2, \quad (3.520)$$

h fiind răspunsul la impuls al filtrului (transformata Fourier a lui H).

Semnele minus din fața lui x_3 și y_3 sunt o consecință a celor două transformări Fourier succesive. Dacă sistemul de axe în planul P_3 se alege ca în figura 3.100, adică este oglindit, în loc de $-x_3$ și $-y_3$ putem scrie $+x_3$ și $+y_3$ și, în aceste condiții

$$I(x_3, y_3) = K \left| \iint_{-\infty}^{+\infty} g(\xi, \eta) h(x_3 - \xi, y_3 - \eta) d\xi d\eta \right|^2. \quad (3.520')$$

Exemplificăm cele discutate mai întâi pentru cazul în care $H(\xi, \eta) \equiv 1$, (nici-o filtrare), adică $h(x, y) = \delta(x, y)$. Atunci $I(x_3, y_3) = K |g(x_3, y_3)|^2$ adică se obține o distribuție de intensitate luminoasă proporțională cu cea a obiectului (se obține imaginea ideală a obiectului), căci filtrul transmite mai departe în mod egal toate frecvențele spațiale. În cazul invers, când $H(\xi, \eta) = \delta(\xi, \eta)$, adică filtrul transmite numai spotul central, avem corespunzător $h(x_3 - \xi, y_3 - \eta) = \text{constant}$ și formula de mai sus ne dă

$$I(x_3, y_3) = K \left| K' \iint_{-\infty}^{+\infty} g(\xi, \eta) d\xi d\eta \right|^2 = \text{constant}. \quad (3.521)$$

Prin urmare, de data aceasta ecranul (planul imagine) este iluminat uniform și nu se distinge nici-un detaliu al obiectului.

Foarte instructiv este cazul în care $H(\xi, \eta)$ este independent de ξ , depinzând δ -form de η . Este cazul în care în planul P_2 se introduce o fantă liniară paralelă cu axa y_2 (dacă ne referim de exemplu, la experiența Abbe-Porter, această fantă transmite mai departe numai spoturile de pe axa y_2). Scriind $H(\xi, \eta) \sim \delta(\eta)$ obținem corespunzător $h(x_3 - \xi, y_3 - \eta) \sim \delta(x_3 - \xi)$ și atunci

$$I(x_3, y_3) \sim \left| \iint_{-\infty}^{+\infty} g(\xi, \eta) \cdot \delta(x_3 - \xi) d\xi d\eta \right|^2 = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} g(x_3, \eta) d\eta \right|^2 \quad (3.522)$$

care depinde numai de x_3 . Rezultă că în planul imagine, în lungul direcției x_3 se reconstituie o imagine similară obiectului, din aceasta lipsind însă detaliile de pe cealaltă direcție. Gândindu-ne din nou la experiența Abbe-Porter, aceasta înseamnă că se vor observa

imaginile firelor orizontale nu și ale firelor verticale. În cazul opus, când se utilizează un filtru cu $H(\xi, \eta) \sim \delta(\xi)$ avem $h(x_3 - \xi, y_3 - \eta) \sim \delta(y_3 - \eta)$ și corespunzător $I(x_3, y_3) \sim \left| \int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi, y_3) d\xi \right|^2$, adică o distribuție de intensitate luminoasă independentă de x_3 , dar dependentă de y_3 . Acum filtrul transmite spoturile dintr-o fantă orizontală (de exemplu, de pe axa x_2) iar în planul imagine vedem liniile (firele) verticale.

Un exemplu spectaculos de filtrare spațială este cel al "tigrului în cușcă", gratiile cuștii fiind verticale. Cu un filtru adecvat, introdus în planul P_2 (ca în experiența Abbe-Porter) și cu filmul tigrului în cușcă situat în planul P_1 , putem obține imaginea unui tigru liber (eliminarea liniilor verticale). Această metodă se utilizează în mod frecvent pentru reducerea zgomotelor periodice ale unor semnale, îmbunătățirea contrastului, accentuarea conturilor etc.

În orice situație reală, filtrele au o bandă de trecere limitată superior. De aceea, în locul funcției de transfer ideale $H(\xi, \eta)$ trebuie considerată o funcție de transfer reală $H'(\xi, \eta)$. Fie $H'(\xi, \eta) = H(\xi, \eta) \text{rect}(\xi/2f_m) \text{rect}(\eta/2f_m)$, f_m fiind frecvența spațială maximă transmisă și $H(\xi, \eta) \equiv 1$. Corespunzător, în cazul $h(x, y) = \delta(x, y)$, avem $h'(x, y) = 4f_m^2 \cdot \text{sinc}\left(2f_m \frac{x}{\pi}\right) \text{sinc}\left(2f_m \frac{y}{\pi}\right)$ și în locul relației $I(x_3, y_3) \sim |g(x_3, y_3)|^2$ obținem

$$I(x_3, y_3) \sim \left(4f_m^2\right)^2 \left| g(x_3, y_3) \otimes \text{sinc}\left(2f_m \frac{x_3}{\pi}\right) \text{sinc}\left(2f_m \frac{y_3}{\pi}\right) \right|^2. \quad (3.523)$$

În mod riguros, și semnalul este limitat, de o apertură de la nivelul planului P_1 . Dacă aceasta are formă pătratică, cu latura a , în locul funcției g va trebui să scriem funcția $g'(x_1, y_1) = g(x_1, y_1) \text{rect}(x_1/a) \text{rect}(y_1/a)$.

Procesorul optic coerent descris mai sus, poate fi folosit și pentru efectuarea unor operații matematice asupra funcției g . De exemplu, dacă dorim să obținem derivata $\partial g/\partial x$, în planul P_2 trebuie să introducem un filtru cu funcția de transfer optic (coerent) $H = 2\pi i \xi$ (deoarece, dacă transformata Fourier a funcției f este F , atunci transformata Fourier a funcției $\partial f/\partial x$ este $2\pi i \xi F$). În mod analog, pentru obținerea derivatei de ordinul al doilea $\partial^2 g/\partial x \partial y$, trebuie utilizat un filtru cu funcția de transfer $H = -4\pi^2 \xi \eta$. Cu filtrul $H = -4\pi^2 (\xi^2 + \eta^2)$ se obține operatorul Laplace bidimensional $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$.

Pentru rezolvarea ecuației diferențiale $\Delta g = -s(x, y)$, cu condițiile la limită $g \rightarrow 0$, $\partial g/\partial x \rightarrow 0$, $\partial g/\partial y \rightarrow 0$ pentru $x, y \rightarrow \pm\infty$, se poate utiliza un filtru cu funcția de transfer $H = \left[4\pi^2 (\xi^2 + \eta^2)\right]^{-1}$. Într-adevăr, deoarece transformatele Fourier ale funcțiilor g și s sunt legate prin relația $G(\xi, \eta) = \left[4\pi^2 (\xi^2 + \eta^2)\right]^{-1} \cdot S(\xi, \eta)$, unde $G(\xi, \eta) = \mathcal{F}\{g(x, y)\}$ și $S(\xi, \eta) = \mathcal{F}\{s(x, y)\}$, plasând în planul P_1 funcția $s(x, y)$ iar în planul P_2 filtrul $H = \left[4\pi^2 (\xi^2 + \eta^2)\right]^{-1}$, obținem în planul P_3 distribuția de amplitudine luminoasă $g(x, y)$.

Una din operațiile importante ce se poate realiza cu ajutorul procesorului optic coerent descris, este cea de *transformare a codurilor*. De exemplu, trebuie transformat semnalul de intrare $g(x, y)$ în semnalul de ieșire *dat* $s(x, y)$. O astfel de transformare poate fi realizată cu ajutorul filtrului cu funcția de transfer optic $H = S/G$. Realizarea practică a unui

astfel de filtru optic nu este însă posibilă. De aceea, de obicei, în locul său se folosește un filtru cu funcția de transfer $H = G^*S$, care se mai poate scrie și sub forma $H = G^*G(S/G) = |G|^2 \cdot (S/G)$. Dacă modulul $|G|$ este constant, substituirea se dovedește a da un rezultat totalmente echivalent. Operația descrisă poate fi utilizată pentru corectarea posibilelor deformații de fază ale fasciculelor luminoase.

Sistemul descris mai sus operează cu două lentile ce realizează transformate Fourier - lentilele L_2 și L_3 . Presentăm acum o schemă de procesor optic coerent ce folosește ca transformator Fourier o singură lentilă - vezi fig.3.101. Lentila L_1 colimează fasciculul de lumină provenit de la sursa punctiformă S . Planul P_1 în care este introdusă transmițanța de amplitudine g se află la distanța $2f$ în fața lentilei L_2 (ce are distanța focală f); aceasta efectuează atât transformarea Fourier cât și celelalte operații. În planul focal P_2 al lentilei L_2 se obține spectrul G al funcției g multiplicat cu factorul pătratic de fază

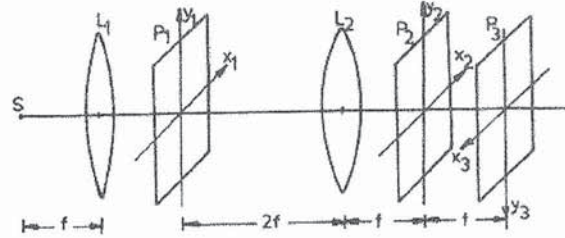


Fig.3.101. Procesor optic coerent cu două lentile.

$\exp\left[-\frac{ik}{2f} \cdot (x_2^2 + y_2^2)\right]$ (deoarece "obiectul" nu se află în planul său focal ci la distanță dublă). Ca și în cazul anterior, filtrul plan de frecvențe cu transmițanța de amplitudine proporțională cu H este introdus tot în acest plan (P_2). Cel de-al treilea plan P_3 , este localizat la distanța $2f$ la dreapta lentilei L_2 și este conjugat optic cu planul P_1 al obiectului (căci $1/2f + 1/2f = 1/f$). Rezultă că intensitatea la nivelul planului P_3 este dată din nou de relația (3.520') unde h este răspunsul la impuls, adică transformata Fourier a funcției H .

Din păcate, ultimul sistem prezintă două dezavantaje practice majore față de cel discutat anterior. În primul rând, acum, planul în care se află funcția g se află la o distanță de două ori mai mare față de lentila L_2 decât în primul caz. De aceea, pentru o distanță focală *dată* a lentilei L_2 și pentru *aceeași* dimensiune a semnalului de intrare, gabaritul lentilei L_2 trebuie să fie mult mai mare în al doilea caz dacă dorim ca efectele de vigneta să fie într-adevăr neglijabile. În afară de aceasta, înlăturarea influenței factorului pătratic de fază ce îl multiplică pe G în planul P_2 necesită, în realitate, folosirea unor filtre cu bandă de frecvențe spațiale îngustă. O astfel de limitare nu există în cazul sistemului reprezentat în fig.3.100.

Prezentăm în încheiere schema așa-numitului *procesor astigmatic*, cu lentile cilindrice, capabil să prelucreze, în locul unei funcții de două variabile, o multitudine de funcții de o singură variabilă independentă (vezi fig.3.102). Lentila colimatoare L_1 este urmată de planul P_1 , al semnalului de intrare, ce constă dintr-un șir vertical de funcții de transmițanță unidimensională, fiecare cu variație orizontală. Urmează o lentilă cilindrică L_2 pozitivă, plasată la distanța

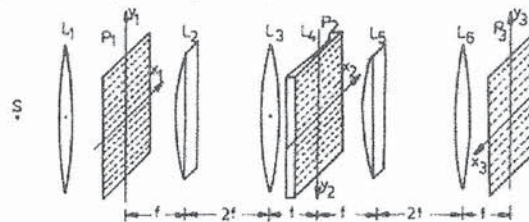


Fig.3.102. Procesor optic astigmatic, cu lentile cilindrice (L_2, L_4, L_5).

(focală) f față de P_1 , ce poate acționa în plan vertical. La distanța $2f$, dincolo de L_2 , se află lentila sferică L_3 , care are distanța focală f . P_2 este "planul frecvențelor". Combinația de lentile L_2, L_3 efectuează o dublă transformare Fourier în direcția y , adică în direcție verticală. Deoarece lentila L_2 nu operează în direcția axei x , lentila sferică L_3 transformă Fourier dimensiunea orizontală până la un factor de fază $\exp\left(-i\frac{k}{f}x_2^2\right)$ la nivelul planului P_2 . Acest factor de fază poate fi eliminat cu ajutorul lentilei cilindrice negative L_4 , cu distanța focală $f/2$, plasată imediat înaintea planului P_2 (ea introduce factorul multiplicativ compensator $t(x_2) = \exp\left(i\frac{k}{f}x_2^2\right)$). În acest aranjament, dacă funcția "obiect" din planul P_1 este un șir de funcții de transmitanță $g_k(x_1), k = \overline{1, N}$, atunci, la nivelul planului P_2 , obținem setul corespunzător de transformate Fourier $G_k(x_2), k = \overline{1, N}$ cu ordinea de numerație verticală inversată. În planul P_2 se pot introduce seturi de filtre unidimensionale H_k , ce realizează filtrarea semnelor de intrare corespunzătoare. Lentilele L_5, L_6 efectuează apoi o transformare Fourier în direcția x și două transformări Fourier în direcția y . Factorul de fază legat de transformarea Fourier finală (de ieșire) nu joacă, de obicei nici-un rol, deoarece receptorul din planul P_3 este un detector pătratic. În acest plan, intensitatea luminoasă de-a lungul fiecărei linii orizontale corespunde convoluției unidimensionale a funcțiilor g_k și h_k .

Comparativ cu sistemele necoerente discutate în secțiunea anterioară, procesoarele coerente prezentate aici sunt, în general, mai flexibile și au o mai mare capacitate de prelucrare a datelor. Cu toate acestea, buna lor funcționare este dependentă de calitățile filtrelor H complexe, ce se introduc în planul P_2 ; acestea trebuie să permită controlul independent (separat) al transmitanței de amplitudine și de fază, lucru foarte greu de realizat practic. Inițial, în acest scop s-au utilizat măști distincte de amplitudine, respectiv de fază; transmitanța de amplitudine se controla cu ajutorul unor plăci fotografice introduse în celulele de imersie (cu lichid convenabil ales) iar cea de fază - cu plăci transparente de grosime variabilă. Chiar dacă controlul amplitudinii s-ar realiza riguros, plăcile de fază nu pot realiza mai mult de două nivele de control pentru fază (0^0 sau 180^0). De aceea, sistemele descrise anterior s-au dovedit a fi utilizabile practic numai în cazul unor funcții de transfer simple. O altă deficiență, prezentă mai ales în cazul unor funcții de intrare cu spectru larg de frecvențe spațiale, este cea legată de necesitatea poziționării și alinierii extrem de precise a filtrelor H în planul P_2 . Toate aceste dificultăți de ordin practic au putut fi depășite abia după anul 1963, când filtrele H au început să se realizeze interferometric (holografic).

3. 15. 8. Filtrul Vander Lugt

În anul 1963, fizicianul A. B. Vander Lugt, de la Universitatea statului Michigan (S.U.A.), a imaginat o nouă metodă de realizare a filtrelor spațiale complexe, contribuind decisiv la relansarea teoriei și practicii procesării optice coerente. Așa cum am arătat în finalul secțiunii precedente, obținerea efectivă a unor funcții de transfer complexe era limitată la cazuri cu totul particulare, numărul aplicațiilor practice ale filtrării spațiale tradiționale fiind extrem de redus. Metoda imaginată de Vander Lugt (metodă holografică) a

permis sintetizarea unor măști (filtre) cu ajutorul cărora se poate controla efectiv, în același timp, atât amplitudinea cât și faza funcției de transfer. În acest fel, au fost depășite dificultățile cu care se confrunta procesarea coerentă tradițională și s-a lărgit în mod nebanuit numărul aplicațiilor sale practice.

În fig.3.103 se prezintă schematic instalația optică, interferențială, de realizare (înregistrare) a unui filtru de tip Vander Lugt. Lentila L_1 are rolul de a colima fasciculul luminos ce provine de la sursa punctiformă S . O porțiune a fasciculului colimat cade pe masca P_1 ce are o transmitanță de amplitudine identică cu cea a răspunsului la impuls dorit (h).

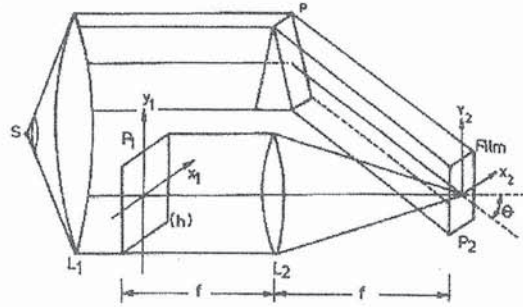


Fig.3.103. Schema interferențială a lui Vander Lugt.

Lentila L_2 transformă Fourier distribuția de amplitudine h , producând pe film o distribuție de amplitudine $(1/\lambda f)H(x_2/\lambda f, y_2/\lambda f)$. O altă porțiune a fasciculului colimat trece pe deasupra măștii P_1 și este deviat de prisma P sub un unghi θ , care îi permite să cadă exact pe filmul fotografic. În fiecare punct de pe film avem o intensitate luminoasă rezultată prin interferența celor două fascicule. Amplitudinea câmpului "de referință", ce vine de la prismă, are forma

$$E_r(x_2, y_2) = E_{r0} \exp(-2\pi i \alpha y_2), \quad (3.524)$$

unde frecvența spațială α este dată de relația

$$\alpha = \frac{\sin \theta}{\lambda}. \quad (3.525)$$

Distribuția totală de intensitate luminoasă în planul P_2 poate fi scrisă sub forma

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(x_2, y_2) = & \left| E_{r0} \exp(-2\pi i \alpha y_2) + \frac{1}{\lambda f} H\left(\frac{x_2}{\lambda f}, \frac{y_2}{\lambda f}\right) \right|^2 = E_{r0}^2 + \frac{1}{\lambda^2 f^2} \left| H\left(\frac{x_2}{\lambda f}, \frac{y_2}{\lambda f}\right) \right|^2 + \\ & + \frac{E_{r0}}{\lambda f} H\left(\frac{x_2}{\lambda f}, \frac{y_2}{\lambda f}\right) \exp(2\pi i \alpha y_2) + \frac{E_{r0}}{\lambda f} H^*\left(\frac{x_2}{\lambda f}, \frac{y_2}{\lambda f}\right) \exp(-2\pi i \alpha y_2). \end{aligned} \quad (3.526)$$

Dacă funcția complexă H are o distribuție de amplitudine A și o distribuție de fază ψ , adică $H(\xi, \eta) = A(\xi, \eta) \exp[-i\psi(\xi, \eta)]$, intensitatea luminoasă din planul P_2 poate fi transcrisă ca o sumă de trei termeni. Avem

$$\mathcal{I}(x_2, y_2) = E_{r0}^2 + \frac{1}{\lambda^2 f^2} A^2\left(\frac{x_2}{\lambda f}, \frac{y_2}{\lambda f}\right) + \frac{2E_{r0}}{\lambda f} A\left(\frac{x_2}{\lambda f}, \frac{y_2}{\lambda f}\right) \cos \left[2\pi \alpha y_2 - \psi\left(\frac{x_2}{\lambda f}, \frac{y_2}{\lambda f}\right) \right]. \quad (3.527)$$

Această expresie ne arată că informația de amplitudine și de fază au fost înregistrate ca modulații de amplitudine, respectiv de fază *pe purtătoarea de înaltă frecvență* α adusă în planul filmului de unda "de referință" deviată de prismă.

Există și alte sisteme optice capabile să producă aceeași distribuție de intensitate (3.527). Figura 3.104 reprezintă un astfel de sistem, care este, de fapt, un interferometru Mach-Zehnder modificat. Pe ramura de sus, dincolo de primul divizor de fascicul (beam splitter), fasciculul este reflectat de oglinda plană O_1 , trimis spre al doilea divizor de fascicul și de aici spre film. Pe ramura de jos, oglinda O_2 trimite fasciculul paralel spre masca P_1 ce are transmitanța de amplitudine identică cu răspunsul la impuls dorit (h). Lentila L_2 transformă răspunsul h care, prin intermediul divizorului de fascicul, ajunge pe planul filmului, interferând cu unda "de referință".

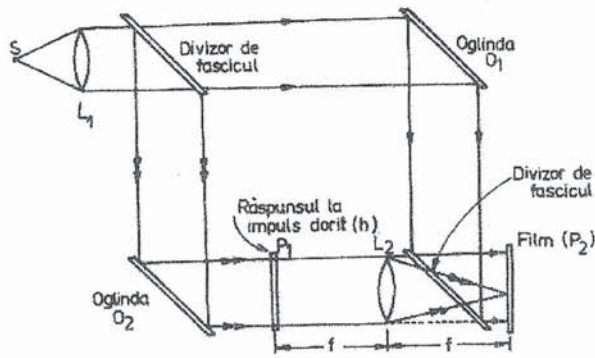


Fig.3.104. Interferometru Mach-Zehnder modificat.

Figura 3.105 reprezintă schema unui alt interferometru, de tip Rayleigh, modificat, care produce la nivelul filmului fotografic aceeași distribuție de intensitate luminoasă (3.527). Lentila colimatoare L_1 este urmată imediat, în partea de sus, de o lentilă mică L_2 care focalizează o parte din fasciculul colimat într-un "punct de referință" ce aparține planului focal anterior al lentilei L_3 . Când unda sferică generată de acest "punct de referință" trece prin lentila L_3 ea este colimată, adică se îndreaptă ca o undă plană, cu o anumită înclinare θ față de axul de simetrie, spre filmul fotografic. Amplitudinea transmisă de masca P_1 se transformă Fourier în mod uzual și, ajungând pe film, interferează cu "unda de referință" - producând distribuția luminoasă stabilită mai sus.

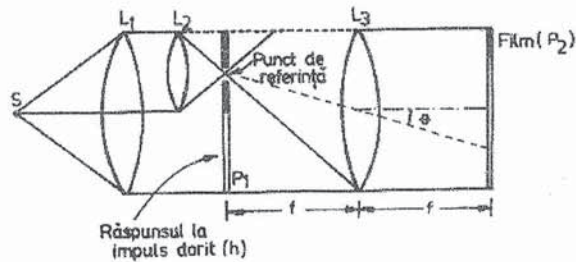


Fig.3.105. Interferometru Rayleigh modificat.

Ce se face mai departe cu filmul realizat prin una din cele trei metode descrise? El se dezvoltă, rezultând un transparent cu o transmitanță de amplitudine proporțională cu distribuția de intensitate din timpul expunerii (se lucrează pe porțiunea liniară a curbei din fig.3.91). Astfel

$$t(x_2, y_2) \sim E_{ro}^2 + (\lambda f)^{-2} |H|^2 + E_{ro} (\lambda f)^{-1} H \cdot \exp(2\pi i \alpha y_2) + E_{ro} (\lambda f)^{-1} H^* \cdot \exp(-2\pi i \alpha y_2). \quad (3.528)$$

Observăm că până la un factor multiplicativ, exponențial complex, dar simplu ca structură, cel de-al treilea termen este chiar funcția de transfer H (transformata Fourier a lui h). Rămâne să arătăm cum poate fi utilizat acest termen particular și cum pot fi excluși ceilalți trei termeni prezenți în expresia lui $t(x_2, y_2)$.

Să ne întoarcem la schema de procesor optic coerent reprezentată în fig.3.100, introducând $t(x_2, y_2)$ în planul P_2 . Dacă funcția input pe care dorim să o filtrăm este $g(x_1, y_1)$ distribuția de amplitudine incidentă pe masca din planul P_2 este $(\lambda f)^{-1}G(x_2/\lambda f, y_2/\lambda f)$. Intensitatea câmpului transmis de mască (cu transmitanța $t(x_2, y_2)$, ecuația (3.528)) satisface următoarea relație de proporționalitate

$$E_2 \sim \frac{E_{ro}^2}{\lambda f} G + \frac{1}{\lambda^3 f^3} |H|^2 G + \frac{E_{ro}}{\lambda^2 f^2} H G \exp(2\pi i \alpha y_2) + \frac{E_{ro}}{\lambda^2 f^2} H^* G \exp(-2\pi i \alpha y_2). \quad (3.529)$$

Lentila finală L_3 din procesorul optic coerent realizează transformata Fourier a câmpului E_2 (și o multiplicare cu λf). Având în vedere orientarea axelor în planul P_3 , intensitatea câmpului în acest plan este dată de relația

$$E_3(x_3, y_3) \sim E_{ro}^2 g(x_3, y_3) + \frac{1}{\lambda^2 f^2} [h(x_3, y_3) \otimes h^*(-x_3, -y_3) \otimes g(x_3, y_3)] + \frac{E_{ro}}{\lambda f} [h(x_3, y_3) \otimes g(x_3, y_3) \otimes \delta(x_3, y_3 + \alpha \lambda f)] + \frac{E_{ro}}{\lambda f} [h^*(-x_3, -y_3) \otimes g(x_3, y_3) \otimes \delta(x_3, y_3 - \alpha \lambda f)]. \quad (3.530)$$

Termenul al treilea din această relație este cel ce ne interesează în mod deosebit. Având în vedere că

$$h(x_3, y_3) \otimes g(x_3, y_3) \otimes \delta(x_3, y_3 + \alpha \lambda f) = \iint_{-\infty}^{+\infty} h(x_3 - \xi, y_3 + \alpha \lambda f - \eta) g(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (3.531)$$

acest termen din output este o *convoluție* a funcțiilor h și g , centrată, în planul (x_3, y_3) , pe punctul de coordonate $(0, -\alpha \lambda f)$. Cel de-al patrulea termen din expresia lui E_3 poate fi transcris sub forma

$$h^*(-x_3, -y_3) \otimes g(x_3, y_3) \otimes \delta(x_3, y_3 - \alpha \lambda f) = \iint_{-\infty}^{+\infty} g(\xi, \eta) h^*(\xi - x_3, \eta - y_3 + \alpha \lambda f) d\xi d\eta \quad (3.532)$$

și reprezintă *corelația* funcțiilor g și h , centrată pe punctul de coordonate $(0, \alpha \lambda f)$ din planul (x_3, y_3) .

Primul și al doilea termen din (3.530), care nu au vreo utilitate specială în operațiile uzuale de filtrare, sunt centrați pe originea din planul (x_3, y_3) . Rezultă deci că, dacă frecvența purtătoare α este aleasă suficient de mare (unghiul θ de înclinare a referinței este destul de mare), termenii de convoluție și de corelație vor fi deflecați, în sensuri opuse, destul de mult în afara axei de simetrie pentru a putea fi *observați independent*. Concret, pentru a observa convoluția $h \otimes g$ este necesar să fie examinată distribuția luminoasă din vecinătatea punctului $(0, -\alpha \lambda f)$, iar pentru a observa corelația $h^* \cdot g$ - distribuția centrată pe punctul de coordonate $(0, \alpha \lambda f)$.

Pentru a preciza, mai exact, valoarea minimă a frecvenței spațiale α , necesară pentru observarea independentă a celor doi termeni importanți, să analizăm cu atenție reprezentarea din fig. 3.106, în care W_h , este lărgimea spațială maximă a funcției h iar W_g - a funcției g (ambele considerate în lungul axei y). Cei patru termeni din expresia (3.530) a câmpului E_3 au următoarele lărgimi:

1. $E_{ro}^2 g(x_3, y_3) \rightarrow W_g$,
2. $\frac{1}{\lambda^2 f^2} [h(x_3, y_3) \otimes h^*(-x_3, -y_3) \otimes g(x_3, y_3)] \rightarrow 2W_h + W_g$,
3. $\frac{E_{ro}}{\lambda f} [h(x_3, y_3) \otimes g(x_3, y_3) \otimes \delta(x_3, y_3 + \alpha \lambda f)] \rightarrow W_h + W_g$,
4. $\frac{E_{ro}}{\lambda f} [h^*(-x_3, -y_3) \otimes g(x_3, y_3) \otimes \delta(x_3, y_3 - \alpha \lambda f)] \rightarrow W_h + W_g$.

De pe desen se poate observa că avem o *separare completă* a diverșilor termeni dacă este îndeplinită condiția

$$\alpha > \frac{1}{\lambda f} \left(\frac{3}{2} W_h + W_g \right) \equiv \alpha_{\min},$$

ceea ce înseamnă

$$\sin \theta > \frac{1}{f} \left(\frac{3}{2} W_h + W_g \right). \quad (3.533)$$

Pentru unghiuri mici, când $\sin \theta \approx \theta$, putem scrie

$$\theta \geq \frac{1}{f} \left(\frac{3}{2} W_h + W_g \right) \equiv \theta_{\min}. \quad (3.533')$$

Utilizarea filtrelor de tip Vander Lugt înlătură cele două inconveniente majore prezente la procesoarele coerente tradiționale. Într-adevăr, de data aceasta răspunsul la impuls (h) este transformat Fourier în manieră optică de însuși sistemul care a sintetizat anterior masca plană de frecvențe. Apoi, funcția complexă de transfer optic (H) este sintetizată cu o singură mască absorbantă, care, pentru a elimina toate shifturile relative de fază, este introdusă într-o celulă de imersie - cu lichid convenabil ales. Transmitanța de fază din planul frecvențelor nu mai trebuie să fie controlată într-un mod așa de strict ca în procesarea tradițională.

Filtrajul Vander Lugt rămâne încă extrem de sensibil la poziționarea exactă a măștii plane de frecvențe, dar nu este mai sensibil decât filtrajul convențional. Înregistrarea purtătoarei modulate de înaltă frecvență necesită desigur filme de înaltă rezoluție, dar nu dincolo de performanțele deja existente (de exemplu plăcile spectroscopice KODAK au astfel de performanțe).

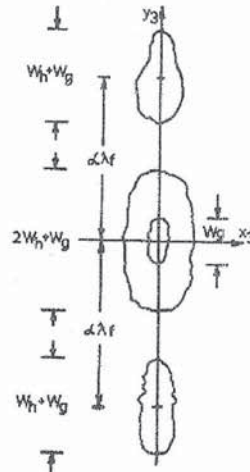


Fig.3.106. Localizarea diferiților termeni ai semnalului de ieșire din procesorul reprezentat în fig.3.100.

Rezultă că tehnica Vander Lugt transferă dificultățile prezente la realizarea măștilor de frecvență în dificultăți, mai puțin severe, de realizare în domeniul spațial a transparentelor corespunzând unui anumit răspuns la impuls. Acestea din urmă, de regulă simple, se confecționează prin tehnica fotografică convențională.

3. 15. 9. Filtre adaptate și recunoașterea caracterelor (formelor)

O problemă practică, de importanță deosebită, este cea a recunoașterii formelor sau caracterelor, adică a detectării existenței (și poziției) unui semnal dat - forma de recunoscut, într-un semnal de intrare, în general complex. De exemplu, ne interesează să aflăm prin metode optice, dacă într-un cuvânt înscris pe un film fotografic - să zicem pe direcția orizontală - este prezentă o anumită literă.

Evident, recunoașterea formelor este un caz particular de filtrare spațială a imaginilor, în care nu interesează obținerea unei imagini asemănătoare originalului ci doar semnalizarea, printr-o metodă oarecare, a existenței formei căutate și a poziției acesteia în planul de intrare. Pentru soluționarea problemei enunțate, tehnica holografică inițiată de Vander Lugt s-a dovedit a fi extrem de utilă și de performantă.

Înainte de a prezenta schemele unor sisteme optice de recunoașterea caracterelor să introducem noțiunea de *filtru adaptat*, componentă optică esențială în orice procesare de acest gen. Fie $s(x, y)$ semnalul (forma) ce trebuie recunoscut(ă) dintr-un semnal de intrare mai complicat $g(x, y)$. Se numește *filtru adaptat* cu semnalul $s(x, y)$ un filtru liniar, invariant spațial, al cărui răspuns la impuls $h(x, y)$ este dat de relația

$$h(x, y) = s^*(-x, -y). \quad (3.534)$$

Conform teoriei generale (vezi formula (3.520')), dacă filtrului adaptat pentru funcția $s(x, y)$ i se aplică un semnal de intrare general $g(x, y)$, semnalul de ieșire este

$$v(x, y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} h(x - \xi, y - \eta)g(\xi, \eta)d\xi d\eta = \iint_{-\infty}^{+\infty} g(\xi, \eta)s^*(\xi - x, \eta - y)d\xi d\eta \quad (3.535)$$

sau, prescurtat, $v = g * s$ (răspunsul v este *corelația* funcțiilor g și s).

Din punct de vedere istoric, conceptul de filtru adaptat a apărut inițial în teoria comunicațiilor, în legătură cu problema detecției semnalelor neoptice. Problema se punea în felul următor: dacă este necesar să detectăm un semnal de formă cunoscută, dintr-un semnal în care el este mascat de un zgomot "alb" (cu frecvențe extrem de diverse), aceasta se poate realiza cu un filtru adaptat care operează liniar și căruia i se cere să maximizeze raportul dintre puterea instantanee a semnalului (la un moment de timp particular) și puterea medie a zgomotului (vezi [46]). Pentru evitarea unor posibile confuzii vom preciza că, în secțiunea de față, semnalul de intrare $g(x, y)$ va fi un semnal pur, lipsit de zgomote. Cu toate acestea, cel puțin din punct de vedere formal, diferența $g(x, y) - s(x, y)$ poate fi considerată față de $s(x, y)$ ca un zgomot, respectiv ca un semnal care nu ne interesează.

Pentru a înțelege esența procedurii de filtrare adaptată, să considerăm schema procesorului optic-coerent din fig.3.107, cu semnalul $s(x, y)$ la intrare (în planul P_1) și cu filtrul adaptat corespunzător în planul P_2 al frecvențelor spațiale. Conform relației

(3.534), prin transformata Fourier, obținem funcția de transfer $H(v_x, v_y) = S^*(v_x, v_y)$ unde $H = \mathcal{F}\{h\}$ și $S = \mathcal{F}\{s\}$. Aceasta înseamnă că masca plană de frecvențe din planul P_2 trebuie să aibă transmitanța de amplitudine proporțională cu $S^*(v_x, v_y)$. Ce se întâmplă când la intrare (în planul P_1) se aplică

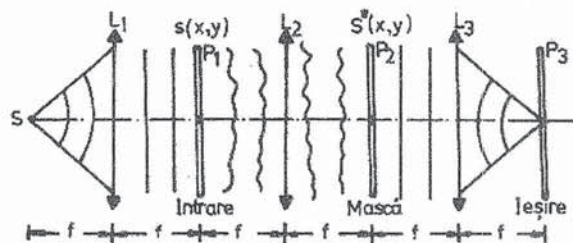


Fig.3.107. Interpretarea optică a operației de filtrare adaptată.

semnalul $s(x, y)$? Datorită transformării Fourier pe care o realizează lentila L_1 , distribuția de câmp incidentă pe mască va fi egală cu S iar masca din P_2 va transmite mai departe un semnal proporțional cu $SS^* = |S|^2 > 0$. În acest fel, masca compensează exact curbura frontului de undă incident S , unda transmisă fiind o *undă plană* ce focalizează (dă un punct) în centrul planului de ieșire P_3 . Dacă semnalul de intrare, în planul P_1 , nu conține "termenul" $s(x, y)$, la ieșirea din masca P_2 nu vor mai avea loc compensări ale curburii frontului de undă și lumina ce va cădea pe L_3 nu va mai fi focalizată în planul P_3 . Prin urmare, prezența lui $s(x, y)$ la intrarea în sistem este indicată de apariția unui spot luminos central în planul focal imagine al lentilei L_3 , în timp ce, pentru alte semnale, acest lucru nu se mai întâmplă. Într-o situație mai generală, când inputul s nu este centrat pe originea planului P_1 , punctul luminos din planul P_3 este extraaxial, la o distanță ce se poate evalua ușor.

Să trecem la generalizarea problemei recunoașterii caracterelor, considerând că semnalul de intrare (g) în sistemul de procesare poate conține oricare din semnalele s_i , cu $i = 1, 2, 3, \dots, N$. Ne interesează să putem specifica, într-o situație dată, care semnale s_i sunt într-adevăr prezente în g și care nu sunt prezente. Pentru aceasta se utilizează un *bloc* de N filtre S_i^* , $i = 1, 2, 3, \dots, N$, fiecare adaptat pe câte un semnal particular s_i , într-un montaj multicanal, fiecare canal fiind de tipul celui discutat anterior (vezi fig.3.108). Inputul $g(x, y)$ se aplică succesiv (sau simultan) celor N filtre adaptate, cu funcțiile de transfer optic $S_i^*(v_x, v_y)$. Spre deosebire de cazul unicanal, de data aceasta, răspunsul fiecărui filtru este normat prin rădăcina pătrată a energiei totale din caracterul s_i pentru care a fost adaptat. Necesitatea acestei normări, care se realizează electronic, este dictată de faptul că diferitele caractere din input nu au în general aceeași energie și, altfel ar fi greu de comparat la ieșire. În final, se compară pătratele modulelor outputurilor $|v_1|^2, |v_2|^2, |v_3|^2, \dots, |v_N|^2$ în punctele particulare unde se anticipează poziționarea maximului pentru fiecare dintre ele. Când caracterul $s_k(x, y)$ este prezent în inputul $g(x, y)$, outputul particular $|v_k|^2$ va avea, în punctul corespunzător, valoarea cea mai mare dintre cele N răspunsuri care se compară.

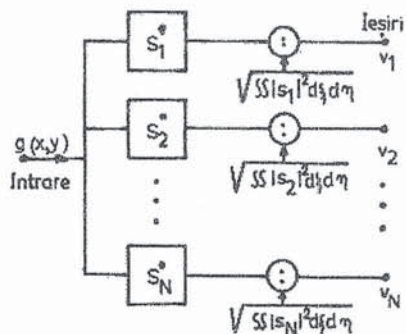


Fig.3.108. Schema bloc a unui sistem de recunoaștere a formelor (caracterelor).

Într-adevăr, din relația (3.535) rezultă că pentru filtrul corect adaptat pe canalul k , centrat pe originea planului P_3 (vezi și fig.3.107), obținem răspunsul $|v_k|^2$ de forma

$$|v_k|^2 = \frac{\left[\iint_{-\infty}^{+\infty} |s_k|^2 d\xi d\eta \right]^2}{\iint_{-\infty}^{+\infty} |s_k|^2 d\xi d\eta} = \iint_{-\infty}^{+\infty} |s_k|^2 d\xi d\eta. \quad (3.536)$$

Pe de altă parte, răspunsul $|v_i|^2$, cu $i \neq k$, al unui filtru incorect adaptat, este dat de

$$|v_i|^2 = \frac{\left| \iint_{-\infty}^{+\infty} s_k s_i^* d\xi d\eta \right|^2}{\iint_{-\infty}^{+\infty} |s_i|^2 d\xi d\eta} \leq \iint_{-\infty}^{+\infty} |s_k|^2 d\xi d\eta = |v_k|^2 \quad (3.537)$$

deoarece, în virtutea inegalității lui Schwartz,

$$\left| \iint_{-\infty}^{+\infty} s_k s_i^* d\xi d\eta \right|^2 \leq \iint_{-\infty}^{+\infty} |s_k|^2 d\xi d\eta \cdot \iint_{-\infty}^{+\infty} |s_i|^2 d\xi d\eta. \quad (3.538)$$

Semnul de egalitate în relațiile (3.537), (3.538) corespunde numai cazului $s_i(x, y) = K \cdot s_k(x, y)$. De aceea, cele N semnale (forme) care se compară trebuie să fie distincte.

Procedeul schițat mai sus permite, deci, să se recunoască, dintr-un număr cunoscut de caractere posibile, distincte, prezența unuia dintre ele la intrarea în sistem. Există și alte tipuri de recunoaștere, mai sofisticate, de care nu ne putem ocupa aici. Ne vom referi însă, pe scurt, la modul în care pot fi realizate filtre adaptate prin tehnica Vander Lugt discutată în secțiunea anterioară și cum se poate efectua, după aceea, recunoașterea formelor pentru care au fost sintetizate acele filtre (măști). După cum s-a putut constata cu ocazia analizei schemei din fig.3.103, când transmitanța de amplitudine din planul P_1 este $h(x, y)$, pe filmul din planul P_2 se înregistrează o intensitate luminoasă de forma (3.526) iar după dezvoltare, transmitanța de amplitudine are forma (3.528). Unul din termenii acestei transmitanțe este proporțional cu H^* (unde $H = \mathcal{F}\{h\}$) și poate fi considerat ca filtru adaptat pentru semnalul $h(x, y)$. Mai mult, când acest transparent se introduce în planul P_2 din procesorul optic-coerent reprezentat în fig.3.100 și semnalul de intrare (în planul P_1) este $g(x, y)$, termenul proporțional cu H^* (filtrul adaptat) transmite mai departe corelația $g * h$, ce se localizează la nivelul planului P_3 în punctul de coordonate $(0, \alpha\lambda f)$. Cu alte cuvinte, dacă ne restrângem observația numai la regiunea corespunzătoare din spațiul de la ieșire, vom detecta numai semnalul ce corespunde corelației $g * h$. Când semnalul g coincide cu forma h pentru care a fost adaptat filtrul, în locul respectiv intensitatea luminoasă este maximă căci acum corelația devine autocorelație. Când semnalul g nu conține forma h , intensitatea luminoasă este mai mică și este răspândită difuz.

Pentru a realiza, prin tehnica Vander Lugt, blocul de filtre adaptate necesare în schema din fig.3.108 se utilizează un singur semnal de referință și se sintetizează pe rând (secvențial) cele N filtre diferite, plasând în planul P_1 transmițanțele de amplitudine h_1, h_2, \dots, h_N . În cazul în care N este mic, se poate sintetiza întregul bloc de filtre pe un același film, așezând distinct cele câteva semnale (forme) diferite de-a lungul axei verticale Oy , așa cum se arată în fig.3.109. Fasciculele de lumină care vin de la literele (caracterele) A, B, C (de regulă transparente, pe fond negru) formează unghiuri diferite cu unda de referință (ce provine de la orificiul din partea superioară) și, de aceea, se înregistrează distinct pe film. Aceasta înseamnă că filtrul astfel realizat, adaptat pentru caracterele A, B, C va localiza distinct corelațiile $g * h_A$, $g * h_B$ și $g * h_C$. Prin metoda reprezentată în fig.3.109, Vander Lugt a reușit să sintetizeze pe o singură placă (mască) filtrele adaptate a 9 caractere diferite.

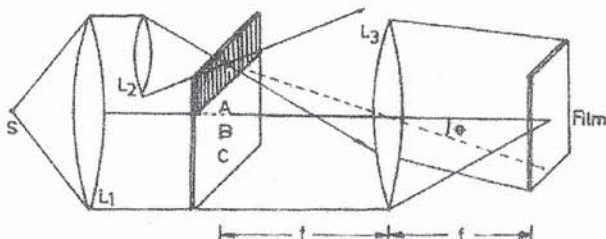


Fig.3.109. Sinteza unui bloc de filtre pe un același film.

Principala deficiență a schemelor de recunoaștere optic-coerentă a caracterelor constă în marea lor sensibilitate față de variațiile de scală și față de rotirea caracterului în planul de intrare. Din această cauză, la o poziționare eronată a caracterului, răspunsul filtrului, adaptat corect, scade considerabil. Nu orice caracter este la fel de sensibil față de poziționare sau față de rotație (de pildă, literele E, B sau M sunt mai sensibile decât litera O), dar, în general, se cere multă abilitate experimentală pentru a realiza o recunoaștere cu risc mic de eroare.

Atunci când nu se pune problema realizării recunoașterii într-un timp dat, se poate face o căutare mecanică, prin tatonări, a scalei și orientării potrivite care asigură un output local maximal. Însă, de regulă, în astfel de procese de recunoaștere, intervalul de timp de operare nu numai că nu ne este indiferent, ci el trebuie să fie cât mai mic cu putință. De aceea, au fost elaborate tehnici de recunoaștere ultrarapidă al căror principiu de funcționare depășește nivelul lucrării noastre și, din această cauză, nu ne vom referi la ele (pentru detalii, vezi [47, 50]).

BIBLIOGRAFIE

A. Lucrări de matematică:

1. H. Bremermann, *Distributions, Complex Variables and Fourier Transforms*, Addison - Wesley Publish. Comp., Reading Mass. 1965;
2. I. Colojoară, *Analiză matematică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1983;
3. V. Ditkine, A. Proudnikov, *Transformations integrales et calcul operationnel*, Ed. Mir, Moscou, 1978;
4. G. M. Fihtenholtz, *Curs de calcul diferențial și integral*, vol. III, Editura Tehnică, București, 1965;
5. L. Franks, *Signal Theory*, Prentice Hall, New Jersey, 1969;
6. T. Ganea, *Serii trigonometrice*, Editura Tehnică, București, 1956;
7. P. N. Kniazev, *Integralinîie preobrazovania*, Izd. Vișșaiia șkola, Minsk, 1969;
8. O. Stănășilă, *Analiză matematică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1981;
9. R. D. Stuart, *Introducere în analiza Fourier (cu aplicații în tehnică)*, Editura Tehnică, București, 1971;
10. V. S. Vladimirov, *Ecuatiile fizicii matematice*, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1980;

B. Lucrări de fizică:

11. E. Abbe, *Beiträge zur theorie des mikroskops und der mikroskopischen wahrnehmung*, Schultzes Archiv fur Mikroskopie, Anatomie, Bd. 9, 413-486, 1873 (v. Collected works, vol. I, 1904);
12. A. A. Akaev, S. A. Maiorov, *Opticeskie metodî obrabotki informații*, Izd. Vișșaiia șkola, Moskva, 1988;
13. K. R. Barnes, *The Optical Transfer Function*, Higler, London, 1971;
14. S. I. Baskakov, *Signal and Circuits*, Mir Publishers, Moscow, 1986; *Radiotehniceskîe țepi i signalî*, Izd. Vișșaiia șkola, Moskva, 1987;
15. R. J. Bell, *Introduction to Fourier transform spectroscopy*, Acad. Press, New York, 1972;
16. M. Born, E. Wolf, *Principles of optics*, Pergamon Press, Oxford, 1968;
17. E. J. Butikov, *Optika*, Izd. Vișșaiia șkola, Moskva, 1986;
18. A. Cazannet ș. a., *Optique, telecommunications (Transmission et traitement de l'information)*, Eyrolles, Paris, 1981;
19. R. W. Ditchburn, *Light* (ed. a 3-a), Blackie, London, 1976;
20. P. M. Duffieux, *L'integrale de Fourier et ses applications a l'optique* (ed. a 2-a), Masson et cie., Paris, 1970;

21. M. Françon, *Diffraction (cohérence en optique)*, Gauthier-Villars, Paris, 1964; *Optique-formation et traitement des images*, Masson et cie., Paris, 1972; *Le microscope a contrast de phase et le microscope interferentiel*, CNRS, Paris, 1954; *Modern applications of physical optics*, Interscience Publishers, New York, 1963; *Vibrations lumineuses, optique cohérente*, Dunod univ., Paris, 1970; *Optika speklov*, Izd. Mir, Moskva, 1980;
22. R. Gabillard, *Vibrations et phénomènes de propagation*, Dunod univ., Paris, 1969;
23. D. Gabor, Edwards Memorial Lecture: *Holography 1948-1971*, The City University, London, 1972;
24. A. Ghatak, *Optics*, Tata McGraw-Hill, New Delhi, 1977;
25. J. W. Goodman, *Introduction to Fourier optics*, McGraw-Hill, San Francisco, 1968; *Statistical optics*, John Wiley and sons, New York, 1985;
26. E. Hecht, A. Zajac, *Optics*, Addison-Wesley, Reading Mass., 1974;
27. K. Iizuka, *Engineering optics*, Springer-Verlag, Berlin, 1985;
28. F. A. Jenkins, H. E. White, *Fundamentals of optics*, McGraw-Hill, Kogakusha, Tokyo, 1976;
29. R. Jones, C. Wykes, *Holographic and Speckle Interferometry*, Cambridge University Press, Cambridge, London, 1983;
30. M. V. Klein, *Optics*, John Wiley and sons, New York, 1970;
31. J. A. Kong, *Theory of Electromagnetic Waves*, John Wiley and sons, New York, 1975;
32. S. G. Lipson, H. Lipson, *Optical Physics*, Cambridge Univ. Press, London, 1981;
33. A. Maréchal, M. Françon, *Diffraction, structure des images (influence de la cohérence de la lumière)* Masson et cie, Paris, 1970;
34. A. N. Matveev, *Optics*, Mir Publishers, Moscow, 1988;
35. L. Mertz, *Transformations in optics*, John Wiley and sons, New York, 1965;
36. A. Papoulis, *Teoria sistem i preobrazovanii v optike*, Izd. Mir., Moskva, 1971;
37. V. N. Parighin, V. I. Balakšii, *Opticeskaia obrabotka informaii*, Izd. Moskovskogo Univ., Moskva, 1987;
38. A. B. Porter, *On the diffraction theory of microscop vision*, Phil. Mag., ser. 6, 11, 154-166, 1906;
39. Lord Reyleigh, *On the manufacture and theory of diffraction gratings*, Phil. Mag., 47, 81-93, 193-205, 1874 (v. Scientific Papers, vol. I, 199-221, CUP, Cambridge);
40. L. M. Soroko, *Osnovi holografii i kogerentnoi optiki*, Izd. Nauka, Moskva, 1971; *Hilbert-optika*, Izd. Nauka, Moskva, 1981;
41. E. G. Steward, *Fourier optics (An Introduction)*, John Wiley and sons, New York, 1983;
42. G. W. Stroke, *An Introduction to coherent optics and holography*, Academic Press, New York, 1966;
43. G. S. Svecinikov, *Integralnaia optika*, Naukova Dumka, Kiev, 1988;
44. V. D. Svet, *Opticeskie metodí obrabotki signalov*, Izd. Energhia, Moskva, 1971;
45. C. A. Taylor, H. Lipson, *Optical transforms*, Bell, London, 1964;
46. A. B. Vander Lugt, *Signal detection by complex spatial filterinng*, IEEE Trans., Inf. Theory, IT-10:2, 1964;
47. V. I. Vlad ș. a., *Prelucrarea optică a informației*, Ed. Academiei, București, 1976;

48. F.T.S. Yu, *Introduction to diffraction, information processing and holography*, The MIT Press, Cambridge, London, 1973;
49. * * * *Photonics* (Ed. by M. Balkanski, P. Lallemand), Gauthier-Villars, Paris, 1975;
50. * * * *Optical data Processing applications* (Ed. by D. Casasent), Springer-Verlag, Berlin, 1978;
51. * * * *Integrated Optics* (Ed. by T. Tamir), Springer-Verlag, Berlin, 1975;
52. * * * *Applications of optical Fourier transforms* (Ed. by H. Stark), Academic Press, New York, 1982.

Capitolul IV

BAZELE HOLOGRAFIEI

§. 4. 1. Scurt istoric al holografiei

În anul 1948, fizicianul englez Denis Gabor (1900 - 1979) publica o lucrare, intitulată *Un nou principiu în microscopie* (*Nature*, vol. 161, pag. 777), în care propunea *reconstrucția frontului de undă*, adică obținerea imaginii unui obiect, în două etape, fără utilizarea lentilelor. El afirma că atunci când pe un film fotografic sosesc simultan două unde *coerente*, una - de referință și alta - *difracată (difuzată) de un obiect*, filmul reține (înregistrează) atât informația de amplitudine cât și cea de fază a undei difractate, chiar dacă el este sensibil, în realitate, numai la intensități luminoase. Motivul este acela că, prin suprapunerea undei de referință cu cea difracată de obiect, în termenul de interferență ce ia naștere este prezentă și informația "de fază relativă", filmul fiind impresionat de figura de interferență a celor două unde. Filmul (placa) fotografic(ă) astfel obținut(ă) se numește *hologramă* (holos=total, complet; graphos= înregistrare, înscriere) și de pe ea, după dezvoltare, prin iluminare cu o undă *de reconstrucție*, se poate obține imaginea obiectului care a produs difracția. Procedeu de înregistrare și de redare a informației reținute pe hologramă se numește *holografie*.

Deși toată lumea științifică îl recunoaște astăzi pe Gabor ca fiind părintele holografiei (premiul Nobel în anul 1971), ideea de bază a acestui procedeu este mult mai veche. Ea a fost nu numai enunțată ci și investigată experimental, încă din anul 1920, de către fizicianul polonez M. Wolfke, un fost elev al lui Abbe. În lucrarea *Despre posibilitatea obținerii imaginii optice a unei rețele moleculare* (*Phys. Zeitschrift*, vol. 21, pag. 495, 1920), Wolfke afirma și argumenta că figurile de difracție de raze X pe un cristal pot fi folosite pentru a reconstitui imaginea optică a acelui cristal. Din păcate, lucrarea fizicianului polonez, adevărat precursor al holografiei, nu a avut nici-un ecou în rândul contemporanilor săi și a fost repede uitată, dacă nu chiar ignorată de la bun început.

Revenind la Gabor, trebuie să spunem că el nu știa nimic despre lucrarea lui Wolfke atunci când, în 1948, a propus metoda holografică. Gabor a ajuns la holografie în mod întâmplător, ocupându-se de o altă problemă, tot cu caracter practic; este vorba de problema îmbunătățirii rezoluției microscopului electronic. Pentru aceasta, el s-a inspirat dintr-un articol (din anul 1942) al fizicianului englez W. Bragg în care, fără să fie citat Wolfke, se făcea "microscopie de raze X", adică se realiza vizualizarea unei rețele cristaline prin difracția unui fascicul luminos pe o placă în care era "stocată" o figură de difracție de raze X pe acel cristal. Gabor a preluat ideea procesului în două etape și a aplicat-o la microscopul electronic: în prima etapă era înregistrată imaginea electronică a unui obiect iar, în a doua etapă, aceasta era reconstituită cu ajutorul unui fascicul luminos. De aici, până la holografia cu fascicule luminoase în ambele etape ale procesului, nu a mai fost decât un singur pas. Cu toate acestea, realizarea practică a proiectului lui Gabor a trebuit să mai aștepte încă 13 ani, deoarece sursele luminoase clasice existente nu furnizau lumină cu coerență atât de bună pe cât ar fi fost de necesar.

După publicarea primelor lucrări ale lui Gabor, în perioada 1950-1956, au apărut și alte lucrări importante în acest domeniu, datorate fizicienilor G.L.Rogers, H.M.A. El-Sun, A. Lohmann și alții, care au extins semnificativ teoria și înțelegerea procesului de obținere

a imaginii prin reconstruirea frontului de undă, adică a holografiei.

Prima înregistrare și redare holografică a fost realizată abia în anul 1961, adică la un an după descoperirea laserilor. În acest an, utilizând surse laser și modificând puțin metoda propusă inițial de Gabor, fizicienii americani E. Leith și J. Upatnieks, de la Universitatea statului Michigan, au reușit să pună la punct un procedeu holografic experimental, care s-a dovedit de mare importanță practică și de larg ecou științific (metoda "off-axis").

Un an mai târziu, în 1962, fizicianul rus Yu. Denisyuk a sugerat ideea holografiei tridimensionale, bazată pe orientarea undei de referință în sens invers față de unda obiect și citirea hologramei (înregistrată în starturi succesive subțiri de fotoemulsie) prin reflexie. Metoda fizicianului rus, rod al unor cercetări de aproape două decenii, este remarcabilă din două motive. În primul rând, ea a readus în actualitate procedeul fotografierii color, în pelicule multistrat, inventat în anul 1892 de fizicianul francez G. Lippmann (premiul Nobel în anul 1908) și l-a combinat cu metoda holografică. Apoi, reconstituirea imaginii obiectului holografiat a putut fi realizată chiar și în lumină naturală (solară) sau provenind de la surse clasice (de exemplu, de la un proiector, în fascicul bine colimat).

În anul 1965, G. W. Stroke inițiază holografia Fourier și apare holografia ultrarapidă, care utilizează laserii cu rubin funcționând în impulsuri gigantice. Tot atunci s-au pus bazele interferometriei holografice, după care a urmat o adevărată avalanșă de extinderi și de aplicații practice în toate domeniile științei și tehnicii.

În prezent, la cinci decenii de la publicarea primelor articole ale lui Gabor, se poate spune că, fără apariția laserilor, holografia ar fi rămas un principiu interesant, care ar fi putut fi eventual aplicat numai în câteva situații particulare, speciale. Laserii au dat holografiei o viață nouă, deschizându-i perspective aplicative nebănuite înainte de anul 1960.

În rândurile care urmează nu vom putea aborda decât unele aspecte, fundamentale și aplicative, ale holografiei optice. De aceea, cititorul care dorește lărgirea cunoștințelor sale în acest domeniu deosebit de dinamic al opticii, este îndrumat spre numeroasele lucrări de specialitate existente. Pentru început, îi recomandăm consultarea următoarelor cărți: V. I. Vlad, *Introducere în holografie*, Ed. Academiei, București, 1973 și I. Cucurezeanu și colectiv, *Aplicații ale holografiei optice*, Ed. Tehnică, București, 1984.

§. 4. 2. Principiul holografiei plane

Holografia poate fi definită ca o soluție practică a problemei înregistrării și apoi a reconstrucției *amplitudinii și fazei* unei unde (optice, acustice) transmise sau reflectate de un obiect iluminat coerent. Deși se poate vorbi și de o holografie acustică, în această carte noi ne vom ocupa numai de holografia electromagnetică (realizabilă, în principiu, în orice regiune a spectrului) și, în particular, de cea optică.

Deoarece mediile de înregistrare existente (filme, plăci, foto-detectori) răspund numai la intensități luminoase, este necesară conversia informației de fază în variații de amplitudine, ceea ce se soluționează practic prin interferometrie. Se procedează în felul următor: unda transmisă sau reflectată de obiect $E_0(x, y, t)$, este suprapusă peste o undă de referință $E_r(x, y, t)$ - care provine de la același laser - și figura de interferență rezultată este înregistrată de fotodetector (de regulă o placă fotografică). După dezvoltare, placa-hologramă se comportă ca o complicată rețea de difracție, ale cărei "linii" sunt ondulate (modulație în frecvențe spațiale), și cu transparentă variabilă (modulație în transmisie). Iluminând placa-hologramă cu o undă de reconstrucție $E_h(x, y, t)$, identică sau

asemănătoare cu cea de referință, folosită la înregistrare, unul din ordinele de difracție care apar reconstituie frontul undei obiect.

Fie

$$E_0(x, y) = E_{00}(x, y)e^{-i\phi(x, y)}, \quad (4.1)$$

frontul de undă obiect, ce se dorește a fi înregistrat, și

$$E_r(x, y) = E_{r0}(x, y)e^{-i\psi(x, y)}, \quad (4.2)$$

frontul de undă al undei de referință care interferă cu unda obiect (vezi fig.4.1). Definind intensitatea câmpului sumă $E_0 + E_r$ sub forma cunoscută $I = |E_0 + E_r|^2$, obținem

$$I = |E_0|^2 + |E_r|^2 + 2E_{00}(x, y)E_{r0}(x, y)\cos(\psi(x, y) - \phi(x, y)), \quad (4.3)$$

unde amplitudinile E_{00} și E_{r0} sunt presupuse reale. Se observă că, în timp ce primii doi termeni din membrul drept depind numai de intensitățile celor două unde, cel de-al treilea depinde și de faza lor relativă. Placa fotografică fiind impresionată de intensitatea I , rezultă că ea a înregistrat atât informația despre amplitudinea $E_{00}(x, y)$ a undei obiect, cât și informația despre faza sa $\phi(x, y)$, devenind astfel o hologramă. Deși despre proprietățile undei de referință nu am făcut până aici nici o presupunere, vom vedea că este absolut necesar ca ea să îndeplinească anumite condiții.

După cum am arătat și în capitolul precedent, filmul fotosensibil realizează o transformare liniară între intensitatea luminoasă incidentă, pe durata expunerii, și transmitanța obținută după dezvoltare. Vom presupune, în plus, că funcția de transfer a modulației (FTM) pentru emulsie se extinde la frecvențe spațiale suficient de mari, pentru a se putea înregistra toate detaliile de structură spațială purtate de unda incidentă. În sfârșit, vom admite că intensitatea $|E_r|^2$ a undei de referință este uniformă pe toată întinderea suprafeței înregistratoare. În aceste condiții, transmitanța filmului dezvoltat poate fi scrisă sub forma

$$t_r(x, y) = t_r + \beta'(|E_0|^2 + E_0E_r^* + E_rE_0^*), \quad (4.4)$$

unde t_r reprezintă valoarea transmitanței la iluminarea uniformă de referință, iar β' este produsul dintre panta β a curbei transmitanță-expunere (curba t-H), în punctul de referință, și timpul de expunere. Parametrul β' este negativ pentru o transparentă negativă (diapozitive) și pozitiv, pentru o transparentă pozitivă.

Să presupunem acum că, după dezvoltare, holograma este iluminată cu unda

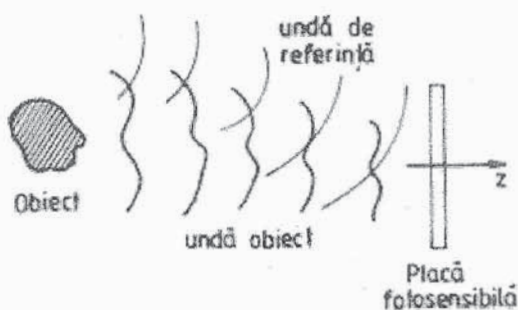


Fig.4.1. Înregistrare interferometrică.

coerentă de reconstrucție $E_h(x, y)$. Lumina transmisă de hologramă va fi evident de forma

$$E_h(x, y)t_r(x, y) = t_r E_h + \beta' E_0 E_0^* E_h + \beta' E_r^* E_h E_0 + \beta' E_r E_h E_0^* \equiv E_1 + E_2 + E_3 + E_4. \quad (4.5)$$

Dacă E_h este o undă perfect identică cu unda de referință E_r , al treilea termen din expresia anterioară devine

$$E_3(x, y) = \beta' |E_r|^2 \cdot E_0(x, y), \quad (4.6)$$

adică el reprezintă, până la un factor multiplicativ constant (admitem că unda de referință este uniformă), chiar unda obiect (vezi fig.4.2.a.). În mod similar, dacă unda $E_h(x, y)$ este aleasă a fi conjugata complexă a undei de referință, adică $E_r^*(x, y)$, termenul al patrulea din expresia (4.5) are forma

$$E_4(x, y) = \beta' |E_r|^2 \cdot E_0^*(x, y) \quad (4.7)$$

și este proporțional cu conjugata frontului obiect original (vezi fig.4.2.b). În fiecare din cele două cazuri analizate ($E_h = E_r$ și $E_h = E_r^*$) mai există încă trei termeni transmiși de

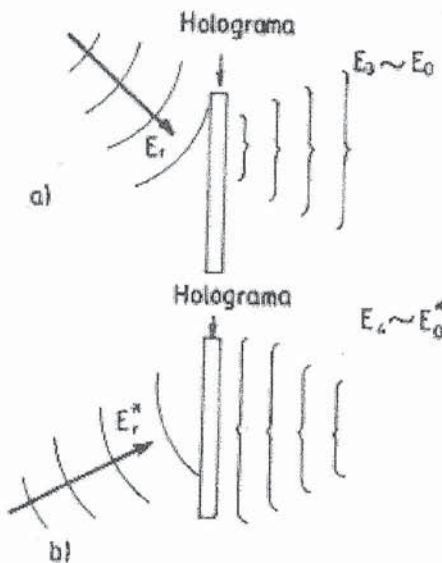


Fig.4.2. Reconstrucția frontului de undă cu: a) unda de referință originală E_r , b) conjugata E_r^* a undei de referință originale.

hologramă (E_1, E_2 și E_4 , respectiv E_1, E_2 și E_3) care trebuie separați de cel ce ne interesează (E_3 , respectiv E_4).

Având în vedere relația generală (4.4) putem spune că transformarea realizată de filmul fotografic în timpul expunerii este puternic neliniară în raport cu câmpurile incidente. În cele două cazuri extreme menționate anterior, sistemul "film fotografic" este totuși *liniar* dacă E_0 (sau E_0^*) este considerat "excitație" (semnal "in"), iar E_3 (sau E_4) este considerat "răspuns" (semnal "out") - vezi relațiile (4.6) și (4.7). Neliniaritatea sistemului se manifestă prin prezența "altor răspunsuri", necorespunzând liniar "excitației" E_0 . Important este, însă, faptul că nu există neliniaritate în sistem pentru unul din termeni (cel ce ne interesează efectiv), atâta timp cât variațiile expunerii rămân pe porțiunea liniară a curbei $t - H$.

Să trecem acum de la problema reconstrucției frontului undei obiect la

problema formării imaginii acestuia. Unda E_3 din ecuația (4.6) fiind un duplicat al undei obiect E_0 i se pare unui observator, plasat convenabil, că diverge de la obiectul inițial. Cu alte cuvinte, când unda de reconstrucție este chiar E_r , în timp ce holograma este iluminată, observatorul vede *imaginea virtuală* a obiectului original (fără ca acesta să mai fie acolo). Pentru un obiect punctiform situația este reprezentată în fig.4.3, a, b.

În mod similar, când ca undă de reconstrucție se utilizează E_R^* , componenta E_4 din ecuația (4.7) generează, de asemenea, o *image*, însă de data aceasta *reală*, ce corespunde unei focalizări în spațiu a luminii - vezi fig.4.3, c. Pentru a demonstra această afirmație, să considerăm cazul unui obiect punctiform, situat la distanța z_0 de planul filmului fotografic. Dacă (\hat{x}_0, \hat{y}_0) sunt coordonatele punctului obiect, câmpul incident pe film este suma câmpului de referință E_R cu unda sferică divergentă

$$E_0(x, y) = E_{00} e^{+ik \sqrt{z_0^2 + (x - \hat{x}_0)^2 + (y - \hat{y}_0)^2}} \quad (4.8)$$

Iluminând holograma dezvoltată cu E_R^* obținem

$$E_4(x, y) = \beta' |E_R|^2 E_0^*(x, y) = \beta' |E_R|^2 E_{00}^* e^{-ik \sqrt{z_0^2 + (x - \hat{x}_0)^2 + (y - \hat{y}_0)^2}} \quad (4.9)$$

care este o undă sferică ce *converge* spre un punct real (focar) situat la distanța z_0 de hologramă (ca în fig.4.3, c). Orice obiect mai complicat poate fi considerat însă ca o mulțime de surse punctiforme cu amplitudini și faze diferite și, prin proprietatea de liniaritate menționată mai sus, fiecare punct generează imaginea sa reală. Astfel se formează imaginea reală a întregului obiect.

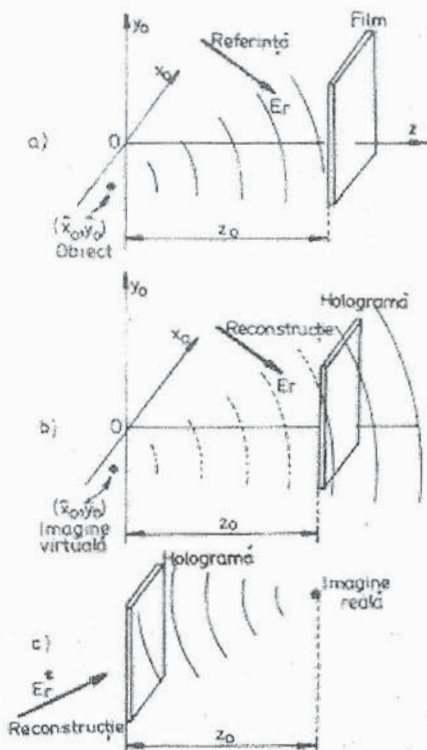


Fig.4.3. a) Înregistrare holografică pentru un obiect punctiform, b) generarea imaginii virtuale, c) generarea imaginii reale.

Remarcăm că în formula (4.9), în amplitudine, apare factorul E_{00}^* , adică este vorba de o undă *conjugată* față de unda sursei punctiforme obiect. Și în cazul unui obiect mai complicat, imaginea reală generată de hologramă prin procedeul c) este, întotdeauna, complex-conjugată față de obiectul original. Această schimbare de fază nu afectează intensitatea imagine, însă ea poate fi importantă în anumite aplicații care utilizează atât amplitudinea cât și faza imaginii.

Subliniem, încă o dată, că imaginile (virtuală sau reală) despre care am vorbit mai sus sunt "curate" numai dacă, printr-un anumit procedeu, ceilalți termeni transmiși de hologramă (E_1, E_2 și E_4 , respectiv E_1, E_2 și E_3) sunt fie suprimați, fie separați de imaginea ce ne interesează.

§. 4. 3. Holografia Gabor (metoda "on axis")

În acest paragraf vom prezenta modul în care a fost imaginat inițial, de către D. Gabor, procesul de reconstrucție a frontului de undă. Geometria necesară înțelegerii procesului de înregistrare este rezumată în fig. 4.4. Se presupune că obiectul are o transmitanță foarte mare, de forma $t(x_0, y_0) = t_0 + \Delta t(x_0, y_0)$, unde t_0 este *valoarea medie* (foarte mare) a transmitanței, față de care apar *variații* Δt foarte mici, $|\Delta t| \ll |t_0|$. Când un astfel de obiect este iluminat

coerent, cu un fascicul bine colimat, provenit de la sursa S, lumina transmisă constă din două componente: o undă plană uniformă, intensă (determinată de termenul t_0) și o undă împrăștiată, slabă (determinată de variațiile Δt). Dacă amplitudinea undei plane este A (mărime reală), iar a celei împrăștiate $a(x, y)$, (mărime complexă)

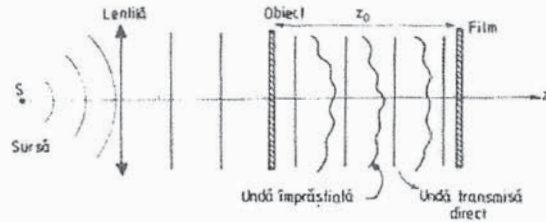


Fig.4.4. Înregistrarea unei holograme prin metoda lui Gabor.

intensitatea luminii incidente pe placa fotografică (situată la distanța z_0 de obiect) este

$$I(x, y) = |A + a(x, y)|^2 = A^2 + |a(x, y)|^2 + Aa(x, y) + Aa^*(x, y). \quad (4.10)$$

În această expresie unda împrăștiată este unda obiect, iar unda plană, foarte intensă, este unda de *referință*. Interferența acestor două unde generează o figură care conține informații și despre amplitudinea, dar și despre faza undei împrăștiate $a(x, y)$.

După dezvoltare, transmitanța de amplitudine, presupusă proporțională cu expunerea, are forma (vezi (4.4))

$$t_f(x, y) = t_r + \beta' (|a|^2 + Aa + Aa^*). \quad (4.11)$$

Iluminând normal filmul dezvoltat cu o undă plană uniformă, de amplitudine B, amplitudinea câmpului transmis este suma a patru termeni

$$Bt_f = Bt_r + \beta' B|a(x, y)|^2 + \beta' A B a(x, y) + \beta' A B a^*(x, y). \quad (4.12)$$

Primul termen este o undă plană care trece direct prin transparentul obținut (filmul dezvoltat), fără împrăștiere, atenuat uniform. Cel de-al doilea termen poate fi considerat neglijabil (deoarece $|\Delta t| \ll |t_0|$) și deci poate fi abandonat (căci $|a(x, y)| \ll A$). Cel de-al treilea termen, proporțional cu unda împrăștiată $a(x, y)$, reprezintă un câmp care vine, parcă, de la un obiect situat la distanța z_0 în stânga transparentului; el descrie imaginea *virtuală* a obiectului nostru (vezi fig.4.5). În mod similar, cel de-al patrulea termen, proporțional cu $a^*(x, y)$, în acord cu cele stabilite în paragraful anterior, conduce la formarea unei imagini *reale* la distanța z_0 de transparent, la dreapta acestuia; pentru observator el reprezintă o undă convergentă.

Rezultă că holograma lui Gabor generează simultan o imagine reală și una virtuală a obiectului cu variații de transmitanță Δt , ambele imagini fiind centrate pe axa hologramei (holografie "on axis"). Aceste imagini "gemene" sunt separate prin distanța $2z_0$ și sunt însoțite de fondul coerent Bt_r .

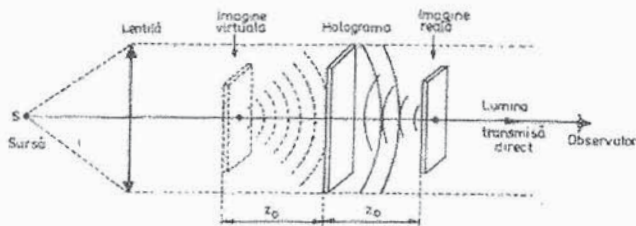


Fig.4.5. Formarea imaginilor "gemene" în metoda lui Gabor.

Holografia de tip Gabor prezintă unele neajunsuri care, încă de la început, i-au limitat posibilitățile de aplicare practică. În primul rând, aplicabilitatea ei este condiționată de relația $|\Delta t| \ll t_0$, adică de posibilitatea neglijării termenului $\beta^2 B|a|^2$. Dacă t_0 nu este mare, adică dacă obiectul are o transmitanță mică, se poate întâmpla ca tocmai termenul $\beta^2 B|a|^2$ să aibă cea mai mare valoare în expresia (4.12) și, astfel, el poate "șterge" imaginile care ne interesează. Pentru a fi mai expliciti să considerăm că obiectul din fig.4.4 constă dintr-o literă opacă pe un fond transparent (t_0 descrie deci fondul iar Δt -litera). În acest caz, observarea literei la citirea hologramei este posibilă. Dacă însă fondul este opac (t_0 este mic), iar litera este transparentă, vizualizarea literei la citirea hologramei este, aproape, imposibilă.

A doua deficiență a holografiei Gabor constă în apariția simultană a celor două imagini "gemene", respectiv în inseparabilitatea lor. Când ochiul se acomodează pentru observarea unei imagini (să zicem, a celei virtuale), el nu este acomodat și pentru observarea celeilalte imagini; de aceea, prin acest efect de perturbare, datorat celeilalte imagini, calitatea imaginii observate scade.

Dintre metodele propuse pentru eliminarea acestui neajuns, cea care s-a bucurat de cea mai largă răspândire o datorăm lui Leith și Upatnieks. Ei îi este consacrat paragraful care urmează.

§. 4. 4. Holografia Leith-Upatnieks (metoda "off-axis")

Diferența majoră care apare în această metodă, față de metoda prezentată anterior, constă în aceea că, în locul unei transmise direct (de obiectul cu transmitanță mare) este utilizată o undă de referință distinctă. În plus, unda de referință nu se mai propagă pe aceeași direcție cu unda obiect, ci sub un anumit unghi față de aceasta (off axis). La început, pentru a demonstra viabilitatea

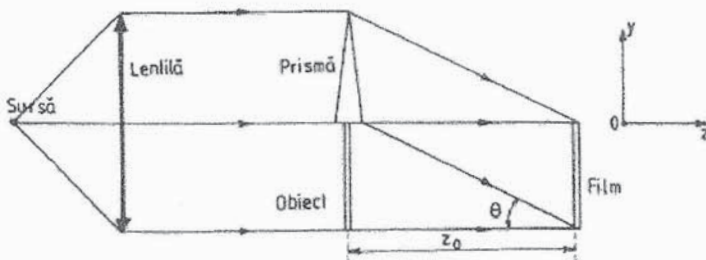


Fig.4.6. Înregistrarea unei holograme prin metoda Leith-Upatnieks.

procedurii preconizat, cei doi cercetători americani au experimentat fără utilizarea laserilor, într-un montaj de tipul celui schițat în fig.4.6. Cu toate acestea, metoda și-a dovedit înaltul randament abia atunci când s-au utilizat surse laser, cu coerență ridicată.

Din figură se observă că o porțiune a unei plane trece prin obiect, considerat a avea transmitanța de amplitudine $t_0(x_0, y_0)$, iar o altă parte printr-o prismă de foarte bună calitate, ce produce deviația θ , acest fascicul fiind cel de referință. La nivelul filmului avem suma a două unde coerente, dintre care una a transportat informația despre obiect.

Distribuția de amplitudine a câmpului, la nivelul planului filmului pe care se face înregistrarea, poate fi scrisă sub forma

$$E(x, y) = A \exp(-2\pi i \alpha y) + a(x, y), \quad (4.13)$$

unde frecvența spațială α , a unei de referință, are valoarea $\alpha = (1/\lambda)\sin\theta$ iar $a(x, y)$ este câmpul transmis de obiect.

Distribuția de intensitate luminoasă este dată de

$$I(x, y) = |E(x, y)|^2 = A^2 + |a(x, y)|^2 + Aa(x, y)\exp(2\pi i \alpha y) + Aa^*(x, y)\exp(-2\pi i \alpha y). \quad (4.14)$$

Scriind

$$a(x, y) = a_0(x, y)\exp(-i\Phi(x, y)), \quad (4.15)$$

obținem

$$I(x, y) = A^2 + a_0^2(x, y) + 2Aa_0(x, y)\cos(2\pi\alpha y - \Phi(x, y)). \quad (4.16)$$

Rezultă că filmul înregistrează atât informația de amplitudine, cât și informația de fază referitoare la obiect. Mai exact, ultimul termen ne arată că este vorba despre o modulare în amplitudine și în fază a purtătoarei spațiale cu frecvența α . Dacă frecvența α este suficient de mare (vezi mai departe formula (4.30)), din figura de interferență înregistrată se poate restabili în mod neambiguu, atât amplitudinea cât și faza obiectului.

Observație: În mod tacit, în toate considerentele anterioare am admis că funcția de transfer a modulației (FTM) pentru emulsia filmului (plăcii) utilizat(e) este egală cu 1 pentru toate frecvențele spațiale, ceea ce nu este niciodată adevărat. În general, așa cum am văzut în cap. III, secțiunea 3.15.5, funcția complexă de transfer a modulației pentru emulsie poate fi scrisă sub forma

$$M(v_x, v_y) = M_0(v_x, v_y)\exp[-i\Omega(v_x, v_y)], \quad (4.17)$$

unde M_0 și Ω sunt funcții reale. De aceea, pe durata expunerii, în locul intensității (4.16) va trebui să scriem următoarea distribuție *efectivă* de intensitate luminoasă

$$I_{\text{ef}}(x, y) = A^2 + a_0^2(x, y) + 2Aa_0(x, y)M_0(v_x, v_y - \alpha)\cos[2\pi\alpha y - \Phi(x, y) + \Omega(v_x, v_y - \alpha)]. \quad (4.18)$$

Dacă faza unei obiect este de forma $\Phi(x, y) = 2\pi(xv_x + yv_y)$, avem finalmente

$$I_{\text{ef}}(x, y) = A^2 + |a|^2 + 2A|a|M_0(v_x, v_y - \alpha)\cos\{2\pi[xv_x + y(v_y - \alpha)] - \Omega(v_x, v_y - \alpha) + \varphi_0\}, \quad (4.19)$$

unde φ_0 este argumentul (faza) lui a_0 , mărime presupusă constantă. Față de cazul unei emulsii ideale (când $M_0 = 1$, $\Omega = 0$), apare un *shift de fază* egal cu $\Omega(v_x, v_y - \alpha)$ și o *atenuare* dată de factorul $M_0(v_x, v_y - \alpha)$.

În fig.4.7 se reprezintă schematic acest rezultat. Aici am desenat doar o secțiune cu planul $v_x = 0$ a unei reprezentări ce ar putea fi, în general, tridimensională. Spectrul obiectului este presupus centrat pe frecvențele $v_x = v_y = 0$ iar spectrul unde de referință are $v_y = \alpha$. Se observă dependența de frecvența spațială v_y a funcției de transfer a modulației (FTM) și efectul de atenuare asupra imaginii reținute de hologramă.

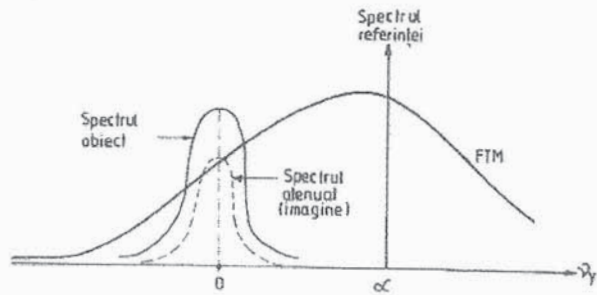


Fig.4.7. Efectele FTM pentru filmul utilizat.

Rezultă că, atunci când se utilizează o undă de referință colimată, filmul se comportă ca un sistem cu funcția de transfer coerent (FTC) de forma

$$H(v_x, v_y) = M(v_x, v_y - \alpha). \quad (4.20)$$

Totuși răspunsul în frecvențe spațiale al sistemului global este limitat nu numai de FTM (adică de emulsie), ci și de efectele de difracție care apar din cauza caracterului finit al aperturii transparenței filmului. După definirea funcției pupilare

$$P(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{pentru } (x, y) \text{ pe film,} \\ 0 & \text{în rest,} \end{cases} \quad (4.21)$$

având în vedere relația (3.442), în locul relației (4.20) vom avea următoarea FTC

$$H(v_x, v_y) = P(\lambda d_i v_x, \lambda d_i v_y) M(v_x, v_y - \alpha). \quad (4.22)$$

Putem conchide că efectul FTM a filmului este întru-totul echivalent cu cel al unei măști (care atenuază și shiftează faza) cu transmitanța de amplitudine de forma

$$t(x, y) = M\left(\frac{x}{\lambda d_i}, \frac{y}{\lambda d_i} - \alpha\right), \quad (4.23)$$

introdusă la nivelul pupilei de intrare a frontului unde de reconstrucție, în sistemul de format imagini.

După dezvoltarea filmului, obținem o hologramă a cărei transparență (transmitanță) este proporțională cu expunerea. Ea poate fi scrisă sub forma

$$t_f(x, y) = t_r + \beta' [|a|^2 + Aa \exp(2\pi i \alpha y) + Aa^* \exp(-2\pi i \alpha y)]. \quad (4.24)$$

Pentru comoditate, cei patru termeni din această relație se vor nota, succesiv, cu t_1, t_2, t_3 și t_4 .

Să presupunem că holograma este iluminată cu o undă plană incidentă normal, de amplitudine B , ca în fig.4.8. Câmpul transmis de hologramă are patru termeni distincți, corespunzând celor patru termeni ai transmitanței:

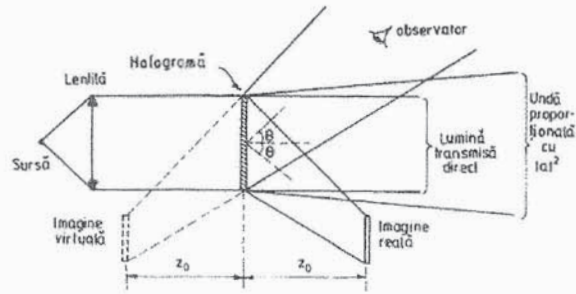


Fig.4.8. Reconstrucția imaginilor prin metoda "off-axis".

$$\begin{cases} E_1 = Bt_1 = Bt_r, & E_2 = Bt_2 = \beta' B |a(x, y)|^2, \\ E_3 = Bt_3 = \beta' B A a(x, y) \exp(2\pi i \alpha y), \\ E_4 = Bt_4 = \beta' B A a^*(x, y) \exp(-2\pi i \alpha y). \end{cases} \quad (4.25)$$

Componenta E_1 este o versiune atenuată a câmpului incident de reconstrucție. Ea reprezintă o undă plană ("lumină transmisă direct" - pe figură). Termenul E_2 este variabil spațial și este format din unde plane ce se propagă sub diverse unghiuri față de axa optică. Vom arăta, mai târziu, că dacă lărgimea benzii de frecvențe spațiale pentru $a(x, y)$ este mică în comparație cu α (frecvența purtătoare), energia acestei unde este concentrată în vecinătatea axei și ea poate fi separată spațial de imaginile ce ne interesează.

Unda E_3 este proporțională cu frontul de undă original $a(x, y)$, înmulțit cu un factor exponențial. Proporționalitatea cu $a(x, y)$ ne arată că este vorba de o imagine virtuală a obiectului, situată la distanța z_0 de hologramă, în stânga sa, în timp ce factorul $\exp(2\pi i \alpha y)$ ne spune că este vorba de o direcție înclinată cu unghiul θ față de normala la hologramă (vezi fig.4.8). Similar, E_4 este proporțional cu $a(x, y)$, adică el descrie o imagine reală, formată la distanța z_0 de planul hologramei, în dreapta sa; prezența factorului $\exp(-2\pi i \alpha y)$ ne arată că imaginea reală este înclinată sub unghiul $-\theta$ față de normala la hologramă.

Pentru ca separarea celor două imagini să fie utilă din punct de vedere practic este necesar ca θ să depășească o anumită limită inferioară θ_{\min} . Dacă separarea unghiulară îndeplinește condiția $\theta \geq \theta_{\min}$, se poate lucra la fel de bine cu $\beta' > 0$ sau < 0 (film pozitiv sau negativ).

Trebuie să observăm că unda de reconstrucție utilizată în fig.4.8 cade normal pe hologramă, adică nu are același traiect ca unda de referință utilizată la înregistrare, care era oblică față de film. În mod riguros (vezi și §. 4. 2) este necesar ca, la citire, holograma să fie iluminată sau cu fasciculul de referință sau cu cel complex conjugat. Cele două scheme de iluminare pot fi desenate separat de către cititor, imaginându-și că holograma din fig.4.8 a fost rotită spre stânga, respectiv spre dreapta cu unghiul θ (în jurul unei axe, perpendiculară pe planul desenului, ce ar trece prin centrul hologramei). Pe noile desene termenii E_1 și E_2 rămân termeni "on - axis" adică pe direcția axului optic principal al lentilei (în prelungirea fasciculului de reconstrucție incident pe hologramă).

În cele ce urmează, ne propunem să evaluăm unghiul θ_{\min} , adică valoarea minimă a frecvenței α pentru care spectrele de frecvențe spațiale ale termenilor t_3 și t_4 din transmitanța hologramei nu se suprapun între ele și nici cu spectrele termenilor t_1 și t_2 . Dacă nu există aceste suprapuneri de spectre, atunci, cel puțin în principiu, holograma poate fi transformată Fourier cu ajutorul unei lentile convergente, componentele spectrale nedorite pot fi eliminate (cu ajutorul unor diafragme convenabil plasate în planul focal), după care, cu ajutorul unei noi transformări Fourier se poate obține una din imaginile "gemene" ce ne interesează.

Dacă nu ținem cont de caracterul finit al aperturii transparentului (hologramei), putem scrie

$$G_1(v_x, v_y) \equiv \mathcal{F}\{t_1(x, y)\} = t_r \cdot \delta(v_x, v_y). \quad (4.26)$$

Folosind teorema de autocorelație, rezultă, de asemenea

$$G_2(v_x, v_y) \equiv \mathcal{F}\{t_2(x, y)\} = \beta' G_a(v_x, v_y) * G_a(v_x, v_y), \quad (4.27)$$

unde $G_a(v_x, v_y) = \mathcal{F}\{a(x, y)\}$.

În sfârșit pentru ceilalți termeni ai transmitanței avem

$$G_3(v_x, v_y) \equiv \mathcal{F}\{t_3(x, y)\} = \beta' A G_a(v_x, v_y - \alpha), \quad (4.28)$$

și

$$G_4(v_x, v_y) \equiv \mathcal{F}\{t_4(x, y)\} = \beta' A G_a^*(-v_x, -v_y - \alpha). \quad (4.29)$$

Observăm că lărgimea de bandă a funcției G_a este identică cu cea a obiectului (deoarece spectrele lor diferă numai printr-o funcție de transfer ce descrie propagarea, iar aceasta este

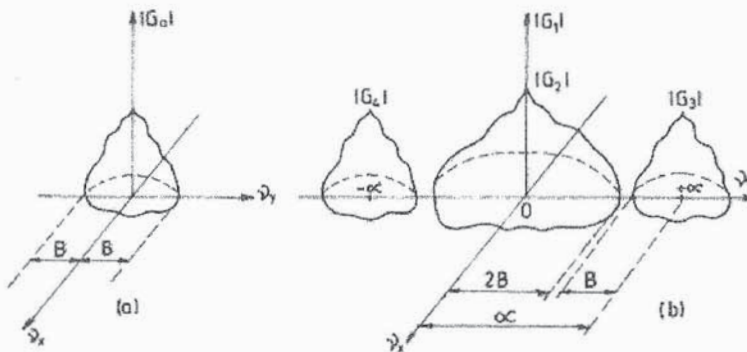


Fig.4.9. a) Spectrul obiectului,

b) Spectrul hologramei.

o funcție exponențial-complexă, unimodulară). Să presupunem că obiectul nu are frecvențe spațiale care să depășească, în modul, valoarea B (mm^{-1}). Aceasta înseamnă că spectrul $|G_a|$ poate fi reprezentat ca în fig.4.9, a. Spectrul corespunzător, transmis de hologramă este arătat în fig.4.9, b, în care termenul G_1 este o funcție δ - Dirac, luată în originea planului (v_x, v_y) . Fiind proporțional cu funcția de autocorelație a lui $|G_a|$, termenul $|G_2|$

se extinde până la frecvențe egale cu $2B$ (mm^{-1}). Termenii $|G_3|$ și $|G_4|$ sunt proporționali cu funcția $|G_a|$ dar deplasată în $(0, \alpha)$, respectiv în $(0, -\alpha)$. Figura (4.9) ne arată că $|G_3|$ și $|G_4|$ pot fi izolați de $|G_2|$ dacă

$$\alpha \geq 3B, \quad (4.30)$$

sau echivalent

$$\sin \theta \geq 3B\lambda; \quad (4.31)$$

Rezultă

$$\theta_{\min} = \arcsin(3B\lambda). \quad (4.31')$$

Există o situație în care aceste restricții pot fi întrucâtva relaxate. Este vorba de cazul în care unda obiect este mult mai puțin intensă decât unda de referință, adică $A \gg a$. Motivul este oarecum similar cu cel prezentat cu ocazia discutării hologramei lui Gabor. Termenul G_2 este generat fizic prin interferența luminii de la fiecare punct obiect cu cea de la toate celelalte puncte obiect, în timp ce termenii G_3 și G_4 provin din interferența undei de referință cu undele obiect. De aceea, când $a \ll A$, termenul G_2 este neglijabil de mic, în comparație cu G_1 , G_3 și G_4 , putând fi omis. Acum separarea se realizează pentru $\alpha \geq B$ adică pentru $\theta \geq \theta_{\min} = \arcsin(B\lambda)$.

Să trecem, în continuare, la analiza înregistrării și citirii hologramelor cu ajutorul unor fascicule - de referință, respectiv de reconstrucție - sferice, și nu paralele, bine colimate, ca până acum. Fie configurația geometrică reprezentată în fig.4.10 cu un obiect

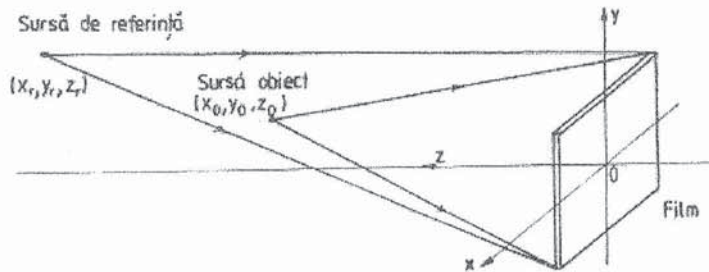


Fig.4.10. Configurația geometrică pentru înregistrare (unde sferice).

punctiform de coordonate (x_o, y_o, z_o) și cu o undă de referință ce pornește din punctul de coordonate (x_r, y_r, z_r) . În fig. 4.11 se redă geometria reconstrucției, în care unda de citire a hologramei pornește din punctul de coordonate (x_h, y_h, z_h) .

Fie λ_1 lungimea de undă la înregistrare (obiect și referință) și λ_2 lungimea de undă la reconstrucție (redare, citire).

Presupunând că distanțele z_o , z_r și z_h sunt mari în comparație cu celelalte coordonate, putem utiliza aproximații pătratice la exprimarea undelor sferice în cele trei situații.

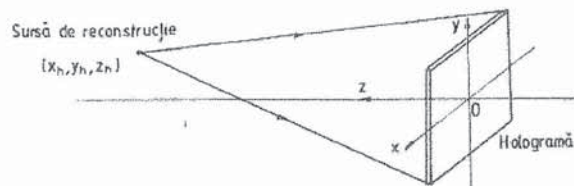


Fig.4.11. Configurația geometrică pentru reconstrucție (undă sferică).

Câmpul total incident pe filmul fotografic are forma

$$E(x, y) = A \exp \left\{ \frac{\pi i}{\lambda_1 z_r} [(x - x_r)^2 + (y - y_r)^2] \right\} + a \exp \left\{ \frac{\pi i}{\lambda_1 z_0} [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2] \right\}, \quad (4.32)$$

A și a fiind constante complexe, reprezentând amplitudinile relative și fazele celor două unde sferice. La nivelul filmului, distribuția de intensitate luminoasă în figura de interferență este

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(x, y) = |E(x, y)|^2 = & |A|^2 + |a|^2 + Aa^* \exp \left\{ \frac{i\pi}{\lambda_1 z_r} [(x - x_r)^2 + (y - y_r)^2] - \right. \\ & \left. - \frac{i\pi}{\lambda_1 z_0} [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2] \right\} + A^* a \exp \left\{ -\frac{i\pi}{\lambda_1 z_r} [(x - x_r)^2 + (y - y_r)^2] + \right. \\ & \left. + \frac{i\pi}{\lambda_1 z_0} [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2] \right\}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

După dezvoltare, când transmitanța de amplitudine este proporțională cu expunerea, cei doi termeni importanți ai acesteia sunt

$$\begin{aligned} t_3 = \beta' Aa^* \exp \left\{ \frac{i\pi}{\lambda_1 z_r} [(x - x_r)^2 + (y - y_r)^2] - \frac{i\pi}{\lambda_1 z_0} [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2] \right\}, \\ t_4 = \beta' A^* a \exp \left\{ -\frac{i\pi}{\lambda_1 z_r} [(x - x_r)^2 + (y - y_r)^2] + \frac{i\pi}{\lambda_1 z_0} [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2] \right\}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

La reconstrucție, holograma este iluminată cu unda sferică

$$E_h(x, y) = B \exp \left\{ \frac{i\pi}{\lambda_2 z_h} [(x - x_h)^2 + (y - y_h)^2] \right\}, \quad (4.35)$$

iar cei doi termeni importanți din unda transmisă sunt

$$E_3(x, y) = E_h t_3 = B t_3 \exp \left\{ \frac{i\pi}{\lambda_2 z_h} [(x - x_h)^2 + (y - y_h)^2] \right\}, \quad (4.36)$$

$$E_4(x, y) = E_h t_4 = B t_4 \exp \left\{ \frac{i\pi}{\lambda_2 z_h} [(x - x_h)^2 + (y - y_h)^2] \right\}. \quad (4.37)$$

Să examinăm mai atent dependența lor de coordonatele (x, y) . În aproximația pătratică în care am lucrat, ei (E_3 și E_4) reprezintă unde sferice, care converg spre un anumit punct sau diverg de la un anumit punct. Este necesar să precizăm aceste puncte.

Efectuând înmulțirile exponențialelor din E_3 și E_4 , obținem mai întâi expresii de forma (cu termeni pătratici)

$$\exp \left[i\pi \left(\pm \frac{1}{\lambda_1 z_r} \mp \frac{1}{\lambda_1 z_0} + \frac{1}{\lambda_2 z_h} \right) (x^2 + y^2) \right], \quad (4.38)$$

în care semnalele de sus (jos) se referă la E_3 (E_4). Comparând această exponențială cu o undă sferică ce diverge dintr-un punct z_i (situat la stânga hologramei)

$$\exp\left[i\pi\frac{x^2+y^2}{\lambda_2 z_i}\right], \quad (4.39)$$

obținem

$$z_i = \left(\frac{1}{z_h} \pm \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot \frac{1}{z_r} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot \frac{1}{z_0}\right)^{-1}. \quad (4.40)$$

Când z_i este o cantitate *pozitivă* imaginea este *virtuală* și este situată la stânga hologramei. Dacă z_i este o cantitate *negativă* imaginea este *reală* și este situată la dreapta hologramei.

Rămâne să precizăm și coordonatele x_i, y_i ale punctului imagine. Pentru aceasta, vom lua în considerare termenii liniari din exponențialele lui E_3 și E_4 (după efectuarea înmulțirilor), care au forma

$$\exp\left\{-2\pi i\left[x\left(\frac{-}{+}\frac{x_0}{\lambda_1 z_0} \pm \frac{x_r}{\lambda_1 z_r} + \frac{x_h}{\lambda_2 z_h}\right) + y\left(\frac{-}{+}\frac{y_0}{\lambda_1 z_0} \pm \frac{y_r}{\lambda_1 z_r} + \frac{y_h}{\lambda_2 z_h}\right)\right]\right\} \quad (4.41)$$

și îi vom compara cu

$$\exp\left[-2\pi i\frac{xx_i + yy_i}{\lambda_2 z_i}\right]. \quad (4.42)$$

Obținem

$$x_i = z_i\left(\frac{-}{+}\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot \frac{x_0}{z_0} \pm \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot \frac{x_r}{z_r} + \frac{x_h}{z_h}\right), \quad (4.43)$$

$$y_i = z_i\left(\frac{-}{+}\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot \frac{y_0}{z_0} \pm \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot \frac{y_r}{z_r} + \frac{y_h}{z_h}\right). \quad (4.44)$$

Din expresiile lui z_i, x_i, y_i rezultă că dacă în planul $z_0 =$ fixat, modificăm coordonatele punctului obiect cu $(\Delta x_0, \Delta y_0)$, în planul $z_i =$ constant (independent de x_0 și y_0), punctul imagine se deplasează cu

$$\Delta x_i = \frac{-}{+}\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot \frac{z_i}{z_0} \cdot \Delta x_0, \quad \Delta y_i = \frac{-}{+}\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot \frac{z_i}{z_0} \cdot \Delta y_0. \quad (4.45)$$

Putem defini deci o *mărire transversală*

$$M = \left|\frac{\Delta x_i}{\Delta x_0}\right| = \left|\frac{\Delta y_i}{\Delta y_0}\right| = \left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot \frac{z_i}{z_0}\right|. \quad (4.46)$$

Ținând cont și de expresia lui z_i , obținem

$$M = \left|1 - \frac{z_0}{z_r} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \cdot \frac{z_0}{z_h}\right|^{-1}. \quad (4.47)$$

Când la înregistrare și la reconstrucție se utilizează fascicule paralele, colimate, putem pune z_r și z_h egale cu infinit și rezultă $M = 1$ (chiar dacă $\lambda_2 \neq \lambda_1$) și $z_i = \frac{-}{+}(\lambda_1/\lambda_2)z_0$. Mărirea

se obține egală cu 1 și în cazul imaginii virtuale, când $\lambda_2 = \lambda_1$ și $z_h = z_r$, respectiv în cazul imaginii reale, când $\lambda_2 = \lambda_1$ și $z_h = -z_r$.

După cum am văzut într-un paragraf anterior, curba transmitanță-expunere ($t-H$) nu este o curbă liniară decât pe o porțiune relativ mică (H nici prea mare, nici prea mic). Este de dorit ca expunerea H să fie situată cam pe la mijlocul acestei regiuni liniare. Totuși, în practică, nu de puține ori, pe hologramele unor obiecte transparente, la care transmitanța variază mult, pot apărea zone relativ întinse, cu expuneri mai mari sau mai mici decât cele ce ar corespunde regiunii liniare a curbei $t-H$ și, în consecință, iau naștere distorsiuni de contrast pentru imagine sau neclarități. Pentru evitarea acestor consecințe neplăcute ale neliniarităților, Leith și Upatnieks au propus iluminarea obiectelor transparente (la care transmitanța variază în limite largi) prin intermediul unui mediu difuzant (plasat în fața obiectului din fig.4.6, dar foarte aproape de obiect). Deoarece acest mediu (sticlă mată, de exemplu) împrăștie lumina incidentă sub diverse unghiuri, lumina ce provine de la fiecare element de arie al obiectului este răspândită pe întreaga placă fotografică; în acest fel, se elimină zonele de expunere foarte mică sau foarte mare care ar fi prezente la o iluminare directă, fără difuzor.

§. 4. 5. Holograme plane de fază

Cele examinate până aici s-au referit în exclusivitate la hologramele ce acționează ca transparente cu absorbție variabilă și variații de fază nesemnificative, adică la situațiile în care funcția complexă de transmitanță $t_f(x, y)$ are modulul variabil din punct în punct, faza sa fiind practic constantă. Mediile de înregistrare oferă însă și posibilitatea complementară, adică obținerea unui transparent cu absorbție foarte mică, nesemnificativă, aproape aceeași peste tot, dar cu fază variind semnificativ din punct în punct. În acest caz spunem că avem de-a face cu o *hologramă de fază*. Variațiile spațiale ale fazei pot apărea fie din cauza neuniformității grosimii peliculelor (mediilor) înregistratoare (când indicele de refracție este constant peste tot), fie din cauza variației indicelui de refracție din loc în loc (când grosimea peliculelor este riguros constantă pe toată întinderea lor). În general, pot varia atât grosimea, cât și indicele de refracție.

Pentru a simplifica tratarea matematică ulterioară să ne referim la formula (4.13) și la situația reprezentată în fig.4.6, considerând că funcția a (câmpul transmis de obiect pe film), are numai variații de-a lungul axei y , adică $a \neq a(x)$. Avem deci

$$E(y) = A \exp(i\beta y) + a(y), \quad (4.48)$$

unde $\beta = -2\pi\alpha = -(2\pi/\lambda)\sin\theta = -k \sin\theta$, (θ este înclinarea referinței), iar $a(y) = a_0 \exp(-i\phi(y))$, cu a_0 constant, este unda obiect.

Să scriem funcția complexă de transmitanță a hologramei realizate sub forma

$$t_f(y) = t_{f_0} \exp(i\phi_h(y)), \quad t_{f_0} = \text{constant}, \quad (4.49)$$

și să admitem că modulația de fază produsă de hologramă asupra undeii de citire (reconstrucție) este direct proporțională cu intensitatea luminoasă $|E(y)|^2$ de la înregistrare, adică

$$\phi_h(y) \cong |E(y)|^2 = a_0^2 + A^2 + 2Aa_0 \cos(\phi(y) + \beta \cdot y).$$

Transmitanța hologramei se poate pune acum sub forma

$$t_f(y) = T_f \exp(ip \cos \rho(y)), \quad (4.50)$$

unde $\rho(y) = \phi(y) + \beta \cdot y$, $p = 2Aa_0$, $T_f = t_{f0} \exp \left[i \left(a_0^2 + A^2 \right) \right]$.

Exprimând exponențiala din (4.50) cu ajutorul formulei lui Euler și utilizând următoarele dezvoltări, cunoscute, prin funcții Bessel

$$\cos(p \cos \rho) = J_0(p) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{2n}(p) \cos(2n\rho), \quad (4.51)$$

$$\sin(p \cos \rho) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+2} J_{2n+1}(p) \cos[(2n+1)\rho], \quad (4.52)$$

obținem

$$t_f(y) = T_f \left\{ J_0(p) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{2n}(p) \cos(2n\rho) + 2i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+2} J_{2n+1}(p) \cos[(2n+1)\rho] \right\}, \quad (4.53)$$

adică holograma de fază este capabilă să transmită *teoretic* o infinitate de ordine n de difracție (din ce în ce mai mici, ca pondere).

Dacă ne referim numai la *ordinul principal*, dominant, $n = 0$, avem

$$t_f^{(0)}(y) = 2iT_f J_1(p) \cos \rho(y) = iT_f J_1(p) [\exp(i\rho(y)) + \exp(-i\rho(y))], \quad (4.54)$$

în care cei doi termeni din paranteza dreaptă generează, la reconstrucție, imaginea conjugată și cea primară. Explicităm termenul principal-primar sub forma

$$t_{fp}^{(0)}(y) = t_{f0} \exp \left[i \left(a_0^2 + A^2 + \frac{\pi}{2} \right) \right] \cdot J_1(2Aa_0) \exp[-i(\phi(y) + \beta \cdot y)]. \quad (4.55)$$

Dacă unda de citire coincide cu cea de referință, adică $E_h(y) = A \cdot \exp(i\beta y)$, obținem

$$t_{fp}^{(0)}(y) \cdot E_h(y) = At_{f0} \exp \left[i \left(a_0^2 + A^2 + \frac{\pi}{2} \right) \right] \cdot J_1(2Aa_0) e^{-i\phi(y)}, \quad (4.56)$$

adică o cantitate proporțională cu factorul fazic al undei obiect $a(y)$. Când amplitudinea $p = 2Aa_0$ a modulației de fază este mică, putem aproxima $J_1(p) \approx p/2 = Aa_0$ și rezultă

$$t_{fp}^{(0)}(y) E_h(y) = \text{const.} a(y), \quad (4.57)$$

care, până la factorii constanți de fază și amplitudine, reprezintă tocmai unda obiect originală.

Pentru amplitudini mai mari ale modulației de fază, $J_1(p)$ nu mai poate fi considerat liniar în p (adică în a_0) și imaginea reconstituită va prezenta distorsiuni.

Funcția $\varphi_h(y)$ fiind de forma kng ($k = 2\pi/\lambda$, $n =$ indicele de refracție iar $g =$ grosimea hologramei), poate fi realizată practic fie cu o variație $n = n(y)$ a indicelui de

refracție, fie cu o variație $g = g(y)$ a grosimii, fie cu variația ambelor mărimi. De exemplu, când variația de fază provine de la grosimea $g(y)$ (vezi fig. 4.12) putem scrie

$$\varphi_h(y) = \frac{2\pi}{\lambda}ng(y) = a_0^2 + A^2 + 2Aa_0 \cos(\phi(y) + \beta y), \quad (4.58)$$

adică $g(y)$ are forma

$$g(y) = g_0 + \frac{g_1}{2} \cos(\phi(y) + \beta \cdot y), \quad (4.59)$$

unde g_0 este grosimea medie a hologramei, iar g_1 este dublul amplitudinii de variație a grosimii (de la maxim la minim). Pentru ca $p = 2Aa_0$ să fie mic este necesar ca g_1 să fie mic. Aceasta înseamnă că imaginea se reconstituie fără distorsiuni numai dacă amplitudinea de variație a grosimii (sau indicelui de refracție) este mică.

Cea mai frecvent folosită metodă de obținere a hologramelor de fază este cea a

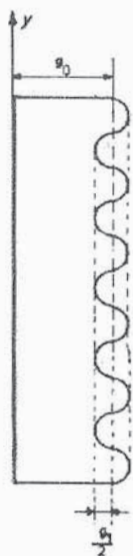


Fig.4.12. Hologramă de fază cu grosime variabilă.

"albirii" hologramelor convenționale, de amplitudine (cu ajutorul unor agenți chimici). Există două tipuri de procese de albire: unul realizează transformarea distribuției spațiale a coeficientului de absorbție într-o distribuție corespunzătoare a grosimii albite a emulsiei (se crează așa-numitul relief spațial), iar celălalt transformă aceeași distribuție spațială a coeficientului de absorbție în distribuția corespunzătoare a indicelui de refracție (păstrându-se însă și o oarecare absorbție). În primul caz, se îndepărtează fizic centrii de argint formați în timpul expunerii, astfel încât gelatina din vecinătatea acestor centri să rămână mai stabilă în comparație cu gelatina din celelalte părți; după uscare, aceste porțiuni rămân mai groase, astfel că holograma capătă o modulație spațială a grosimii gelatinei. În al doilea caz, tot prin acțiune chimică, argintul expus în holograma de amplitudine se transformă într-un compus transparent cu indice de refracție mai mare decât al gelatinei, apărând astfel o modulație a indicelui de refracție de-a lungul hologramei.

În afara filmelor convenționale, cu emulsie de halogenură de argint, se mai folosesc, cu bune rezultate, în diverse domenii spectrale, filme cu gelatină dicromată (în albastru sau ultraviolet) fotopolimeri, materiale termoplaste (în sistem cu un fotoconductor), cristale electro-optice etc.

Ca avantaje ale hologramelor de fază față de cele de amplitudine amintim eficiența lor la difracție* mult sporită (de 6-8 ori mai mare, sau chiar mai mult, în cazul unor cristale electro-optice), precum și valoarea mult sporită a expunerii (cam de 10 ori).

§. 4. 6. Holografia obiectelor tridimensionale

La doi ani după realizarea primelor holograme de obiecte plane, Leith și Upatnieks anunțau extinderea procedurii în cazul obiectelor tridimensionale, respectiv obținerea

* Raportul dintre intensitatea difractată în ordinul principal de difracție (care contribuie la reconstituirea frontului de undă original) și intensitatea fascicului de citire incident pe hologramă.

efectului de profunzime, de stereoscopie, în mod obiectiv (nu subiectiv ca în vederea binoculară). Succesul încercărilor lor a fost posibil datorită excelentelor proprietăți de coerență spațială și temporală a radiațiilor furnizate de laserul cu He-Ne utilizat.

Cum s-a procedat practic? Un fascicul de raze paralele, provenind de la un laser (ce nu s-a prezentat în fig.4.13) este reflectat parțial de către oglinda plană P și este astfel dirijat direct spre placa fotografică H. O altă parte a fascicului incident iluminează obiectul tridimensional, ce poate fi considerat ca format dintr-o infinitate de puncte obiect difuzante. Din lumina difuzată de obiect, o parte ajunge pe

placa fotografică, unde interferă cu lumina ce a fost reflectată de oglindă (vezi fig.4.13). Figura de interferență ce ia naștere (ce se înregistrează) are o formă extrem de complicată. Ea este formată dintr-un ansamblu de figuri de interferență circulare a fondului coerent cu undele ce sosesc de la diferitele puncte ale obiectului tridimensional, dar, posibil, și din figuri de interferență reciprocă. După dezvoltare, holograma H este iluminată *cu un fascicul luminos coerent, dar identic cu cel ce a servit la înregistrare* (fig.4.14) și imaginea obiectului tridimensional se reconstituie punct de punct. Obținem astfel imaginea virtuală pusă în evidență în fig.4.14, cu profunzimea sa obiectivă. Holograma reconstituie de asemenea și o imagine reală (nedesenată pe figură), însă observarea ei este mult mai dificilă. Într-adevăr, acele puncte ale obiectului care sunt mai apropiate de placa fotografică (sau de observatorul care ar privi obiectul direct) vor fi, în imaginea reală, mai apropiate de hologramă (sau mai depărtate de observatorul care ar privi obiectul direct). Imaginile de acest gen se numesc *pseudoscopice* pentru că ele reconstituie oarecum "pe dos" obiectul real, pentru observatorul care privește direct (suprafețele concave se văd conexe și invers).

Revenind la imaginea virtuală vom spune că aceasta este o reconstituire exactă, volumică, a obiectului. Modificând ușor unghiul vizual, se mai pot observa și diverse detalii laterale, pe lângă cele frontale. Imaginea virtuală poate fi fotografiată, "pe diverse fațete", cu condiția ca obiectivul aparatului foto să se afle, asemeni ochiului - la observarea vizuală, între limitele fascicului de reconstrucție.

Evident, la înregistrarea hologramei, unda obiect și unda de referință trebuie să fie reciproc coerente. Lărgimea de coerență transversală trebuie să fie, în orice caz, nu mai mică decât dimensiunile corespunzătoare ale obiectului, iar lungimea de coerență longitudinală - superioară diferențelor de drum optic dintre unda obiect și unda de referință. Cu alte cuvinte, este necesar ca laserul utilizat la înregistrare să furnizeze radiație luminoasă cu un înalt grad de coerență temporală și spațială. Frecvența radiației laser utilizată la reconstrucție poate să

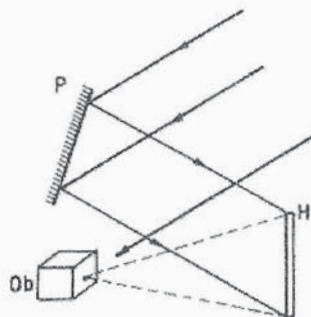


Fig.4.13. Înregistrarea holografică pentru un obiect tridimensional.

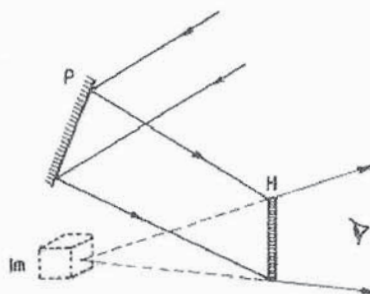


Fig.4.14. Reconstrucția imaginii virtuale tridimensionale.

difere de cea folosită la înregistrarea hologramei, deoarece "citirea" ei constă de fapt, în difracția unei incidente pe hologramă. Când lungimea de undă (de reconstrucție) crește, cresc de asemenea și unghiurile de difracție și de aceea dimensiunea imaginii este mai mare decât dimensiunea obiectului (vezi formulele 4.45)).

Reconstrucția poate fi realizată și fără a utiliza surse laser, cu condiția ca sursa clasică folosită să aibă dimensiuni cât mai mici, în așa fel ca la nivelul hologramei să existe o bună coerență. De exemplu, unda transmisă de o sursă clasică (necoerentă) cu dimensiunea unei gămălii de ac, ținută cu mâna întinsă în fața ochilor, are la nivelul irisului (pupilei) un grad de coerență foarte înalt. De aceea, dacă holograma se așează între această sursă, la nivelul mâinii întinse, și ochi, atunci putem vedea imaginea holografică, reconstruită, a obiectului spațial. Caracterul volumic al imaginii se conservă, însă, spre deosebire de imaginea reconstruită cu ajutorul laserului, de data aceasta, claritatea este ceva mai slabă (datorită pierderii maximelor de difracție de ordine superioare, adică a frecvențelor spațiale înalte).

Cu tot caracterul "volumic" al înregistrării și redării prin procedeul schițat mai sus, detaliile din spatele obiectului iluminat nu pot fi observate. Pentru depășirea acestui inconvenient s-a propus înregistrarea holografică pe un film care înconjoară obiectul din toate părțile. În fig.4.15, obiectul *Ob* se află în mijlocul unei camere cilindrice pe a cărei perete interior se află așezat filmul fotografic. El primește lumină direct, de la laserul *L*, dar și lumină difuzată de obiect. După dezvoltare, filmul (holograma de 360°) se depune în același loc. Lumina laser ce cade pe hologramă reconstituie imaginea virtuală *Im* a obiectului, fără ca acesta să mai fie acolo (fig.4.16).

Pentru a obține holograme de bună calitate, pe lângă înaltul grad de coerență despre care am pomenit mai sus, mai este necesară și o intensitate luminoasă bună. Suntem datori să precizăm, de asemenea, că înregistrarea unei holograme necesită precauții experimentale destul de severe. Prima dintre acestea se referă la *stabilitatea* foarte bună a instalației

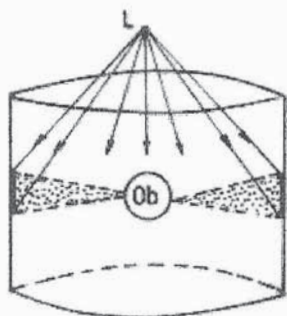


Fig.4.15. Înregistrarea holografică "din toate părțile" a unui obiect tridimensional.

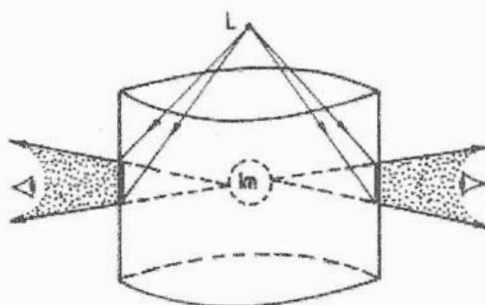


Fig.4.16. Reconstrucția imaginii tridimensionale a obiectului din figura anterioară.

holografice. Cu cât intensitatea luminoasă a fascicului laser este mai mare, cu atât timpul de expunere poate fi mai mic și deci stabilitatea mecanică a instalației mai puțin strictă. Pe de altă parte, timpul de expunere necesar într-o situație dată, depinde de o diversitate de factori, printre care amintim: transmitanța sau reflectanța obiectului, distanțele și geometria instalației adoptate, caracteristicile filmului folosit, etc. La utilizarea unor laseri în regim pulsatoriu, timpul de expunere poate coborî la nivelul nano- (sau chiar al pico-) secundelor și, în acest caz, putem fi mai puțin exigenți față de stabilitatea mecanică. Însă, și de data

aceasta există limte care nu pot fi depășite întotdeauna; la utilizarea unor pulsuri laser gigantice obiectul se încălzește și proprietățile lui, ca și configurația sa spațială, se modifică iar calitatea hologramei are de suferit. În general, putem spune că numai practica experimentală, cu eșecurile sale inerente la început, ne poate conduce la găsirea compromisului acceptabil sau optim.

§. 4. 7. Holograme Fourier

Consacrăm acest paragraf unei alte metode holografice de înregistrare și redare, inițiată în anul 1965 de către fizicianul american G. W. Stroke. Să considerăm schema de înregistrare reprezentată în fig.4.17, în care unda de referință este acum o undă sferică divergentă, ce pornește dintr-un punct ce este coplanar cu obiectul (plan). Pentru motive ce

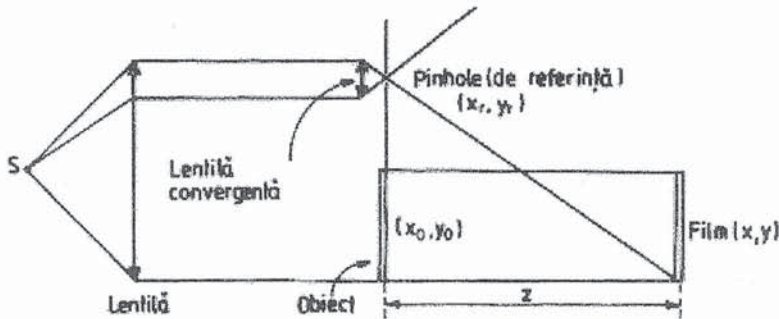


Fig.4.17. Înregistrarea unei holograme Fourier, fără lentile.

vor deveni evidente puțin mai târziu, holograma înregistrată în acest fel poartă numele de *hologramă Fourier fără lentile*.

Fie (x_0, y_0) coordonatele unui punct obiect și (x, y) coordonatele unui punct din planul filmului, în care sosesc atât unda obiect cât și unda de referință. Dacă diafragma cvasipunctiformă (pinhole) are coordonatele (x_r, y_r) , atunci distribuțiile de amplitudine în planul filmului, pentru undele "de referință" și "obiect", au forma

$$E_r(x, y) = A \exp \left\{ \frac{\pi i}{\lambda z} \left[(x - x_r)^2 + (y - y_r)^2 \right] \right\}, \quad (4.60)$$

$$E_o(x, y) = a \exp \left\{ \frac{\pi i}{\lambda z} \left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \right] \right\}. \quad (4.61)$$

Aici, ca și în §. 4. 4, în exprimarea distanțelor, ne-am rezumat la o aproximație pătratică, neglijând termenii de ordin mai mare decât 2.

Intensitatea incidentă pe film, în timpul expunerii, este

$$\mathcal{I}(x, y) = |E_o + E_r|^2 = A^2 + |a|^2 + 2A|a| \cdot \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda z} (x_0 - x_r)x + \frac{2\pi}{\lambda z} (y_0 - y_r)y + \theta(x_r, y_r; x_0, y_0) \right], \quad (4.62)$$

în care unghiul fazic θ depinde numai de coordonatele (x_0, y_0) și (x_r, y_r) fără a depinde de coordonatele filmului. Din ultima relație, rezultă că unda generată de punctul obiect (x_0, y_0) interferează cu unda de referință ce pornește din punctul (x_r, y_r) pentru a produce pe film franje armonice (cosinusoidale) cu frecvențe spațiale

$$v_x = \frac{x_0 - x_r}{\lambda z}, \quad v_y = \frac{y_0 - y_r}{\lambda z}. \quad (4.63)$$

Altfel spus, în această configurație geometrică de înregistrare, există o corespondență

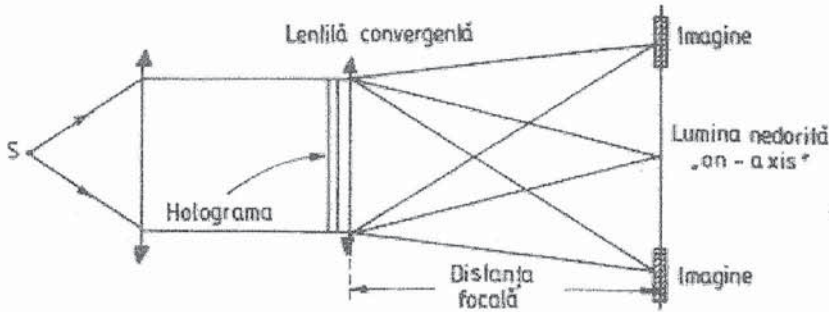


Fig.4.18. Obținerea imaginilor de la o hologramă Fourier.

biunivocă între setul (x_0, y_0) și setul (v_x, v_y) , adică fiecărui punct obiect îi corespund pe hologramă frecvențe spațiale bine-determinate. O astfel de corespondență apare, așa cum am văzut, într-o *transformată Fourier* și acesta este motivul pentru care holografierea descrisă poartă numele lui Fourier (deși a fost propusă de către Stroke și colaboratorii săi). Aici, operația matematică de transformare Fourier se realizează fără intervenția vreunei lentile.

După dezvoltarea filmului, la reconstrucție, transparentul (holograma) obținut(ă) se iluminează ca în fig.4.18, așezând imediat după el (ea) o lentilă convergentă de foarte bună calitate. Putem considera că unda de reconstrucție, are forma (4.35) cu $z_h = \infty$, astfel că din formula (4.40) cu $z_0 = z_r$, obținem $z_i^{-1} = 0$, adică $z_i = \infty$ pentru ambele imagini gemene. Lentila convergentă, situată imediat după hologramă, "strânge" aceste două imagini în planul său focal, real.

Să încercăm a analiza acum ce efect are funcția de transfer a modulației filmului (FTM) asupra calității imaginilor. Pentru aceasta, vom presupune că funcția complexă de transfer (adică răspunsul spectral al emulsiei) are forma

$$M(v_x, v_y) = M_0(v_x, v_y) \exp[-i\Omega(v_x, v_y)], \quad (4.64)$$

în care $M_0(v_x, v_y)$ și $\Omega(v_x, v_y)$ sunt funcții reale. Ținând cont de aceasta, în locul relației (4.62) avem o distribuție efectivă de intensitate de forma

$$I_{\text{ef}}(x, y) = A^2 + |a|^2 + 2A|a|M_0\left(\frac{x_0 - x_r}{\lambda z}, \frac{y_0 - y_r}{\lambda z}\right) \cdot \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda z}(x_0 - x_r)x + \frac{2\pi}{\lambda z}(y_0 - y_r)y + \theta(x_r, y_r; x_0, y_0) - \Omega\left(\frac{x_0 - x_r}{\lambda z}, \frac{y_0 - y_r}{\lambda z}\right)\right]. \quad (4.65)$$

Se constată că shift-ul de fază Ω introdus de funcția de transfer a modulației va afecta numai *faza* luminii în punctul imagine corespunzând lui (x_0, y_0) și deci el nu este important. În schimb, factorul M_0 din fața cosinusului introduce o *atenuare* a luminii ce contribuie la formarea imaginii punctului (x_0, y_0) . Deoarece punctele obiect situate mai departe de punctul de referință (pinhole) generează franje cu frecvențe spațiale mai mari pe hologramă, rezultă că imaginile acestor puncte sunt atenuate cel mai sever.

Prin urmare, pentru geometria înregistrării de tip Fourier (fără lentile) răspunsul spectral limitat al filmului are ca efect o restrângere a *câmpului vizual* în apropierea punctului de referință însă nu influențează asupra rezoluției ce se poate realiza în interiorul acestui câmp. Dacă frecvența spațială maximă ce poate fi "rezolvată" de emulsie este ν_{\max} , în imagine vor fi prezente numai acele puncte obiect ale căror coordonate satisfac condiția

$$(x_0 - x_r)^2 + (y_0 - y_r)^2 \leq (\lambda z \nu_{\max})^2. \quad (4.66)$$

Acum putem face o comparație între aceste rezultate și cele pe care le-am obținut când am vorbit de holografia plană cu fascicul de referință colimat (Leith, Upatnieks). Atunci am arătat că efectul rezoluției finite a filmului este echivalent cu cel al unei măști plasate la nivelul pupilei de intrare (vezi relația (4.22)). De data aceasta, efectul este cel al unei măști, plasate chiar la nivelul obiectului, cu transmitanța de amplitudine

$$t(x_0, y_0) = M \left(\frac{x_0 - x_r}{\lambda z}, \frac{y_0 - y_r}{\lambda z} \right). \quad (4.67)$$

Deoarece fiecare punct obiect "este ponderat" într-o manieră care depinde de coordonatele sale particulare, sistemul *nu este invariant spațial* și, în mod strict, nu există o FTC care să i se poată asocia. Cu toate acestea, dintr-un punct de vedere practic, este posibil să subdivizăm spațiul obiect în *regiuni izoplanatice*, suficient de mici pentru ca funcția M din (4.67) să fie practic constantă în fiecare regiune. Atunci, pentru fiecare astfel de regiune, se poate introduce o FTC de forma

$$H(f_x, f_y) \cong MP(\lambda d_i f_x, \lambda d_i f_y), \quad (4.68)$$

unde M este valoarea particulară, constantă, specifică regiunii respective, iar P este, evident, funcția pupilară efectivă a sistemului.

O altă metodă de înregistrare în holografia Fourier este reprezentată în fig.4.19.

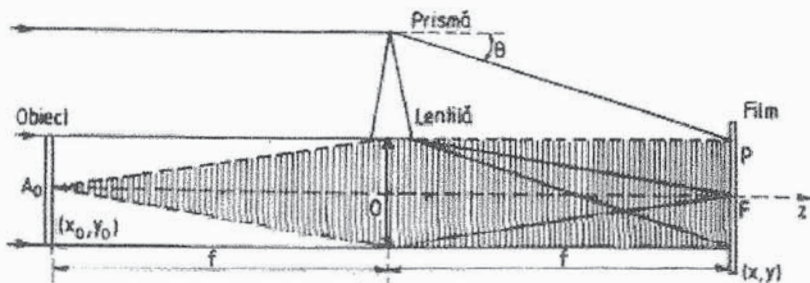


Fig.4.19. O altă metodă de înregistrare în holografia Fourier.

Fasciculul de referință, paralel, este cel deviat de prismă direct spre filmul de înregistrare. Obiectul este plasat în planul focal anterior al unei lentile pozitive, de bună calitate, iar în planul focal posterior al lentilei se află filmul fotografic (vezi și schema Vander Lugt descrisă în §. 3. 15).

Să calculăm amplitudinea câmpului într-un punct P de pe film considerând, pentru simplitate, că punctul obiect A_0 se află pe axa z. Unda de referință ce ajunge în P are forma $E_r \exp(-ik\theta y)$ iar unda difractată de obiectul A_0 , după traversarea lentilei, este o undă plană de amplitudine E_0 constantă. În total, câmpul din P este egal cu suma $E_r \exp(-ik\theta y) + E_0$ iar intensitatea luminoasă are valoarea $\mathcal{I} = E_r^2 + E_0^2 + 2E_r E_0 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\theta y\right)$. Pe film apare deci un

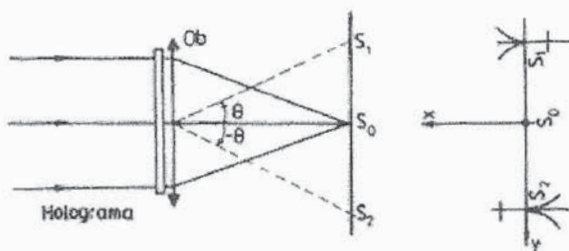


Fig.4.20. Imaginile reconstituite de la o hologramă Fourier.

sistem armonic (cosinusoidal) de franje, ca în cazul discutat anterior. La reconstrucție se utilizează schema din fig. 4.20, în care un fascicul paralel de lumină coerentă cade normal pe hologramă. Imaginile sunt observate în planul focal al obiectivului Ob, plasat după hologramă. Pentru o transmitanță de amplitudine de forma

$t_f(x, y) = t_r + \beta' [E_0^2 + E_0 E_r \exp(-ik\theta y) + E_0 E_r \exp(ik\theta y)]$, holograma dă o undă plană transmisă direct ($t_r + \beta' E_0^2$) și două unde plane difractate ($\sim \exp(\pm ik\theta y)$), în direcțiile $\pm \theta$ față de axa de simetrie. În planul focal al obiectivului Ob obținem imaginile punctiforme S_0 și $S_{1,2}$. Oricare din imaginile S_1 sau S_2 poate fi considerată ca imagine a punctului A_0 . În partea dreaptă a fig.4.20 se prezintă modul de formare a imaginii unui obiect transparent pe care este desenată o hieroglifă chinezească. În centru (S_0) apare o pată luminoasă corespunzând undei transmise direct.

§. 4. 8. Holograme volumice

În toate paragrafele de până acum ale acestui capitol am presupus că înregistrările sunt făcute pe suprafețe plane (sau cilindrice - în fig.4.15), de grosime neglijabilă. În realitate, în majoritatea cazurilor, grosimea emulsiilor fotografice este de ordinul a 15-20 μm , adică este mare în comparație cu lungimile de undă din domeniul vizibil (0,4-0,7 μm) sau chiar din infraroșu. Când interfranja figurii de interferență ce impresionează emulsia este mică în comparație cu grosimea mediului înregistrator, se spune că avem de-a face cu *holograme volumice*. Departe de a fi un dezavantaj, grosimea mare a stratului fotosensibil al unor materiale are ca efect pozitiv creșterea cantității de informație ce se poate înregistra holografic. De aceea, în acest paragraf ne propunem să prezentăm câteva din aspectele specifice înregistrării hologramelor volumice și reconstituirii (citirii) imaginilor stocate în ele.

1. *Înregistrarea hologramelor volumice.* Având în vedere că orice undă obiect poate fi descompusă Fourier într-un set de unde plane, ne vom referi numai la cazul în care

unda obiect este o undă plană. Pe de altă parte, deoarece, de regulă, și unda de referință este tot o undă plană, problema înregistrării hologramelor volumice se poate reduce al studiul formării franjelor tridimensionale de interferență a două unde plane monocromatice.

Fie $P(z,x)$ un punct din interiorul emulsiei fotosensibile, având vectorul de poziție \vec{r} și fie \vec{k}_r , respectiv \vec{k}_0 vectorii de undă pentru unda de referință și pentru unda obiect (vezi fig.4.21). Pentru mai multă comoditate în tratarea matematică, am presupus că cei doi vectori de undă sunt situați în planul zOx . Dacă λ_1 este lungimea de undă a luminii laserului folosit la înregistrare, putem scrie $|\vec{k}_r| = |\vec{k}_0| = 2\pi/\lambda_1 \equiv k_1$.

Fazele spațiale ale undelor obiect și de referință sosite în punctul P au forma

$$\phi_0(z, x) = \vec{k}_0 \cdot \vec{r} = xk_{0x} + zk_{0z} = k_1(x \sin \alpha_0 + z \cos \alpha_0), \quad (4.69)$$

$$\phi_r(z, x) = \vec{k}_r \cdot \vec{r} = xk_{rx} + zk_{rz} = k_1(x \sin \alpha_r + z \cos \alpha_r), \quad (4.70)$$

iar diferența lor, de care depinde termenul de interferență, este

$$\Delta(z, x) = \phi_r - \phi_0 = k_1[x(\sin \alpha_r - \sin \alpha_0) + z(\cos \alpha_r - \cos \alpha_0)]. \quad (4.71)$$

Să notăm prin φ unghiul dintre vectorii \vec{k}_0 și \vec{k}_r , respectiv prin α unghiul format de bisectoarea unghiului dintre \vec{k}_0 și \vec{k}_r cu axa Oz. Avem evident

$$\varphi = \alpha_r - \alpha_0 \quad \text{și} \quad \alpha = \alpha_0 + \frac{\varphi}{2} = \alpha_r - \frac{\varphi}{2}, \quad (4.72)$$

astfel că $\alpha_0 + \alpha_r = 2\alpha$. Putem scrie

$$\sin \alpha_r - \sin \alpha_0 = 2 \sin \frac{\alpha_r - \alpha_0}{2} \cos \frac{\alpha_r + \alpha_0}{2} = 2 \sin \left(\frac{\varphi}{2} \right) \cos \alpha, \quad (4.73)$$

$$\cos \alpha_r - \cos \alpha_0 = -2 \sin \frac{\alpha_r + \alpha_0}{2} \sin \frac{\alpha_r - \alpha_0}{2} = -2 \sin \alpha \sin \left(\frac{\varphi}{2} \right), \quad (4.74)$$

astfel că

$$\Delta(z, x) = 2k_1 \sin \left(\frac{\varphi}{2} \right) (x \cos \alpha - z \sin \alpha). \quad (4.71')$$

Când $\Delta(z, x) = 2\pi n$, n întreg, în punctul P se obțin maxime de interferență, adică franje luminoase. Având în vedere că, în realitate problema formării franjelor este o problemă tridimensională, ajungem la concluzia că locul geometric al maximelor de interferență este o familie de suprafețe. Intersecția acestor suprafețe cu planul zOx este

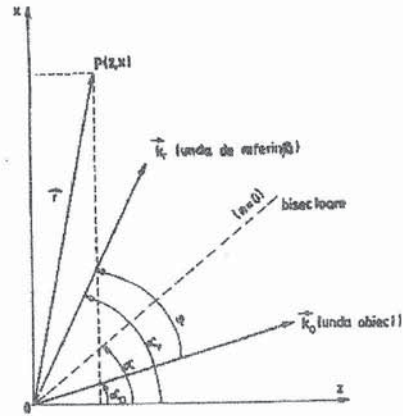


Fig.4.21. Direcții și unghiuri caracteristice înregistrărilor volumice.

$$x(n) = z \operatorname{tg} \alpha + \frac{n \lambda_1}{2 \cos \alpha \sin \left(\frac{\varphi}{2} \right)}, \quad (4.75)$$

adică avem de-a face cu o *familie de drepte* ce formează unghiul α cu axa Oz. Familia de drepte este așadar paralelă cu bisectoarea reprezentată în fig.4.21.

Pentru $z = 0$ și $\Delta n = 1$ obținem interfranța în direcția axei Ox

$$\Delta x = \frac{\lambda_1}{\sin \alpha_1 - \sin \alpha_0} = \frac{\lambda_1}{2 \cos \alpha \sin \left(\frac{\varphi}{2} \right)} \quad (4.76)$$

și frecvența spațială corespunzătoare (număr de franje pe unitatea de lungime)

$$v_x = \frac{1}{\Delta x} = \frac{\sin \alpha_1 - \sin \alpha_0}{\lambda_1} = \frac{2}{\lambda_1} \cos \alpha \sin \left(\frac{\varphi}{2} \right). \quad (4.77)$$

Intersecția franjelor luminoase cu axa Oz se obține punând $x = 0$ în ecuația (4.75). Obținem $z(n) = -n \lambda_1 / \left[2 \sin \alpha \sin \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right]$, iar interfranța respectivă ($\Delta n = -1$) este

$$\Delta z = \frac{\lambda_1}{2 \sin \alpha \sin \left(\frac{\varphi}{2} \right)}, \quad \text{de unde } v_z = \frac{1}{\Delta z} = \frac{2}{\lambda_1} \sin \alpha \sin \left(\frac{\varphi}{2} \right). \quad (4.78)$$

2. Reconstituirea imaginii. Desigur, ca și în cazul hologramelor plane, sistemul de franje descris analitic mai sus, fixează atât amplitudinea cât și faza unei obiect, iar reconstituirea acesteia este rezultatul difracției unei de citire pe rețeaua tridimensională formată de franjele de interferență. Fie $P_c(z_c, x_c)$ poziția sursei de citire și $P_i(z_i, x_i)$ - poziția punctului imagine (vezi fig.4.22 a, b). Câmpul produs de sursa P_c în punctul imagine P_i poate fi evaluat cu ajutorul formulei Kirchhoff-Fresnel, scrisă în cazul difracției "slabe",

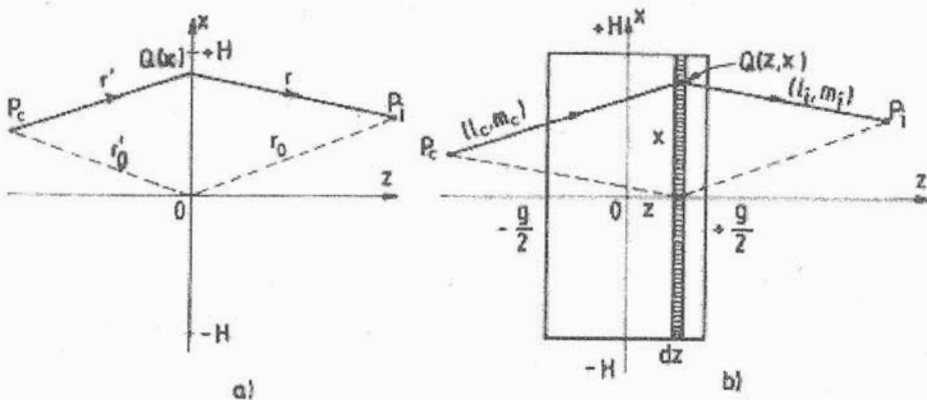


Fig.4.22. Reconstituirea imaginii de la o hologramă subțire (a), respectiv groasă (b).

considerând contribuțiile date de o succesiune de aperturi infinitezimale, subțiri. Pentru holograma subțire din fig.4.22 a, avem aproximativ

$$E(P_i) \sim \int_{-H}^{+H} \frac{1}{r'} \exp[ik_2(r' + r)] dx, \quad k_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2}, \quad (4.79)$$

unde $2H$ este lărgimea aperturii difractante în direcția axei Ox , iar $Q(x)$ este un punct oarecare din intervalul $(-H, +H)$. Evident, prin λ_2 înțelegem lungimea de undă a unei de citire. Dacă presupunem că r' și r sunt foarte mari în comparație cu $2H$ (difracție Fraunhofer) putem considera că factorul $(1/r')$ variază puțin când punctul $Q(x)$ se plimbă de la $-H$ la $+H$. De aceea, el poate fi scos în fața integralei ca un factor cvasiconstant. Rămâne să aproximăm acceptabil suma $r' + r$.

Utilizând dezvoltările evidente

$$r' = r'_0 + \frac{1}{2r'_0}(x^2 - 2x_c x) + \dots, \quad r = r_0 + \frac{1}{2r_0}(x^2 - 2x_i x) + \dots, \quad (4.80)$$

din care vom neglija contribuția termenilor de ordinul doi (în x^2), putem scrie

$$E(P_i) = \text{const} \int_{-H}^{+H} \exp[-ik_2(m_i - m_c)] dx. \quad (4.79')$$

Aici,

$$m_i = \frac{x_i}{r_0} \quad \text{și} \quad m_c = -\frac{x_c}{r'_0}, \quad (4.81)$$

sunt sinușii unghiurilor făcute de vectorii \vec{OP}_i , respectiv $\vec{P_cO}$, cu axa Oz .

Extinderea formulei (4.79') la cazul emulsiei groase (vezi fig.4.22 b) este directă. Difracția produsă la nivelul fâșiei de lățime dz ne dă o contribuție de forma

$$dE(\ell_i, m_i) = \left\{ \text{const} \int_{-H}^{+H} \exp[-ik_2(x(m_i - m_c) + z(\ell_i - \ell_c))] dx \right\} dz, \quad (4.82)$$

unde

$$\ell_i = \frac{z_i}{r_0}, \quad \text{și} \quad \ell_c = -\frac{z_c}{r'_0}. \quad (4.83)$$

În mod corect, distanțele r_0 și r'_0 din definițiile parametrilor " ℓ " și " m " care intervin în formula (4.82) se măsoară de la mijlocul fâșiei infinitezimale. Totuși, pentru emulsii nu prea groase, în aproximația utilizată, distanțele r_0 și r'_0 se pot considera la fel de bine față de originea O (centrul emulsiei).

Formula (4.82) nu este încă direct aplicabilă problemei noastre concrete deoarece, fiind brăzdată de franjele spațiale de interferență, apertura hologramei nu are transmitanță uniformă. De aceea, este necesar să introducem suplimentar o funcție $G(z, x)$ - de

transmitanță a aperturii (emulsiei impresionate), și cu ajutorul său, prin sumarea contribuțiilor de la diferite fâșii obținem

$$E(P_1) = E(\ell_i, m_i) = C \int_{-H}^{+H} \int_{-g/2}^{+g/2} G(z, x) \exp \left\{ -ik_2 [x(m_i - m_c) + z(\ell_i - \ell_c)] \right\} dx dz. \quad (4.84)$$

Aici g este grosimea hologramei volumice în lungul axei Oz .

Funcția pupilară $G(z, x)$ este proporțională cu distribuția de intensitate din figura de interferență obținută la înregistrare. Ea are forma

$$G(z, x) \sim |E_0 + E_r|^2 = E_0^2 + E_r^2 + 2E_0 E_r \cos \Delta(z, x), \quad (4.85)$$

unde E_0 și E_r sunt amplitudinile undelor obiect, respectiv de referință.

Introducând notațiile

$$\begin{cases} m_0 = \sin \alpha_0 \\ \ell_0 = \cos \alpha_0 \end{cases}, \quad \begin{cases} m_r = \sin \alpha_r \\ \ell_r = \cos \alpha_r \end{cases}, \quad \begin{cases} m = \sin \alpha \\ \ell = \cos \alpha \end{cases}, \quad (4.86)$$

putem transcrie diferența de fază $\Delta(z, x)$ sub forma

$$\Delta(z, x) = \omega_0(\ell x - mz) \quad \text{unde} \quad \omega_0 \equiv 2k_1 \sin(\varphi/2), \quad (4.87)$$

astfel că

$$G(z, x) = H_0 \left\{ 1 + M \cos [\omega_0(\ell x - mz)] \right\}. \quad (4.88)$$

În această expresie $H_0 = \text{const} (E_0^2 + E_r^2)$ este o "expunere medie" iar $M = 2E_0 E_r / (E_0^2 + E_r^2)$ este un factor (amplitudine) de modulație a "expunerii". Prin combinarea relațiilor (4.88), (4.84) obținem

$$E(P_1) = CH_0 \int_{-H}^{+H} \int_{-g/2}^{+g/2} \left\{ 1 + M \cos [\omega_0(\ell x - mz)] \right\} \cdot \exp \left\{ -ik_2 [x(m_i - m_c) + z(\ell_i - \ell_c)] \right\} dx dz$$

și în final, prin dezvoltarea calculelor

$$\begin{aligned} E(P_1) \sim H_0 & \left\{ \left[\text{gsinc} \left(\frac{g}{2} k_2 (\ell_i - \ell_c) \right) \right] \cdot \left[2H \text{sinc} (H k_2 (m_i - m_c)) \right] \right\} + \\ & + \frac{MH_0}{2} \left\{ \left[\text{gsinc} \left(\frac{g}{2} (k_2 \ell_i - k_2 \ell_c + \omega_0 m) \right) \right] \cdot \left[2H \text{sinc} (H (k_2 m_i - k_2 m_c - \omega_0 \ell)) \right] \right\} + \\ & + \frac{MH_0}{2} \left\{ \left[\text{gsinc} \left(\frac{g}{2} (k_2 \ell_i - k_2 \ell_c - \omega_0 m) \right) \right] \cdot \left[2H \text{sinc} (H (k_2 m_i - k_2 m_c + \omega_0 \ell)) \right] \right\}. \quad (4.89) \end{aligned}$$

Această expresie, care ne dă soluția de ordinul întâi a problemei difracției pe o hologramă volumică, este *ecuația de bază* a acestui tip de holografie.

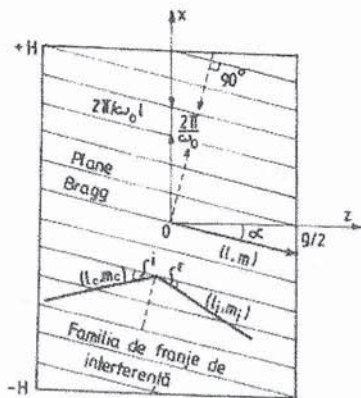


Fig.4.23. Familie de franje într-o hologramă volumică și reconstrucția imaginilor prin reflexie Bragg.

$\cos i = \cos r$ și b) *legea rețelei*, $\Delta x(\sin \alpha_i - \sin \alpha_c) = \lambda_2$.

Satisfacerea simultană a legilor a) și b) înseamnă satisfacerea *condiției Bragg* pentru difracția pe o rețea tridimensională (vezi Cap. II), echivalentă cu reflexia pe planele franjelor (plane Bragg) din volumul emulsiei (vezi fig.4.23).

Problema pe care o avem de soluționat în continuare este cea a localizării imaginilor obținute prin citirea hologramelor volumice. Expresia (4.76) a interfranței Δx și notațiile (4.86) ne permit să scriem

$$m_r - m_0 = 2\ell \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right). \quad (4.92)$$

Analog, față de cealaltă axă, avem

$$\ell_r - \ell_0 = -2m \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right). \quad (4.93)$$

Înlocuind ℓ și m din (4.92), (4.93) în (4.90) obținem

$$\frac{\ell_i - \ell_c}{\ell_r - \ell_0} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{m_i - m_c}{m_r - m_0}. \quad (4.94)$$

În mod similar, din relația (4.91) rezultă

$$\frac{\ell_i - \ell_c}{\ell_r - \ell_0} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{m_i - m_c}{m_r - m_0}. \quad (4.95)$$

Aceste relații permit determinarea parametrilor ℓ_i și m_i (ai direcției spre imagine) în funcție de cei analogi pentru undele obiect, de referință și de citire, cunoscând lungimile de undă λ_1 (de la înregistrare) și λ_2 (de la citire).

Să analizăm mai detaliat cazul particular $\lambda_2 = \lambda_1$. Din (4.94), cu $\ell_c = -\ell_r$ rezultă $\ell_i = -\ell_0$, adică obținem o imagine conjugată (reală) față de obiect. Din (4.95), cu $\ell_c = \ell_r$ obținem $\ell_i = \ell_0$, adică o imagine primară (virtuală). Cele două situații sunt reprezentate schematic în fig.4.24. În cazul $\ell_c = \ell_r$, imaginea virtuală se formează pe locul

Lăsând la o parte maximul principal al primului termen (care ne dă unda transmisă direct, $\ell_i = \ell_c$, $m_i = m_c$), să scriem condițiile maximelor principale pentru ceilalți doi termeni. Avem

$$-\frac{\ell_i - \ell_c}{m} = \frac{\omega_0}{k_2} = +\frac{m_i - m_c}{\ell}, \quad (4.90)$$

respectiv

$$+\frac{\ell_i - \ell_c}{m} = \frac{\omega_0}{k_2} = -\frac{m_i - m_c}{\ell}, \quad (4.91)$$

adică *cele două seturi de maxime nu se obțin simultan*. Aceste egalități duble sunt

echivalente fiecare cu: a) *legea reflexiei**

* Unghiurile de incidență (i) și de reflexie (r) care dau direcția fasciculului de citire, respectiv direcția spre imagine, se măsoară față de planul franjelor.

unde era obiectul, iar în cazul $l_c = -l_r$ (unda de citire converge spre punctul de unde a plecat unda de referință), imaginea reconstituită este reală (pe locul unde era obiectul).

În același caz particular $\lambda_2 = \lambda_1$, mai există teoretic și următoarele posibilități de

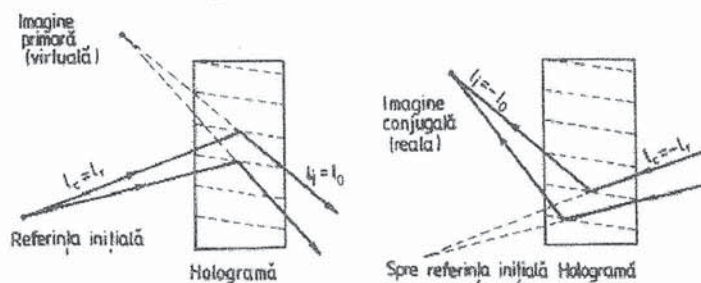


Fig.4.24. Imagini virtuale (stânga) și reale (dreapta) în holografia volumică.

citirea imaginii. Din (4.94), cu $l_c = l_0$ rezultă $l_i = l_r$, iar din (4.95), cu $l_c = -l_0$ rezultă $l_i = -l_r$. Aceste soluții sunt însă viabile numai pentru o undă obiect plană. Pentru undele obiect cu front arbitrar, unda de citire nu se poate suprapune exact peste întreaga undă obiect ci numai pe o anumită porțiune a ei. De aceea, imaginea va fi incomplet reconstituită, iar calitatea ei va fi, în cel mai bun caz, foarte modestă.

În virtutea simetriei relațiilor (4.94) și (4.95) față de parametri " l " și " m ", ceea ce a rezultat din discuția de mai sus pentru "cosinuzii directori" este valabil și pentru "sinuzii directori".

Înainte de a încheia acest paragraf, subliniem încă două aspecte de mare importanță practică. În primul rând, așa cum rezultă din formulele (4.94) - (4.95), reconstituirea este extrem de sensibilă față de lungimea de undă λ_2 - a fascicului de citire. Pornind de la relația (4.89) se poate demonstra (vezi de exemplu [33]) că în cazul $(l_c, m_c) = (l_r, m_r)$, $(l_i, m_i) = (l_0, m_0)$, la o îndepărtare de $\lambda \equiv \lambda_2 (= \lambda_1)$ cu

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{g} \cdot \frac{l_0}{1 - l_0 l_r - m_0 m_r}, \quad (4.96)$$

imaginea holografică virtuală reconstituită se stinge (dispare). De exemplu, pentru plăcile Kodak 649 F și $\lambda = 632,8$ nm (laser cu He - Ne), pentru $\alpha_0 = 0$ avem $\Delta\lambda \approx 0,1$ nm la $\alpha_r = 40^\circ$ și $\Delta\lambda \approx 10$ nm la $\alpha_r = 120^\circ$.

Variația lungimii de undă la citire va produce și o variație în direcția (orientarea) fascicului difractat. Lui $\Delta\lambda$ dat de relația (4.96) îi corespunde

$$\Delta\alpha_i = \frac{\lambda}{g} \cdot \frac{m_r - m_0}{1 - l_0 l_r - m_0 m_r}. \quad (4.97)$$

Acest unghi poate fi interpretat și ca unghiul minim de rotație al hologramei iluminate cu $\lambda \equiv \lambda_2 = \lambda_1$ care stinge imaginea reconstituită. În aceleași condiții ca mai sus, pentru $\alpha_r = 40^\circ$ obținem $\Delta\alpha_i \approx 0,4''$, iar pentru $\alpha_r = 120^\circ$ obținem $\Delta\alpha_i \approx 49''$.

Din cauza sensibilității lor deosebite la orientare, hologramele volumice permit înregistrări multiple în aceeași emulsie. Între diferitele înregistrări se schimbă de fiecare dată

unghiul de incidență al referinței (α_r) astfel încât la redare să apară, de fiecare dată, numai câte o singură imagine. Diferitele imagini înregistrate se reconstituie prin rotirea lentă a hologramei. Rezultă astfel că, pe hologramele în volum se poate înregistra o cantitate de informație mult mai mare decât pe hologramele plane. Capacitatea de stocare a informației este cu atât mai mare cu cât distanța $d = 2\pi/\omega_0$ dintre planele franjelor (vezi fig.4.23) este mai mică. Deoarece $2\pi/\omega_0 = \lambda_1/2 \sin(\varphi/2)$ rezultă că este necesar ca unghiul φ dintre \vec{k}_0 și \vec{k}_r să fie cât mai mare. În realitate el nu poate fi mărit oricât de mult din cauza structurii granulare a emulsiei. Să exemplificăm: dacă pentru materialul înregistrator $d_{\min} = 1\mu\text{m}$ și $\lambda_1 = 633 \text{ nm}$ (laser cu He - Ne) rezultă $\varphi_{\max} \approx 37^\circ$; pentru ca φ_{\max} să se poată apropia de 180° ar fi necesar ca d_{\min} să coboare până la aproximativ $\frac{1}{2}\lambda_1$, ceea ce, în cazul laserului cu He - Ne, ar însemna aproximativ 317 nm.

Observație: Atragem atenția asupra faptului că estimarea făcută aici nu este întru-totul corectă. Un calcul mai atent ar trebui să ia în considerare și indicele de refracție al emulsiei, deoarece el face ca lungimea de undă în emulsie să fie diferită de lungimea de undă λ_1 . Având în vedere sensibilitatea mare a holografiei volumice, efectele dispersive nu sunt aprioric neglijabile.

§. 4. 9. Holograme reflectante (Denisyuk)

La sfârșitul paragrafului anterior am arătat că atunci când unghiul φ dintre fasciculul de referință și fasciculul obiect crește și se apropie de 180° (unde se propagă în sensuri opuse), distanța dintre planele franjelor succesive se micșorează și devine aproape egală cu $\frac{1}{2}\lambda_1$. Corespunzător, unghiul $\alpha = \alpha_r = -\varphi/2$ ce precizează orientarea franjelor (față de axa Oz) se apropie de valoarea $\alpha_r - 90^\circ$. Dacă sensul de propagare al fasciculului de referință, dirijat aproximativ de-a lungul axei Oz, este de la dreapta spre stânga, punând $\alpha_r \approx 180^\circ$, rezultă $\alpha \approx 180^\circ - 90^\circ \approx 90^\circ$, adică franjele sunt aproape paralele cu axa Ox (vezi fig.4.21).

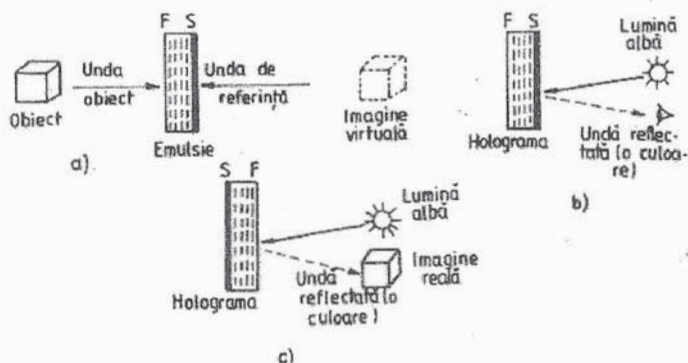


Fig.4.25. Principiul înregistrării și reconstrucției holografice prin metoda lui Denisyuk (lumină reflectată).

De studiul acestui interesant caz particular s-a ocupat în mod amănunțit fizicianul rus Yu. Denisyuk, încă în perioada în care nu apăruseră laserii (înainte de 1960). Gândul său era acela că, prin expunere triplă, de la o astfel de hologramă se poate obține imaginea color a obiectului, exact ca în metoda lui G. Lippmann, de fotografiere color. După apariția

laserilor, în anul 1962 utilizându-se radiația roșie, de la laserul cu He - Ne și verdele + albastrul, de la un laser cu Ar, la înregistrare (triplă expunere) și lumină albă la reconstrucție, s-a putut dovedi valabilitatea și valoarea deosebită a ideii. Esența procedurii este reprezentată în fig.4.25. La înregistrare se așează emulsia (F) spre obiect și suportul transparent (S) spre unda de referință ca în fig.4.25 a. În emulsie se localizează franjele de interferență (aproape verticale) la distanța $\frac{1}{2}\lambda_1$; pentru cele trei radiații utilizate, la expunerea triplă, familiile de plane sunt distincte. După dezvoltare, holograma este iluminată în lumină albă ca în fig.4.25 b. Fiecare set de plane (Bragg) din hologramă *reflectă* lungimea de undă corespunzătoare și imaginea *virtuală* se reconstituie în cele trei culori. Dacă holograma se așează invers (cu F la dreapta și S la stânga, ca în fig.4.25 c), imaginea tricromatică obținută este *reală* și ea este reconstituită tot *prin reflexie*, pe planele corespunzătoare ale franjelor, cu respectarea legii lui Bragg. Celelalte lungimi de undă conținute de lumina albă trec prin emulsie și sunt parțial absorbite; ele nu pot să satisfacă legea Bragg și nu contribuie la formarea imaginii.

În principiu, ne-am aștepta ca imaginile să aibă aceleași culori ca acelea ale radiațiilor luminoase folosite la înregistrare. În realitate, lungimile de undă ale luminii reflectate sunt ceva mai mici decât cele folosite la expunere din cauza "contractțiilor" din emulsie în procesul de dezvoltare și fixare (planele Bragg vor fi mai apropiate decât valorile teoretice $\lambda_1/2$; ele sunt situate la distanța $\lambda_1/2n_{emulsie}$). În prezent, există însă procedee practice de "dilatare", ce se aplică după dezvoltare și fixare, care readuc planele de reflexie Bragg la distanțele necesare pentru ca cromatismul redării să reflecte cât mai fidel cromatismul original.

Reprezentările din fig.4.25 a - c, au un caracter schematic, principal. Pentru realizarea practică a înregistrării se utilizează schema concretă din fig.4.26. Placa fotografică groasă este traversată de fasciculul de referință care iluminează obiectul ce se află în spatele său. Unda obiect, ce se propagă în sens invers, adică spre placă, este unda difuzată de obiect.

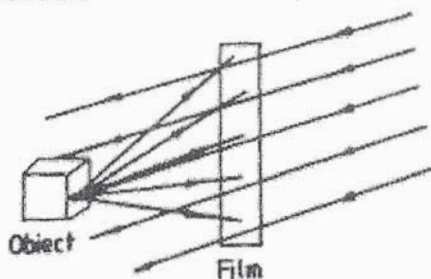


Fig.4.26. Metodă practică de înregistrare în holografia de tip Denisyuk.

Metoda triplei expuneri este greoaie și necesită precauții experimentale deosebite (inclusiv de stabilitate mecanică). De aceea, se preferă o singură expunere cu trei radiații. Schema unei astfel de instalații ce utilizează simultan doi laseri, este redată în fig.4.27,

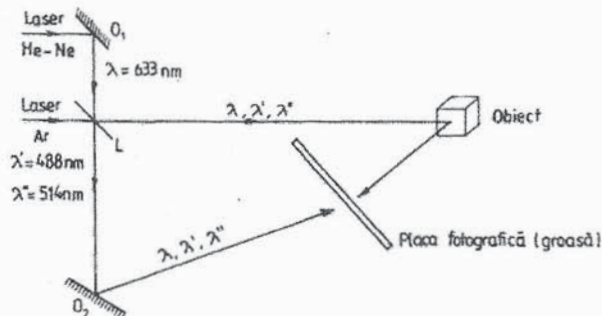


Fig.4.27. Schemă de înregistrare holografică tricromatică.

unde O_1 și O_2 sunt oglinzi plane iar L este o lamă reflectantă (divizor de fascicul). La reconstituire, iluminând holograma cu lumină albă, se va vedea o imagine tricromatică posedând practic toate proprietățile obiectului, relief, paralaxă și profunzime de câmp.

§. 4. 10. Holografia cu laseri în impulsuri

Teoria prezentată în paragrafele anterioare este valabilă în cazul în care obiectele pe care dorim să le investigăm holografic sunt statice, adică rămân imobile în timpul expunerii. În practică, destul de frecvent, ne confruntăm cu situații în care, prin natura lor, obiectele nu pot fi imobile (de exemplu, o insectă în zbor, un lichid care curge, un glonte în mișcare rapidă, o lamelă elastică în stare de vibrație etc.).

Pentru ca teoria procesului de investigare holografică să rămână valabilă și în cazul obiectelor care evoluează dinamic, este necesară realizarea unei expuneri instantanee. În acest scop, trebuie utilizați laseri capabili să dea intensități luminoase foarte mari, adică laseri cu impulsuri gigantice, de durată foarte scurtă. Utilizarea acestor tipuri de laseri s-a izbit la început de mai multe dificultăți. În primul rând, după cum se știe, cu cât impulsul luminos este mai scurt, cu atât el este mai puțin curat din punct de vedere spectral și are o lungime de coerență mai mică, fapt care afectează calitatea înregistrării (adică a contrastului figurii de interferență). Cu timpul, prin realizarea laserilor monomodali cu lungime de coerență de ordinul metrului - cu factor de calitate modulat și cu energii de câțiva jouli pe impuls - și prin îmbunătățirea considerabilă a sensibilității fotoemulsiilor în domenii spectrale destul de largi, s-a ajuns ca performanțele hologramelor obținute în impulsuri să fie comparabile cu cele ale obiectelor statice, imobile, realizate cu laseri în funcționare continuă.

Un alt gen de dificultăți pe care le comportă holografia în impulsuri este legată de posibila distrugere a componentelor optice din sistemul holografic sub acțiunea puterii mari ce revine pe unitatea de suprafață. De exemplu, prisme sau lentilele din sticlă optică cu borolantan au pragul de distrugere la aproximativ $2 \cdot 10^9 \text{ W/cm}^2$, iar cele cu borosilicați și crom - de $7 \cdot 10^{10} \text{ W/cm}^2$. Balsamul de Canada, utilizat pentru lipirea lentilelor unui obiectiv compus, are pragul de distrugere de numai $3 \cdot 10^7 \text{ W/cm}^2$, așa că, fiind mai mic cu 2 - 3 ordine de mărime decât cel al sticlelor optice, el introduce o limitare drastică a puterilor ce pot fi utilizate efectiv. Celelalte componente optice ce pot fi prezente într-o instalație holografică (divizori de fascicul, oglinzi, filtre interferențiale etc.) au pragul de distrugere cuprins între 10^6 și 10^8 W/cm^2 , adică introduc și ele limitări destul de severe, care trebuie avute în vedere în orice situație concretă.

În esență, instalațiile experimentale pentru acest gen de holografie (vezi fig.4.28) nu se deosebesc de cele utilizate în holografia cu laseri continui. Cu toate acestea, având în vedere că lungimea de coerență a radiațiilor utilizate este destul de mică (până la 1 m) și ținând cont de marea varietate a obiectelor mobile, respectiv de diversitatea vitezelor acestora, există desigur multe particularități specifice. Exemplificăm această afirmație precizând că există o viteză maximă permisă pentru obiectele holografiate, dependentă de tipul laserului utilizat și de gabaritul instalației. Într-adevăr, pentru a obține o hologramă de calitate, variația maximă a drumului optic pe fasciculul obiect, până la placa fotosensibilă, ca urmare a mișcării obiectului în timpul expunerii, nu trebuie să depășească $\lambda/2$. Din această cauză, pentru un impuls de 1 ms, obținut de la un laser obișnuit cu rubin sintetic, viteza maximă permisă a obiectului este de 0,35 mm/s. Cu cât impulsul este mai "gigantic"

și mai scurt, cu atât viteza maximă admisă este mai mare (se pot depăși valori de ordinul 10 m/s).

Odată cu micșorarea timpului de expunere, cerința de stabilitate mecanică a instalației holografice, și a mesei pe care este ea montată, nu mai este atât de restrictivă. Din acest punct de vedere, holografia cu laseri în impulsuri gigantice, de scurtă durată, se deosebește în mod fundamental de holografia cu laseri continui.

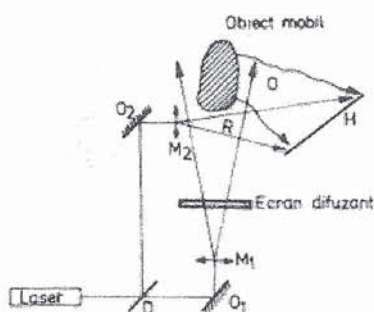


Fig.4.28. Schemă principală de înregistrare cu expunere instantanee.

§. 4. 11. Aplicații ale holografiei

4. 11. 1. Interferometria holografică

Apărută în anul 1965, pe baza unor idei ale aceluiași D. Gabor, interferometria holografică este o metodă, respectiv o tehnică de cercetare a modificărilor formei, calității și distribuției spațiale a obiectelor înconjurătoare, născută din asocierea interferometriei cu holografia. Din cele prezentate până acum s-a putut înțelege că holografia este capabilă să "înghețe timpul" la un anumit moment: unda luminoasă care a fost reflectată de obiect în momentul înregistrării hologramei poate fi "fixată" și reconstruită, apoi, la orice moment ulterior. Mai mult, holografia este capabilă și să "juxtapună" două momente de timp distincte, după ce le-a "înghețat" în prealabil pe aceeași hologramă. Când o astfel de hologramă este reconstituită, se obțin simultan două unde luminoase reale, una împrăștiată de obiect la primul moment al "înghețării", iar cealaltă la cel de-al doilea moment. Cele două unde reale pot interfera, iar observarea efectivă a rezultatului acestui proces poartă denumirea de *interferometrie holografică*.

Spre deosebire de interferometria obișnuită, care, în general, asigură doar compararea a două fronturi de undă foarte apropiate și de complexitate redusă (de regulă fronturi plane, sferice sau cilindrice), ce acționează în același timp, interferometria holografică permite compararea unor fronturi de undă oricât de complexe, și existente la momente de timp diferite.

Deoarece pentru înregistrarea holografică este necesar ca obiectele să fie iluminate coerent, singurele surse luminoase ce pot fi utilizate în interferometria holografică de performanță sunt sursele laser (de exemplu, cu He-Ne, cu argon ionizat, cu rubin sau cu neodim dublat în frecvență etc.).

În interferometria holografică cu dublă expunere pe aceeași placă avem de-a face cu trei figuri de interferență. Prima figură este cea formată de unda obiect și de unda de referință, înregistrate la momentul t_1 . A doua figură este înregistrată la momentul t_2 prin interferența undei obiect (care între timp s-a modificat puțin) cu unda de referință. În sfârșit, cea de-a treia figură este rezultatul interferenței undelor reconstruite din figurile de interferență 1 și 2. Spre deosebire de primele două, ultima figură de interferență are un bun contrast și este vizibilă cu ajutorul ochilor. Ea se observă ca un sistem de franje de interferență suprapuse peste imaginea obiectului reconstruită de către hologramă. Această imagine, brăzdată de franje, se numește *interferogramă holografică*.

În interferometria holografică actuală există trei metode principale: 1) *cu dublă*

expunere, 2) în timp real și 3) mediată de timp.

Prima metodă are la bază principiul prezentat mai sus, datorat lui Gabor. Conform acestuia, prin expunerea multiplă a hologramelor se poate realiza "adunarea coerentă" a fronturilor de undă complexe. Să demonstrăm această afirmație într-un caz general, considerând că o emulsie fotografică este expusă succesiv de N distribuții diferite de intensitate ($\mathcal{G}_k, k = \overline{1, N}$). Expunerea totală la care este supusă emulsia poate fi scrisă sub forma

$$H = \sum_{k=1}^N T_k \mathcal{G}_k, \quad (4.98)$$

unde $T_k, k = \overline{1, N}$, sunt timpii (duratele) fiecăreia din cele N expuneri.

Să admitem că în fiecare interval individual de expunere, radiația incidentă pe emulsie este suma dintre o undă complexă de referință fixată $A(x, y)$ și o undă complexă obiect $a_k(x, y), k = \overline{1, N}$, care se modifică de la o expunere la alta. Expunerea totală H are deci forma

$$H = \sum_{k=1}^N T_k |A + a_k|^2 = \sum_{k=1}^N T_k |A|^2 + \sum_{k=1}^N T_k |a_k|^2 + \sum_{k=1}^N T_k A^* a_k + \sum_{k=1}^N T_k A a_k^*. \quad (4.99)$$

Presupunând că punctul de lucru al emulsiei este situat pe porțiunea liniară a curbei $t - H$, obținem componentele de transmitanță

$$t_\alpha = \beta \sum_{k=1}^N T_k A^* a_k \quad \text{și} \quad t_\beta = \beta \sum_{k=1}^N T_k A a_k^*; \quad (4.100)$$

ceilalți doi termeni, nereținând informația de fază nu sunt importanți pentru analiza noastră.

Când transparentul rezultat după dezvoltare este iluminat cu frontul de undă complex A , termenul t_α va genera un câmp transmis proporțional cu suma ponderată a fronturilor complexe a_1, a_2, \dots, a_N . În consecință, cele N imagini coerente virtuale a obiectelor originale $a_k, k = \overline{1, N}$, se vor suprapune liniar și, desigur, vor interfera mutual.

În mod similar, când transparentul este iluminat cu frontul de undă complex conjugat A^* , termenul t_β va genera N imagini coerente reale care, de asemenea, vor interfera.

Revenind la cazul particular al dublei expuneri, prezentăm una din primele aplicații practice ale holografiei interferențiale, datorată lui Brooks, Heflinger și Wuerker (1966). Este vorba despre punerea în evidență a modificării indicelui de refracție atmosferic sub influența undei de șoc produse la propagarea unui glonț. În acest scop, a fost utilizat un laser cu rubin cu impulsuri scurte, funcționând în regim Q-switch. Un prim puls laser a fost folosit pentru înregistrarea holografică a fondului difuz (al aerului), după care, un al doilea puls, a înregistrat, pe aceeași hologramă, glonțul în zbor, prin același aer. Undele de șoc generate de glonț produc modificări ale indicelui de refracție al aerului. Prin urmare, cele două imagini ale fondului difuz, înregistrate în absența și apoi în prezența glonțului (cu perturbarea indicelui de refracție al aerului) interferă mutual, producând franje de interferență ce conturează unda de șoc.

Un alt exemplu este cel al evidențierii gradientului de temperatură ce apare în jurul filamentului unui bec cu incandescență. Prima înregistrare se realizează cu filamentul rece,

iar cea de-a doua - cu filamentul incandescent. Ca urmare a gradientului de temperatură se modifică indicele de refracție al gazului din vecinătatea filamentului. Prin interferența celor două imagini înregistrate pe aceeași hologramă acești gradienti se conturează foarte clar. Este important să precizăm că lumina *necoerentă* generată de filamentul incandescent nu interferă cu lumina laser, astfel că filamentul nu apare luminos în imaginea finală. Balonul de sticlă al becului, imperfect din punct de vedere optic, nu influențează practic deloc evidențierea gradientilor de temperatură și de indice de refracție al gazului.

Interferometria holografică cu dublă expunere poate servi la studiul deplasărilor de tip translație, rotație sau vibrație. În

fig.4.29 se prezintă schema unui montaj cu dublă expunere pe același film, utilizând un laser cu He - Ne, folosit pentru studierea micilor deplasări unghiulare și de translație ale unui obiect. După dezvoltare nu este necesară o re poziționare strictă a hologramei. Studiul teoretic, asupra căruia nu vom insista, conduce la următoarele formule pentru deplasarea unghiulară

$$\varepsilon(\text{secunde de arc}) = \frac{87,4}{i_{\varepsilon}(\text{mm})} \quad (4.101)$$

respectiv, pentru deplasarea longitudinală

$$\Delta s(\mu\text{m}) = 0,6328 \frac{s(\text{mm})}{i_s(\text{mm})}, \quad (4.102)$$

unde i_{ε} și i_s sunt interfranjele figurii de interferență (la rotație, respectiv translație).

Metoda dublei expuneri este limitată de interpretarea cu unele dificultăți a franjelor în condițiile unor deformări complexe și de necesitatea unui număr mare de duble expuneri, atunci când se dorește o analiză de detaliu a modificărilor suferite de obiect.

Încercând să depășească unele din limitările prezente în acest tip de interferometrie holografică, fizicienii Powell și Stetson au reușit să pună la punct tehnica interferometriei holografice în timp real, sau cu o singură expunere. Se procedează în felul următor. Se înregistrează holografic un obiect considerat *etalon* iar, după dezvoltare, holograma etalonului se re poziționează foarte exact, astfel încât imaginea obținută la reconstrucție să se suprapună foarte exact peste unda obiect (iluminat și el de către același laser), care evoluează de acum în timp, într-un mod oarecare. Prin suprapunerea celor două unde va apare un câmp de interferență macroscopică ce va evolua odată cu deformațiile unei obiect

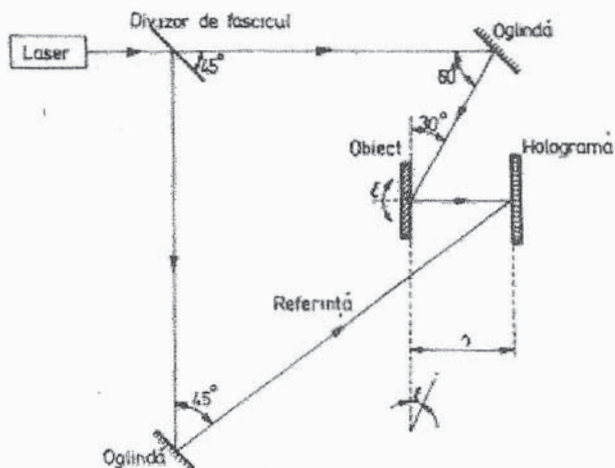


Fig.4.29. Montaj cu dublă expunere pentru studiul micilor deplasări (unghiulare și longitudinale)

față de imaginea etalon. Astfel, se vor putea urmări în timp real amplitudinea și localizarea diverselor deformații. Prin această metodă se pot pune în evidență perturbații de tip întindere, îndoire, răsucire, variațiile de grosime ale unei lame de sticlă, creșterea unui cristal, etc. Inconveniente care apar în acest tip de interferometrie holografică sunt datorate dificultăților de re poziționare (de la prima înregistrare până la re poziționare a trecut un anumit timp - necesar dezvoltării - și etalonul a evoluat și el!) și erorile introduse de contracția emulsiei fotosensibile.

Cea de-a treia metodă, cea a interferometriei holografice mediată în timp constă în înregistrarea evoluției unui front de undă chiar în timpul acestei evoluții. Ea este deci o metodă de expunere multiplă cu trecere de la timp variind discret la timp variind continuu; acum expunerea se scrie sub forma

$$H = \int_{-T/2}^{+T/2} \mathcal{G} dt \quad (4.103)$$

unde \mathcal{G} , variabil din punct în punct și temporal, este intensitatea luminoasă iar T - intervalul de timp cât durează expunerea. Dacă scriem $\mathcal{G} = |A + a|^2 = |A|^2 + |a|^2 + Aa^* + A^*a$, A fiind amplitudinea complexă de referință, iar a - amplitudinea complexă obiect, avem

$$H = H_R + H_0 + A \int_{-T/2}^{+T/2} a^* dt + A^* \int_{-T/2}^{+T/2} a dt. \quad (4.104)$$

Aici H_R corespunde termenului $|A|^2$, iar H_0 - termenului $|a|^2$.

Să ne concentrăm atenția asupra celui de-al patrulea termen din expresia lui H , care produce imaginea primară și pe care îl vom nota cu H_P . Avem evident

$$H_P = A^* \int_{-T/2}^{+T/2} a dt = A^* \int_{-\infty}^{+\infty} \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) a dt, \quad (4.105)$$

în ultima formă integrala extinzându-se temporal de la $-\infty$ la $+\infty$. Fie \tilde{a} (f transformata Fourier unidimensională a funcției obiect $a(t)$) și $T \text{sinc}(\pi T f)$ transformata Fourier unidimensională a funcției $\text{rect}(t/T)$. Conform teoremei de multiplicare putem scrie

$$H_P = T A^* \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(\pi T f) \tilde{a}(f) df, \quad (4.106)$$

integrala efectuându-se acum după frecvențele f . Atragem atenția asupra faptului că în formulele noastre nu am scris explicit dependența mărimilor a , A , \mathcal{G} și H de coordonatele spațiale, dar trebuie să subînțelegem că toate aceste mărimi au și o astfel de dependență.

Ultima relație ne arată că efectul mișcării obiectului în timpul înregistrării holografice este echivalent cu un *filtraj temporal* liniar al imaginii, având funcția de transfer $\text{sinc}(\pi T f)$. Considerând că transmitanța de amplitudine a hologramei dezvoltate este proporțională cu expunerea (H_P - pentru termenul analizat) și că unda de reconstrucție este identică cu cea de referință, câmpul luminos transmis în unda primară va avea distribuția

$$E_p \sim |A|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(\pi f T) \tilde{a}(f) df, \quad (4.107)$$

iar observatorul va vedea intensitatea luminoasă

$$I_p(x, y) = |E_p(x, y)|^2. \quad (4.108)$$

Să presupunem, în mod concret, că un obiect plan situat în planul (x_0, y_0) oscilează cosinusoidal în jurul unei poziții medii, în lungul axei z - vezi fig.4.30. Fie $m(x_0, y_0)$ - elongația maximă, Ω pulsația vibrației și $\mu(x_0, y_0)$ - faza sa. Lumina incidentă pe film, în punctul de coordonate (x, y) , care vine parcă de la punctul obiect considerat, poate fi presupusă a avea faza modulată conform legii

$$\phi(x, y, t) = \frac{2\pi}{\lambda} (\cos \theta_1 + \cos \theta_2) m(x_0, y_0) \cos [\Omega t + \mu(x_0, y_0)], \quad (4.109)$$

unde θ_1 este unghiul format de direcția de vibrație cu linia ce unește punctele (x_0, y_0) și (x, y) iar θ_2 - unghiul format de direcția de propagare a luminii incidente în punctul (x_0, y_0) cu direcția de vibrație.

Ca o consecință a acestei modulații cosinusoidale de fază, funcția $\tilde{a}(f)$ are forma

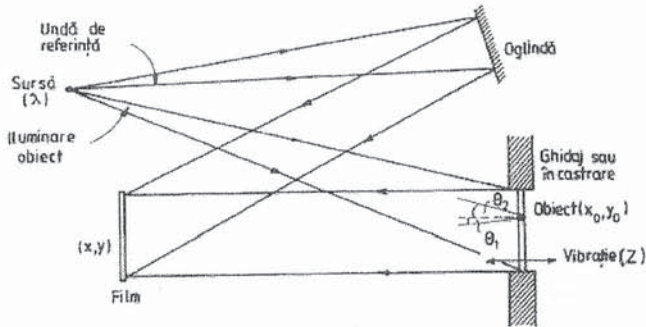


Fig.4.30. Instalație pentru studiul vibrațiilor prin interferență holografică.

$$\tilde{a}(f) \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k \left[\frac{2\pi}{\lambda} (\cos \theta_1 + \cos \theta_2) m(x_0, y_0) \right] \cdot \delta \left(f - \frac{k\Omega}{2\pi} \right), \quad (4.110)$$

$J_k(x)$ fiind funcțiile Bessel.

Dacă timpul de expunere T este mult mai mare decât perioada de vibrație, adică $T \gg 2\pi/\Omega$, numai termenul $k = 0$ din relația (4.110) cade în interiorul benzii de trecere al funcției de transfer $\text{sinc}(\pi f T)$ - vezi formula (4.107) - și prin urmare

$$I_p \sim \left| J_0 \left[\frac{2\pi}{\lambda} (\cos \theta_1 + \cos \theta_2) m(x_0, y_0) \right] \right|^2. \quad (4.111)$$

Rezultă că intensitatea imagine depinde practic (neglijăm dependența lui $\cos \theta_1$ de poziția punctului (x, y) !) numai de elongația maximă, $m(x_0, y_0)$, a vibrației în punctul respectiv.

Prin această metodă se pot pune în evidență ușor modurile de vibrație ale unor bare, plăci (membrane), cutii de rezonanță, etc.

Tehnica interferometriei holografice mediată în timp a fost pusă la punct (ca și cea în timp real) de către Powell și Stetson, în anul 1966. De atunci ea s-a dezvoltat continuu, fiind astăzi o importantă metodă de control și de testare nedistructivă, cu aplicații în domenii dintre cele mai diverse (aeronautică, hidrotehnică, construcții auto, acustică etc.).

Încheind aceste scurte considerente mai precizăm că, în prezent, interferometria holografică reușește să înlocuiască complet fotoelasticimetria clasică, devenind cea mai importantă metodă tensiometrică.

Cititorilor dornici să cunoască mai mult despre acest subiect le recomandăm lucrările [4, 6, 9, 15, 21, 31, 33].

4. 11. 2. Microscopia holografică

În paragraful introductiv al acestui capitol am menționat că Denis Gabor a ajuns la holografie ocupându-se de problema îmbunătățirii rezoluției microscopului electronic. Nu este de mirare, deci, că prima și cea mai importantă aplicație vizată de descoperitorul holografiei a fost cea din domeniul microscopiei, căreia i-a consacrat mai multe articole.

Se știe că puterea de rezoluție a microscopului electronic este mai bună decât cea a microscopului optic, clasic, dar este și ea limitată - pe de o parte de fenomenul de difracție a undelor de Broglie pe deschiderea obiectivului și, pe de altă parte, de aberațiile de sfericitate ale acestuia. Cu toate aceste limitări, pentru Gabor era evident faptul că, informația cu privire la proba de cercetat microscopic este conținută în imaginea de difracție furnizată. Problema care trebuia rezolvată era doar aceea a extragerii acestei informații utile. Deoarece pe calea microscopiei electronice nu era posibilă această extracție, Gabor a imaginat varianta optică a reconstrucției frontului de undă - ca un nou principiu de microscopie. Cu alte cuvinte, în această metodă unicul element prin care se realizează mărirea imaginii și îmbunătățirea rezoluției este holograma obiectului.

Într-un paragraf anterior, am arătat că controlul raportului dintre dimensiunea imaginii holografice și dimensiunea obiectului holografiat poate fi realizat prin intermediul lungimilor de undă utilizate la înregistrare (λ_1) și la reconstrucție (λ_2). Dacă pentru înregistrare s-ar folosi, de exemplu o radiație cu $\lambda_1 = 0,5$ nm, iar la reconstrucție - o radiație vizibilă cu $\lambda_2 = 500$ nm, am obține o mărire de 1000 de ori - fără intervenția vreunui element optic special. Când se multiplică această mărire holografică cu mărirea dată de un microscop convențional (cam de ordinul 2000 - 2200) rezultă mărimi de peste un milion de ori, ceea ce ar reprezenta performanțe excepționale. Chiar dacă, ținând cont de prezența aberațiilor în procesul reconstituirii holografice, cantitatea de informație ce se poate extrage din imaginea reconstituită este diminuată, performanțele ar rămâne încă foarte bune.

Există două metode de înregistrare holografică a obiectului de investigat microscopic: înainte sau după mărirea imaginii într-un microscop convențional. Se dovedește a fi mai avantajoasă, atât din punctul de vedere al montajului cât și din punct de vedere calitativ, "memorarea" holografică a imaginii mărite în prealabil de un microscop convențional. În fig.4.31 se prezintă o schemă tipică de microscopie holografică, folosită la înregistrare. După dezvoltarea filmului, holograma este proiectată cu un aparat de proiecție special, putându-se explora succesiv întregul volum al obiectului înregistrat.

Microscopia holografică fără lentile, propusă de Gabor, a atins performanțe mult

mai modeste decât s-a imaginat inițial, pe de o parte, din cauza inexistenței curente a unor radiații coerente cu lungimi de undă foarte mici (de ordinul angstromilor sau a unor fracțiuni de angstrom) și, pe de altă parte, din cauza dificultăților tehnice inerente corectării aberațiilor care intervin în procesul de mărire. Aceasta a făcut ca interesul cercetătorilor să se îndrepte spre o altă variantă de microscopie, cu lentile, cunoscută sub denumirea de *microscopie interferențială holografică*.

Preocupările în acest domeniu au început în anul 1966 (grupul lui van Ligt) și s-au dezvoltat mult mai ales după anul 1970. Ideea de bază este aceea că o interferogramă holografică furnizează o cantitate de informație proporțională cu pătratul numărului de franje localizate pe obiect; dacă acest număr poate fi crescut semnificativ, prin metode optice, adică fără a solicita suplimentar obiectul, calitatea imaginii (rezoluție, profunzime) este mult mai bună.

De exemplu pentru un obiect de dimensiuni date, supus unor mici deformații Δx , numărul franjelor localizate pe el poate fi mărit prin creșterea, cu ajutorul unei lentile convenabil alese (microscop), a imaginii Δx a deformației obiectului între cele două expuneri holografice.

Schema unei instalații de acest gen este redată în fig.4.32, în care Ob_1 și Ob_2 sunt două obturatoare, M_1 este o lentilă de expandare iar M_2 un *obiectiv microscopic*. Dacă grosimentul său axial este β , mărimea Δx a imaginii deformației este egală cu $\beta \Delta x$ și numărul de franje localizate pe obiectul mărit va crește de β ori. În consecință, cantitatea de informație extrasă va fi de β^2 ori mai mare.

La înregistrare cele două obturatoare sunt deschise iar la reconstrucție rămâne deschis numai Ob_1 , care asigură identitatea fasciculului de citire cu cel de referință. Obiectivul de microscop M_2 formează imaginea IO a obiectului în spatele plăcii holografice

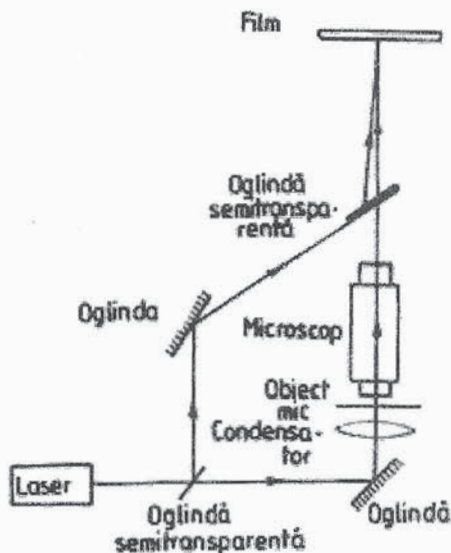


Fig.4.31. Microscop holografic.

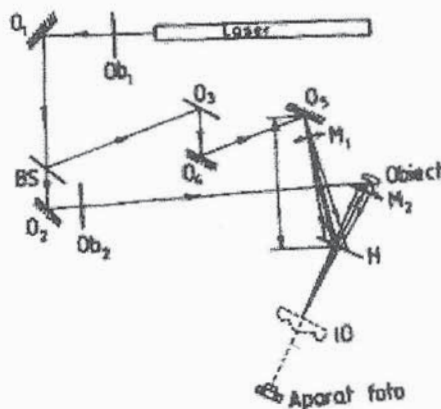


Fig.4.32. Schema unei instalații de microscopie interferențială holografică.

H - în cazul în care se lucrează în timp real, sau în fața plăcii H - când se aplică metoda dublei expunerii.

Acest gen de microscopie este foarte util în cercetările bio-medicale precum și în alte domenii, unde este necesară o profunzime de câmp cât mai mare.

4. 11.3. Compensarea și corectarea aberațiilor sistemelor optice

Se poate constata că, în cvasitotalitatea cazurilor de interes practic, sistemele optice de format imagini realizează acest lucru în prezența unor aberații și perturbații generate de surse, mai mult sau mai puțin incontroleabile, ca imperfecțiunile intrinseci ale componentelor optice din sisteme, nestaționaritatea atmosferei dintre acestea, etc. Din această cauză, problema compensării aberațiilor și, în consecință, a obținerii unor imagini de calitate, s-a pus și se pune indiferent de natura, structura și destinația sistemului optic. Este demn de menționat faptul că, în unele situații, pentru îmbunătățirea calității imaginilor formate, numai tehnicile holografice au putut oferi soluții eficiente, de mare valoare practică.

În cele ce urmează, prezentăm cititorului două metode, anume "filtrarea" și "corectarea" holografică, cu ajutorul cărora, în prezența surselor de aberații și perturbații, se poate obține, totuși, o înaltă rezoluție a imaginii. Din dorința de a simplifica scrierea și calculele matematice, în continuare vom presupune că amplitudinile care intervin au valoarea egală cu unitatea, adică vom opera numai cu factorii de fază.

Pentru început, în scopul înțelegerii principiului filtrării holografice, să ne referim la fig.4.33, în care L este o lentilă ce introduce aberația de fază φ_a . Aceasta înseamnă că, după trecerea prin lentilă, unda obiect $E_0 = \exp(i\varphi_0)$ are forma $E'_0 = E_0 \exp(i\varphi_a) = \exp[i(\varphi_0 + \varphi_a)]$. Ea interferă pe placa holografică P cu unda de referință $E_r = \exp(i\varphi_r)$ și, după dezvoltare, holograma obținută are transmitanța de amplitudine $t_h = 2 + \exp[i(\varphi_0 + \varphi_a - \varphi_r)] + \exp[-i(\varphi_0 + \varphi_a - \varphi_r)]$.

Iluminând holograma H astfel obținută cu unda $E_0^* = \exp(-i\varphi_0)$, în calitate de undă de reconstrucție, ca în fig.4.34, rezultă o undă *reală* de forma $\exp[-i(\varphi_0 + \varphi_a)]$, plus încă doi termeni separați spațial, care nu ne interesează (vezi și §. 4. 2.). Trecând această undă, în sens invers, prin lentila aberantă L, în pupila sa de ieșire obținem unda $\exp(-i\varphi_0)$ care formează imaginea reală a obiectului. Aberațiile introduse de lentilă au fost astfel complet compensate în termenul utilizat.

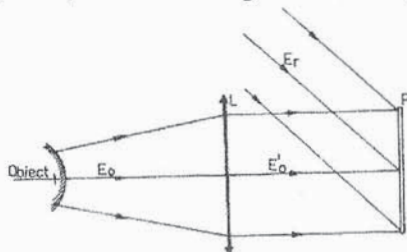


Fig.4.33. Schemă pentru înțelegerea principiului filtrării holografice.

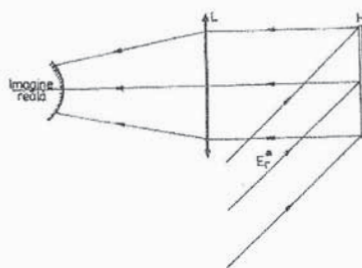


Fig.4.34. Schemă pentru înțelegerea compensării aberațiilor.

Succesul metodei, respectiv deplina compensare a aberațiilor este dependent(ă) de asigurarea cu foarte mare precizie (sub zecimi de micron) a identității poziției relative lentilă-placă și lentilă-hologramă în schemele de înregistrare și reconstrucție.

La început, în anii 1965-66, această metodă a fost propusă și utilizată de Leith și Upatnieks, respectiv de H. Kogelnik, pentru corectarea imaginilor obținute la trecerea luminii prin medii difuzante și neomogene (medii aberante naturale). Apoi, începând din anul 1966, metoda a fost aplicată și pentru corectarea imaginilor date de lentilele aberante (conform principiului prezentat mai sus) sau la propagarea undelor luminoase prin medii cu proprietăți variabile aleator (metodă propusă de J. W. Goodman).

Una din aplicațiile spectaculoase ale acestei metode, importantă și din punct de vedere practic, este criptografia holografică, adică codificarea imaginilor. Folosind la înregistrarea hologramei unui anumit obiect (mesajul de transmis) un difuzor aberant (ce joacă rolul lentilei L în fig.4.33), plasat înaintea plăcii holografice, la reconstrucția simplă se obține o imagine indescifrabilă. Dacă însă, destinatarul mesajului cunoaște condițiile în care s-a făcut înregistrarea și dispune de o copie a difuzorului aberant folosit inițial (acum pe post de L în fig.4.34), imaginea mesajului (obiectului) apare fără aberații și poate fi descifrată. Acest procedeu de filtrare nu dă, totuși, imagini de strălucire prea bună din cauza valorii reduse a eficienței la difracție a hologramei (de ordinul câtorva procente). Creșterea eficienței la difracție, adică a strălucirii imaginii, poate fi realizată prin utilizarea hologramelor de fază în locul celor de amplitudine.

O altă tehnică de obținere a unui filtru holografic este ilustrată în fig.4.35, în care mediul aberant este lentila L , S este o sursă luminoasă punctiformă iar P este placa holografică, așezată destul de aproape de mediul aberant. Fie $E_S = \exp(i\varphi_S)$ unda sferică ce provine de la sursa S și $E'_S \cong E_S \exp(i\varphi_A) = \exp[i(\varphi_S + \varphi_A)]$ - unda care a trecut dincolo de lentilă, spre placă, unde interferează cu unda de referință $E_R = \exp(i\varphi_R)$. Holograma astfel obținută poate fi utilizată, apoi, ca o "placă compensatoare" ce permite unui sistem optic convențional, de bună calitate, să formeze o imagine liberă de aberații. Într-adevăr, să urmărim acum reprezentarea din fig.4.36, în care G este un obiect de fază plan, plasat în poziția obiectului S din figura anterioară, L este aceeași lentilă aberantă iar H este holograma realizată, readusă în aceeași poziție. Unul din termenii transmitanței de amplitudine a hologramei, cel care contribuie la formarea imaginii reale (vezi §. 4. 2), este proporțional cu $\exp[-i(\varphi_S + \varphi_A - \varphi_R)]$.

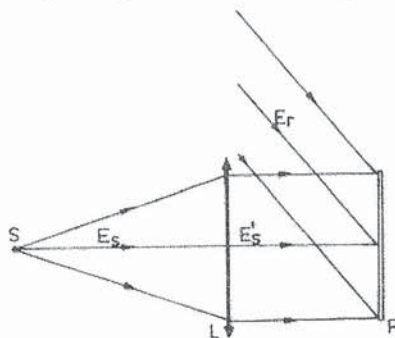


Fig.4.35. O altă metodă pentru obținerea unui filtru holografic.

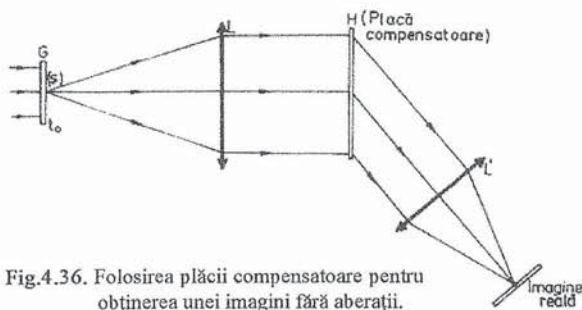


Fig.4.36. Folosirea plăcii compensatoare pentru obținerea unei imagini fără aberații.

Acum unda incidentă pe lentila L are forma $\exp[i(\varphi_0 + \varphi_s)]$, unde $t_0 = \exp(i\varphi_0)$, este transmitanța de amplitudine a obiectului general G, iar dincolo de lentilă, se propagă spre placa compensatoare H, o undă de forma $\exp[i(\varphi_0 + \varphi_s + \varphi_a)]$. După difracția pe filtrul holografic, unul din termenii transmiși (cel specificat anterior) are expresia $\exp[i(\varphi_0 + \varphi_r)] = t_0 \exp(i\varphi_r)$, în care aberațiile sunt corectate iar unda nedistorsionată se propagă în direcția unde de referință. În acest fel, fiecărui punct al obiectului îi corespunde câte o undă, ce se propagă sub unghiuri ușor diferite, ansamblul acestora formând imaginea finală prin intermediul lentilei L' , de foarte bună calitate.

Metoda de filtrare a cărei principiu l-am schițat aici dă rezultate bune numai pentru obiecte G de dimensiuni transversale mici, adică pentru punctele obiect situate în apropierea punctului "central" S. În cazul punctelor obiect îndepărtate, placa H nu mai poate asigura compensarea perfectă a factorilor fazici ce conțin mărimile φ_a și φ_s , căci undele obiect sunt distorsionate altfel decât a fost distorsionată unda ce a provenit de la punctul S, înregistrată pe hologramă. Totuși, dacă la înregistrare și la reconstrucție placa P(N) este așezată destul de aproape de mediul aberant (care poate fi nu neapărat o lentilă, ci orice mediu difuzant staționar), imaginea finală este meritorie chiar și pentru obiecte de dimensiuni transversale apreciabile.

Desigur, filtrarea holografică - exemplificată până acum - poate servi la compensarea aberațiilor numai în cazul mediilor aberante staționare. Când mediul aberant se modifică în timp după legi aleatoare, filtrarea holografică nu mai poate asigura eliminarea aberațiilor întrucât, de la momentul înregistrării filtrului până la utilizarea sa, proprietățile mediului s-au modificat incontrolabil. Tehnica pe care o vom schița acum, de corectare holografică, imaginată de Goodman în anul 1966, se poate aplica, cu succes, în caz general (mediul aberant poate fi imobil sau mobil, staționar sau variabil temporal). Ea este o tehnică de holografie Fourier fără lentile (vezi §. 4. 7.), în care unda obiect $g(x, y)$ și unda de referință $s(x, y)$ străbat *simultan* mediul aberant - vezi fig.4.37. Desigur, sursa de referință S și obiectul sunt plasate în același plan. Dacă prin $\alpha(x, y)$ desemnăm distorsiunile de fază introduse de mediul aberant (lentilă, placă de sticlă neomogenă, mediu turbulent), undele care ajung pe placa fotografică au forma

$$s'(x, y) = s(x, y)\exp(i\alpha(x, y)),$$

$$g'(x, y) = g(x, y)\exp(i\alpha(x, y)).$$

Interferența celor două unde astfel distorsionate dă naștere următoarei intensități luminoase

$$I' = |s' + g'|^2 = |\exp(i\alpha)|^2 \cdot |s + g|^2 = |s + g|^2 = I.$$

Rezultă că figura de interferență stocată în placa holografică nu este afectată de prezența mediului aberant, dacă acesta distorsionează la fel cele două unde (în s' și g' avem același α). De aceea, pentru ca metoda să se dovedească eficientă, este necesar ca dimensiunile obiectului să nu fie prea mari iar placa P să se așeze cât mai aproape de mediul aberant. În

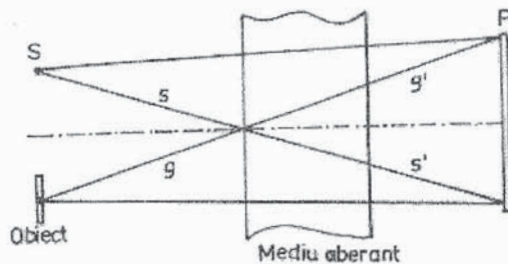


Fig.4.37. Tehnică holografică Fourier în care unda obiect și unda de referință străbat simultan mediul aberant.

fig.4.38 se prezintă schema formării imaginilor gemene, neafectate de mediul aberant, cu ajutorul hologramei înregistrate.

Pe principiul corectării holografice Fourier (fără lentile) analizat anterior, s-a reușit și corectarea aberațiilor de sfericitate și astigmatism ale lentilelor care operează în regim neparaxial. Se procedează în felul următor. Simetric, față de axa optică a lentilei, cu punctul obiect G , se așază sursa de referință punctiformă S (fig.4.39). Aberațiile menționate fiind proporționale cu puterea a doua a unghiului de incidență θ , pentru orice două regiuni simetrice ale lentilei este adevărată relația $\alpha(\theta) = \alpha(-\theta) \equiv \alpha$, iar imaginea finală nu este afectată de aberații (așa cum rezultă din formula anterioară).

Celelalte aberații geometrice, proporționale cu puterea a treia a unghiului de incidență, nu îndeplinesc relații de forma $\alpha(\theta) = \alpha(-\theta)$ și nu pot fi corectate simplu, prin acest procedeu.

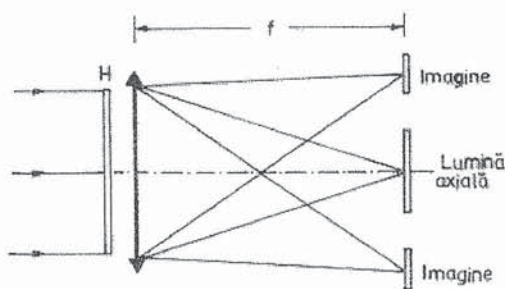


Fig.4.38. Schema formării imaginilor gemene, neafectate de mediul aberant.

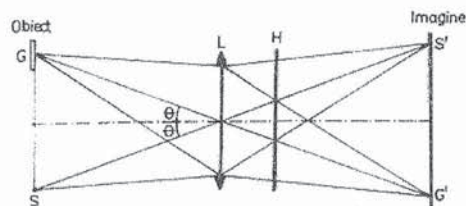


Fig.4.39. Corectarea aberațiilor de sfericitate și astigmatism (în regim neparaxial).

4. 11. 4. Holografia și calculatoarele

Deși "preistoria" calculatoarelor își are originile în secolul al 17-lea (mașina lui Pascal - 1642, roata lui Leibnitz - 1673) și a fost urmată de o istorie destul de interesantă (menționăm doar elaborarea logicii formale de către englezul George Boole, în perioada 1848-1852 și apariția calculatoarelor electromecanice - Vannevar Bush în 1925, la Massachusetts Institute of Technology), primele calculatoare *electronice* numerice (digitale) s-au impus atenției generale abia în deceniul 1950-60^{*}. Calculatoarele electronice din această "primă generație", a căror elemente și blocuri logice erau constituite din *tuburi electronice cu vid*, aveau o viteză de operare de $10^3 - 10^4$ operații pe secundă și o capacitate de memorare de aproximativ 10^4 biți (bitul este unitatea de măsură pentru cantitatea de informație dintr-un semnal și reprezintă informația suficientă pentru a selecționa un eveniment din două evenimente echiprobabile; denumirea vine de la *binary* (binar) și *digit* (cifră)).

La puțin timp de la lansarea primelor calculatoare electronice, utilizarea lor s-a extins în ritm rapid. În același timp însă, evoluția în domeniul componentelor electronice - inventarea și implementarea *diodelor și triodelor semiconductoare (tranzistorii)* - a dus la apariția unei noi generații de calculatoare. Se consideră că anul de naștere al "celei de-a doua generații" de calculatoare - cu dispozitive semiconductoare, este anul 1957. Viteza de

* Primul calculator electronic (ENIAC - Electronic Numerical Integrator And Computer), construit la Universitatea Pennsylvania (SUA), a fost dat în exploatare la 15.II.1946.

memorare a acestora a crescut la 10^5 operații pe secundă iar memoria lor - la valori de ordinul a 10^5 biți. Dacă în prima etapă calculatoarele au servit, în principal, pentru efectuarea mult mai rapidă a unor calcule greoaie, de interes științific, militar sau economic, în cea de-a doua etapă, apărând deja rețele de calculatoare, ele au început să fie utilizate din ce în ce mai intens în aplicații tehnice, în automatizări și conducere de procese, în elaborarea și controlarea programelor spațiale, în gestiunea economică, în operații comerciale și științifice, etc. Apariția calculatoarelor tranzistorizate a eliminat repede din competiție calculatoarele cu tuburi, greoaie din punct de vedere operațional și de gabarit spațial foarte mare.

La mijlocul deceniului următor au apărut, și s-au impus apoi din ce în ce mai mult calculatoarele din "generația a treia", cu viteză de operare foarte mare (până la 10^7 operații pe secundă) și cu capacități de memorare până la 10^6 biți, a căror componente logice erau construite pe baza *circuitelor integrate*. Creșterea rapidă a memoriei interne, controlul și utilizarea terminalelor la distanță, lucrul în timp real, precum și sistematizarea programelor de la monitor la sistemul de operare, constituie elemente de referință pentru caracterizarea acestei generații de calculatoare (care, în paranteză fie spus, a demarat în anul 1964, la puțin timp după realizarea primelor holograme).

După anul 1970, calculatoarele electronice au făcut pași mari spre miniaturizare și, în mai puțin de un deceniu, au apărut deja microcalculatoarele. Tehnologiile de realizare a circuitelor integrate s-au îmbunătățit permanent, beneficiind, după cum vom vedea, și de progresele paralele ale opticii, respectiv holografiei; au apărut circuite integrate tot mai complexe, *microprocesoarele și microcalculatoarele pe o structură*, au început să fie utilizate memoriile semiconductoare, cu prețuri de cost mai mici și cu siguranță mai mare în funcționare. În acest fel s-a intrat în cea de "a patra generație de calculatoare", care a cunoscut o dezvoltare fără precedent, aria aplicațiilor acestora intrând deja în cotidian (de la calculatoarele transportabile și portabile s-a ajuns la cele personale). În momentul de față, pe lângă eforturile de gândire, financiare și tehnologice ce se depun pentru realizarea și lansarea pe piață a calculatoarelor inteligente, din generația a cincea, industria de calculatoare fiind în așteptarea unor soluții și tehnologii noi (optice, holografice sau altă natură, respectiv hibride), generația a patra se confruntă cu o mișcare revoluționară declanșată de calculatoarele personale, echipamente ce influențează deja, și vor influența în mod radical, desfășurarea tuturor activităților în anii următori. Cu siguranță, în elaborarea viitoarelor unități de calcul, cercetările interdisciplinare vor deține o pondere ridicată iar microoptica, practic inexistentă acum două decenii, va juca un rol important, dacă nu chiar rolul principal.

Nu a fost în intenția noastră ca prin cele expuse aici să ne abatem de la problematica acestui capitol, respectiv a acestei cărți de optică. Am dorit doar să schițăm, pe scurt, istoricul calculatoarelor, pentru a înțelege la ce nivel de evoluție și de rafinament a început să intervină optica în general și holografia în particular, prin soluțiile și metodele furnizate, în perfecționarea tehnicii de calcul. În cele ce urmează, ne propunem să prezentăm doar câteva din soluțiile oferite de holografie și de optică unor probleme cu care s-a confruntat acest domeniu în ultimii 25 de ani.

A. Proiectarea microimaginilor în tehnica circuitelor integrate

Problema care se pune la fabricarea unui circuit integrat este în esență următoarea: pe un suport (plachetă) de siliciu, cu grosimea de aproximativ 1 mm și diametrul cuprins între 25 și 50 mm, trebuie difuzate în mod controlat impurități de tip n sau p sau diferite metale; difuzia se cere a fi făcută *local*, cu precizie foarte mare, diametrul "locului" fiind de ordinul micrometrului. În tehnologia clasică se folosește procedeul mascării, adică al acoperirii plachetei de siliciu cu fotorezist (un lac organic fotosensibil) și impresionării sale, în ultraviolet, în regiunile unde urmează să aibă loc difuzia cu atomii impurităților. În acest scop, se utilizează o imagine înregistrată anterior pe un "transparent" (mască) și acesta se transferă pe suprafața fotorezistului fie prin contact direct, urmat de impresionare în regiunile nemascate, fie prin proiecție cu ajutorul unui sistem optic clasic. După dezvoltarea fotorezistului, în regiunile din care lacul a fost înlăturat are loc difuzia controlată a impurităților. Procesul poate fi repetat, utilizând succesiv până la 15 măști diferite. În acest fel, se realizează difuzii sau depuneri controlate de impurități (substanțe) diferite, în același strat sau în straturi cu profunzime diferită.

Practica a dovedit însă că, în aceste procedee, clasice, apar inconveniente și dificultăți care, nu de puține ori, compromit reușita operației. Când masca se depune prin contact direct, apar imperfecțiuni ale contactului care, datorită difracției, produc imagini degradate. Realizarea unor contacte prea strânse nu este nici ea avantajoasă deoarece poate conduce la deteriorarea fotorezistului sau chiar a măștii. În plus, eventualele zgârieturi microscopice de pe mască sau particulele de praf prinse între mască și fotorezist produc și ele efecte parazite, deranjante. În cea de-a doua variantă, când imaginea este transferată pe placheta acoperită cu fotorezist prin proiecție optică, costul instalației este foarte mare (din cauza calităților excepționale pe care trebuie să le îndeplinească lentilele sistemului, care se cere a proiecta o imagine de mare rezoluție pe o suprafață relativ întinsă). Acum, deoarece este necesară o corespondență punct cu punct între imaginea de pe mască și imaginea de pe fotorezist, nu pot fi utilizate decât măști de foarte bună calitate (fără zgârieturi, depuneri de praf etc.).

Pornind de la necesitatea depășirii acestor neajunsuri, încă înainte de anul 1970 au fost propuse mai multe metode de impresionare a fotorezistului cu ajutorul imaginii *reale* a măștii, reconstituită de către o hologramă (S. Lu, M. I. Beesley, H. Foster, K. G. Hambleton). Chiar dacă, în acest caz, calitatea imaginii ce se proiectează pe fotorezist este dependentă de o serie de factori specifici procesului holografic, dificultățile inițiale au fost eliminate sau minimizate treptat și procedeele holografice s-au impus rapid. Obținerea unor imagini reale, lipsite de distorsiuni, a fost realizată cu ajutorul unei unde de referință plană (obținându-se o mărire izotropă a imaginii, egală cu unitatea). Pentru obținerea performanțelor cerute s-au utilizat plăci holografice de mare rezoluție ($\sim 5000 \text{ mm}^{-1}$) și de foarte bună planeitate ($\lambda/10$), care au permis o alegere convenabilă a aperturii numerice a hologramei. Contractia emulsiei a putut fi corectată prin tratamente chimice adecvate sau s-a ajuns chiar la eliminarea ei (înregistrarea hologramelor pe materiale fotocrome sau pe fotopolimeri). Măștile holografice s-au impus și datorită faptului că eventualele particule de praf sau zgârieturi ale măștii nu influențează decisiv calitatea imaginii proiectate pe fotorezist. Problema cea mai dificilă, specifică întregii optici coerente, cea a granulației imaginii, a putut fi adusă și ea la nivelul unei optimizări acceptabile.

Utilizând holografia Fourier și rețelele holografice de difracție, Lu (1968) a reușit să crească sensibil randamentul tehnologic al fabricării circuitelor integrate, prin proiecția

multiplicată de un anumit număr de ori* a imaginii măştii înregistrată holografic. Multiplicarea se poate realiza, de exemplu, cu ajutorul procesorului din fig.3.101. În planul P_1 se aşează transparentul (imaginea măştii) ce trebuie multiplicat şi proiectat pe fotorezist, descris de funcţia $g(x_1, y_1)$. Distribuţia de amplitudini din planul P_2 este, în consecinţă, transformata Fourier $G\left(\frac{x_2}{\lambda f}, \frac{y_2}{\lambda f}\right)$ a funcţiei g . Dacă h este o funcţie de reţea bidimensională de $n \times m$ surse punctiforme

$$h(x, y) = \sum_{n, m} \delta(x - a_n) \cdot \delta(y - b_m), \quad (4.112)$$

situate la distanţe a_n şi b_m , iar în planul P_2 aşezăm un transparent care este transformata Fourier $H\left(\frac{x_2}{\lambda f}, \frac{y_2}{\lambda f}\right)$ a funcţiei $h(x, y)$, la ieşirea din acest plan avem amplitudinea complexă GH . În final, lentila L_3 produce în planul P_3 , în care se află fotorezistul, intensitatea luminoasă $I(x_3, y_3)$ dată prin relaţia (3.520'), Când h este funcţia bidimensională de mai sus obţinem

$$I(x_3, y_3) \sim \left| \sum_{n, m} g(x_3 + a_n; y_3 + b_m) \right|^2, \quad (4.113)$$

adică fotorezistul este impresionat de o reţea de $n \times m$ imagini g multiple.

Filtrul holografic $H\left(\frac{x_2}{\lambda f}, \frac{y_2}{\lambda f}\right)$ se realizează prin înregistrarea holografică de tip Fourier a reţelei de surse punctiforme (eventual prin expuneri multiple). În planul P_1 , transparentele g_1, g_2, g_3, \dots ale măştilor ce trebuie proiectate pe placheta de siliciu se introduc succesiv, printr-un dispozitiv automatizat.

Procesorul din fig.3.101 poate servi la fel de bine şi pentru testarea şi corectarea măştilor, aşezate în planul P_1 . În acest scop, în planul P_2 se efectuează un filtraj spaţial adecvat, cu un filtru trece-bandă sau cu un filtru opreşte-bandă, acordate pe frecvenţele care ar permite obţinerea în planul P_3 a imaginii corecte sau care ar elimina complet din planul P_3 imaginea corectă (în acest ultim caz se văd defectele).

Prin procedeul lui Lu, perfecţionat, s-a putut realiza proiectarea simultană a peste 1000 de imagini, cu o rezoluţie sub $3 \mu m$, pe o suprafaţă cu diametrul 5 cm. Deoarece atât rezoluţia cât şi suprafaţa proiectiei sunt limitate de calităţile lentilelor din sistem, în ultimii ani s-au dezvoltat mai ales metodele de proiectie holografică fără lentile.

B. Memorii holografice

În ultimii 25 de ani, o direcţie de cercetare intensă pe plan mondial a fost aceea a utilizării holografiei pentru stocarea unei cantităţi de informaţie din ce în ce mai mare, adică pentru obţinerea memoriilor holografice. Cercetările au vizat nu atât principiul realizării acestor memorii, clar de la bun început, cât mai ales, atingerea unor asemenea performanţe tehnice care să asigure înlocuirea în viitor a memoriilor tradiţionale (cu ferite, benzi magnetice, semiconductori etc.). În momentul de faţă, deşi nu au eliminat din competiţie memoriile clasice, noile memorii, holografice, au câştigat teren prin următoarele

* Se folosesc şi spectrele de difracţie de ordin superior.

performanțe: capacitate de stocare informațională mare ($\sim 10^{14}$ biți), timp de acces la date mic ($\leq 1 \mu s$), preț de cost redus (sub 0,01 cenți/bit) și redundanță intrinsecă înaltă.

Memoriile optice și holografice existente în prezent sunt de patru feluri principale: 1) de tip ROOM (Read-Only-Optical Memory), adică de tip "numai citește", competitive cu cele cu stocare pe microfilme, 2) de tip WREOM (Write-Read-Erase Optical Memory), competitive cu tamburii și discurile magnetice; ele sunt de tip "citește-scrie-șterge", 3) memorii operative cu acces aleatoriu, de tip "citește-scrie", sau WROM (Write-Read-Optical Memory) și competitive cu memoriile semiconductoare și cu ferite, 4) de tip RMOM (Read-Mostly Optical Memory), competitive cu benzile magnetice, care au capacitate mare, dar numărul posibilităților de ștergere și a ciclurilor de ștergere și completare este redus.

Dintr-un alt punct de vedere, cel al informațiilor înmagazinate, memoriile holografice sunt de trei tipuri: digitale (sau numerice), analogice și asociative.

Nu ne propunem să intrăm în prea multe detalii, care ar depăși nivelul acestei lucrări; vom prezenta însă principiul înregistrării unei memorii holografice și al extragerii informației din aceasta.

Așa cum s-a arătat în paragrafele precedente, informația stocată într-o hologramă este memorată ca microfranțe de interferență bi sau tri-dimensionale. Referindu-ne la o înregistrare bidimensională și considerând că se poate înregistra un bit de informație într-o celulă cu aria de ordinul lui λ^2 , o hologramă optică plană poate stoca aproximativ 10^{12} biți/ m^2 . Aceasta înseamnă că, în mod teoretic, pe o placă de dimensiuni uzuale ($9 \times 12 \text{ cm}^2$) se pot înregistra aproximativ 10^{10} biți, la un raport zgomot/semnal de 1/10, cu acces aleatoriu de $10 \mu s$. Performanțele teoretice de acest gen se obțin și în fotografiere însă, spre deosebire de aceasta, în holografie există și posibilitatea înregistrării volumice, tridimensionale. Acum, celula informațională elementară are extinderea de ordinul lui λ^3 și capacitatea teoretică de stocare a unei holograme volumice crește la aproximativ 10^{18} biți/ m^3 . Raportul semnal/zgomot este net superior la memoriile holografice față de cele fotografice. În plus, hologramele au o redundanță înaltă (la pierderea sau distrugerea unei porțiuni din hologramă, imaginea este reconstituită în întregime de restul hologramei, cu o scădere evidentă a puterii de rezoluție).

În principiu, dacă dorim să înregistrăm N imagini pe o aceeași hologramă și să extragem apoi una (oarecare) dintre ele, există mai multe posibilități practice: 1) prin N expuneri succesive se suprapun parțial sau total N imagini pe întreaga hologramă, 2) prin N expuneri succesive se impresionează N regiuni separate ale hologramei (câte o regiune pentru fiecare expunere, respectiv imagine), 3) prin N expuneri succesive pe $N' < N$ regiuni separate ale hologramei.

În fig.4.40 se prezintă o schemă principială de înregistrare prin prima metodă, în care imaginile ce corespund diferitelor expuneri se suprapun parțial. Semnalul de înregistrat, de exemplu litera Ψ este plasat pe transparentul A, lângă un difuzor D, luminat de un laser. Între planul semnalului și placa fotografică H, se așază o diafragmă M cu mai

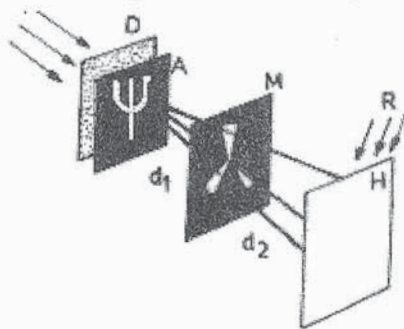


Fig.4.40. Schemă principială de înregistrare prin expuneri succesive pe aceeași placă (cu rotirea diafragmei).

multe sectoare (deschizături), care se poate roti în diferite poziții. Placa H este iluminată și de fasciculul de referință R. După realizarea primei expuneri (a literei Ψ) se înlocuiește transparentul A cu un altul, pe care este prezentată o altă literă, să zicem Σ, și se face o a doua expunere, rotind sectoarele diafragmei M în așa fel încât ele să ocupe o poziție diferită, fără a acoperi complet poziția precedentă. În acest mod, se pot realiza succesiv toate cele N expuneri, schimbând de fiecare dată poziția sectoarelor diafragmei M. Este necesar ca lumina difuzată de D și A prin M să acopere convenabil placa H.

Dacă dispunerea de la înregistrare este cea din fig.4.41 a, pentru a extrage un semnal oarecare din holograma înregistrată se utilizează aranjamentul din fig.4.41 b, în care H este holograma așezată într-o poziție rotită cu 180° față de poziția sa inițială, iar E - un

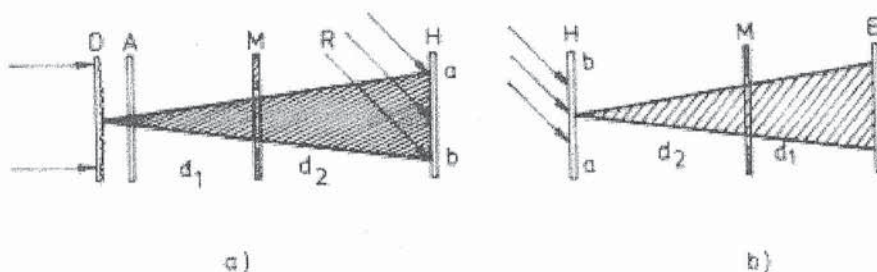


Fig.4.41. Reconstituirea unei anumite imagini - (b), înregistrată prin metoda schițată în (a).

ecran (de exemplu, cu fotodetectori). Prin rotirea în poziții convenabile a sectoarelor diafragmei M, pe ecran se pot reconstitui succesiv toate imaginile stocate de hologramă (pentru fiecare poziție a sectoarelor din M câte o imagine).

Nu este necesar să insistăm asupra celui de-al doilea procedeu (N expuneri succesive pe N regiuni separate ale hologramei) deoarece nu există nici-o diferență față de înregistrarea și reconstituirea unei holograme obișnuite.

În ceea ce privește al treilea procedeu, el este, evident, un caz intermediar. Schema de înregistrare poate fi cea din fig.4.40 însă acum diafragma M se așază lângă placa fotografică H. Se folosesc atâtea diafragme câte expuneri (N) sunt de efectuat, fiecare diafragmă fiind acum formată din N' deschizături mici, pătratiche, ca cele din fig.4.42, orientate în același fel, dar distribuite aleator de la diafragma la diafragmă. După realizarea hologramei, pentru a extrage din "memorie" un anumit semnal, se utilizează procedeul schițat în fig.4.43, cu diafragma, corespunzătoare semnalului, plasată chiar lângă hologramă. Evident, dacă numărul N al expunerilor este foarte mare, rezoluția nu este prea bună.

În locul diaframelor cu pătrățele (cu ajutorul cărora informația se poate codifica în sistemul binar, 1 = pătrățel alb, transparent, și 0 = pătrățel negru, opac), se pot utiliza și alte tipuri de deschizături. De exemplu, s-a folosit, cu bune rezultate, o singură rețea, a cărei orientare s-a

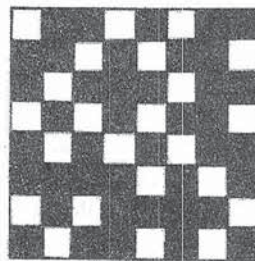


Fig.4.42. Diafragmă cu pătrățele transparente și opace ("tablă de șah").

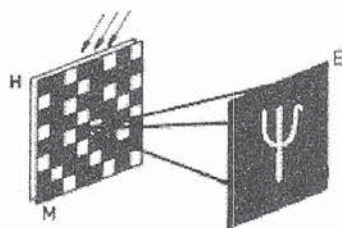


Fig.4.43. Extragerea din memorie a unui anumit semnal.

schimbat ușor de la o expunere la alta.

De la considerentele principale schițate mai sus, să trecem acum la câteva detalii de realizare practică a memoriilor holografice. Începem cu precizarea că densitățile teoretice de 10^{12} biți/m³ - în holografia volumică, nu se pot atinge practic niciodată. Acest lucru se explică prin aceea că, radiația laser, cu toate calitățile ei, are totuși un grad de coerență limitat (spațial și temporal), care, intervenind în expresia termenului de interferență, provoacă reducerea contrastului tabloului interferențial (vezi vol. II). Din această cauză, unele detalii extrem de mici, înregistrate pe hologramă (admițând că granulația a permis acest lucru), sunt imposibil de reconstituit. La reducerea contrastului contribuie de asemenea diferitele zgomote spațiale (praful, zgârieturile sau fisurile imperceptibile de pe hologramă) precum și imperfecțiunile componentelor optice din restul instalației holografice (de pildă, neomogenitățile lentilelor din instalațiile de tip Fourier). În plus, pentru sporirea rezistenței sistemelor optice, proiectanții introduc întotdeauna în calcule diferiți coeficienți de siguranță care, de asemenea, reduc sensibil densitatea de integrare holografică. Din toate aceste motive, în prezent se consideră că densitatea realizabilă practic este numai de ordinul a $3 \cdot 10^{10}$ biți/m², adică este cu două ordine de mărime inferioară celei teoretice.

Al doilea factor care limitează capacitatea informațională a unei holograme este dimensiunea sa spațială. Cine dictează asupra dimensiunilor maxime ale unei plăci holografice? Răspunsul este destul de simplu: celelalte componente ale sistemului optic de înregistrare și de citire a informației (lentilele, sistemul electrooptic de deviere a razei laser etc.). Cu alte cuvinte, dimensiunile practice ale unei holograme se aleg întotdeauna comparabile cu dimensiunile celorlalte piese optice sau componente din sistem. Deoarece este imposibil de realizat lentilele *de calitate* cu diametrul mai mare de 20 - 30 cm, ajungem la concluzia că suprafața utilă maximă a unei holograme este de ordinul sutelor (eventual miilor) de centimetri pătrați, ceea ce înseamnă o capacitate informațională de numai aproximativ 10^9 biți.

Pentru creșterea capacității memoriilor holografice s-a adoptat fie soluția oferită de holografia volumică, cu expuneri multiple pe același volum, la unghiuri diferite (o sporire practică cu mai mult de un ordin), fie cea a blocurilor cu mai multe "pagini holografice" (fiecare pagină având formă de matrice bidimensională, elementele sale fiind microholograme), fie soluția mixtă.

Prezentăm în continuare principiul de organizare și de funcționare al unei memorii holografice operative (MHO), pe holograme bidimensionale, cu adresare prin rază laser (propus în anul 1967 de către F. M. Smits și L. E. Gallagher), care îmbină în mod optim marea capacitate de stocare cu rapiditatea operațiilor ce se efectuează (vezi. fig.4.44). Principalele componente ale unei MHO sunt: laserul (7), deflectorul (8), matricea de hololentile (1), sistemul electrooptic de introducerea datelor digitale ("page-composer"-ul) (5), placa de stocare (3), matricea fotoreceptorilor (4). Restul elementelor care intervin fac parte din "optica" sistemului. Deflectorul X - Y (8), comandat de dispozitivul de adresare M, servește la devierea rapidă și precisă a fasciculului laser, respectiv, la trimiterea lui în poziția necesară (dorită) de pe placa de stocare (PS). Matricea de hololentile (1) reprezintă un bloc bidimensional de holograme înregistrate stabil, care servesc la despicarea fasciculului luminos în "fascicul obiect" și "de referință". Fiecare hololentilă (HL) este destinată pentru înregistrarea unei holograme într-o singură (unică) poziție pe placa de stocare, astfel că alegerea unei HL sau a alteia determină univoc poziția de înregistrare a hologramei "curente". Matricea de HL are aceleași dimensiuni relative ca și matricea de holograme (3).

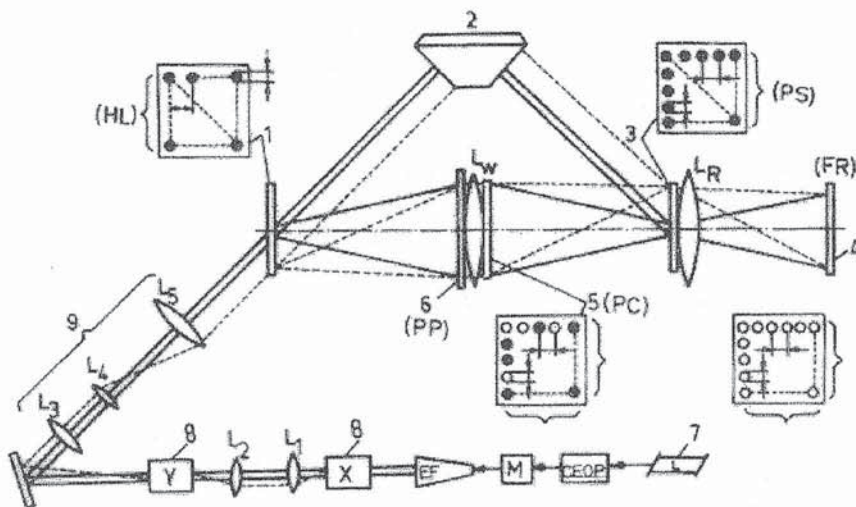


Fig.4.44. Schema bloc a unui dispozitiv optic de memorare care permite operații de înregistrare-citire.

Page-composer-ul (5) servește la formarea paginii de intrare, adică la introducerea informației. Încărcarea sa se poate face consecutiv sau paralel. Acest dispozitiv este prevăzut și cu o mască de fază aleatoare. Placa de stocare (3), este mediul pe care se înregistrează și în care se păstrează hologramele (informația). Matricea de fotodetector (4) transformă imaginea optică a paginii, reconstituită holografic, în semnale electrice care sunt transmise calculatorului electronic, memoriei sale centrale. Rolul celorlalte elemente optice ale instalației se va preciza mai jos, când vom analiza principiul înregistrării, respectiv al citirii informației.

Înregistrarea informației în dispozitivul holografic de memorare are loc în felul următor. Fasciculul emis de laserul (7), liniar polarizat, este lărgit - de către expandorul de fascicul (EF), până la diametrul necesar, ajunge la deflectorul X - Y care îl dirijează pe HL necesară, în funcție de adresa primită, a poziției pentru înregistrare. Celulele (8) ale deflectorului pot devia fasciculul luminos numai într-un diapazon unghiular destul de îngust; de aceea, pentru transformarea deviațiilor unghiulare mici, ale fasciculului, într-un ansamblu de fascicule paralele, colimate, se utilizează apoi telescopul special (9). În acest fel, pe fiecare HL cade un fascicul colimat de lumină polarizată liniar, sub unul și același unghi constant, specific. O parte a luminii difractate de HL, spre culegătorul de pagini, formează "unda obiect" care trece prin polarizorul pelicular (6) și luminează apertura sistemului electrooptic de introducerea datelor (pe care este culeasă deja pagina de informație destinată înregistrării). Page-composerul (sau lătricea) realizează modularea spațială a undei obiect în conformitate cu informația de pe pagina de intrare. Lentila L_W focalizează unda obiect pe poziția aleasă de pe placa de stocare (3), conform adresei date. În aceeași poziție, după refractarea prin prisma (2), sosește și "unda de referință" care nu a fost difractată de HL. Cu alte cuvinte, sistemul optic asigură coincidența undelor obiect și de referință în planul de înregistrare a hologramelor, oricare ar fi adresa referitoare la poziția de stocare de pe placa (3). Tabloul interferențial al acestor unde se înregistrează și se memorează pe placa de stocare (3) sub forma unei holograme Fourier de mică dimensiune. O astfel de minihologramă, adică imaginea Fourier a paginii de intrare (5), se numește "subhologramă"

sau "element de memorie" și corespunde unei informații numerice de ordinul a 10^4 biți. Blocul de pagini se păstrează astfel în placa de stocare (PS) sub forma unei matrice de subholograme, dispuse regulat și separate spațial. Coordonatele, de pe placa de stocare, ale unei subholograme, care reprezintă adresa unei anumite pagini, sunt fixate în memoria de adresare (M).

La citirea informației stocate, vectorul de polarizare al fasciculului laser este rotit cu 90° cu ajutorul comutatorului electrooptic de polarizare (CEOP) și este direcționat spre holograma dorită din (3). Acum, deoarece fasciculul obiect este blocat de polarizatorul pelicular (6), holograma dorită este iluminată numai de fasciculul de referință (adică de citire). Imaginea virtuală a paginii, reconstituită de holograma iluminată, se transformă în imagine reală cu ajutorul lentilei L_R și se proiectează pe matricea fotodetectorilor (4), care are aceleași dimensiuni ca și page-composer-ul (5). În acest fel, fotomatricea detectează imaginea și memorează informația citită, care apoi poate fi decodificată.

Capacitatea totală a memoriei descrise depinde semnificativ de dimensiunile matricei de fotodetectori și de aria plăcii de stocare. La o matrice cu 32×32 fotodiode integrate cu diametrul de $200 \mu\text{m}$ și o placă de stocare pătratică cu latura de 35 cm , avem capacitate maximă de ordinul $7 \cdot 10^8$ biți.

Una din problemele importante cu care se confruntă proiectanții și constructorii de memorii holografice operative este cea a mediului de stocare, acesta trebuind să asigure cât mai multe cicluri de înregistrare și de ștergere a tablourilor interferențiale. Din acest punct de vedere, dau rezultate bune materialele magnetooptice cu structură fină, (diferiți compuși ai manganului, ca de exemplu MnBi) și materialele feroelectrice cu proprietăți electrooptice (ca $\text{Bi}_4\text{Ti}_3\text{O}_{16}$ sau diferite ceramici ca PLZT sau PZT). În primul caz, prin încălzire locală la o temperatură ușor superioară temperaturii Curie T_C și aplicarea unui câmp magnetic de sens opus celui folosit la înregistrare, informația stocată se poate șterge. Revenirea peliculei magnetooptice la starea inițială se poate face prin răcire sub temperatura T_C și aplicarea unui câmp magnetic. Unele materiale electrooptice permit stocări holografice "fixate" iar altele - "nefixate". Cele din urmă, pot fi șterse prin iluminare iar primele - prin încălzire și iluminare uniformă. De exemplu, cristalele de niobat de litiu (LiNbO_3), utilizate de firma Bell, care pot înregistra peste 1000 de holograme într-un volum de 1 cm^3 (prin rotirea ușoară a cristalului după fiecare înregistrare), pot fi șterse ușor prin încălzire până la 170°C .

În încheiere, fără a intra în detalii, precizăm că în ultimul timp s-au făcut progrese deosebite în domeniul așa-numitelor memorii asociative, adică al unor sisteme holografice care stochează o mare cantitate de informație, asociată cu un semnal de interogare care servește la găsirea poziției informației ce urmează a se obține și la citirea acestei informații.

C. Dispozitive optice de memorare

Spre deosebire de memoriile holografice care, cu toate progresele realizate, se află încă în stadiul de elaborare experimental-constructivă, vizând performanțe superioare celor deja atinse, dispozitivele optice de memorare de tip "discuri optice" se utilizează, pe larg în calitate de memorii de arhivă ale calculatoarelor, pentru organizarea bazelor de date, și pentru tirajarea mijloacelor de programare. Prin capacitatea lor, aceste dispozitive de memorare au depășit, chiar în prima generație, memoriile tradiționale pe discuri magnetice.

Discurile optice existente în mometul de față sunt de trei feluri: a) discuri ieftine mici, cu diametrul de $5\text{-}8 \text{ cm}$, destinate utilizării în calculatoare personale, b) dispozitive de

clasă medie, pentru micro și minicalculatoare, cu diametrul de 12-25 cm și c) dispozitive cu diametrul de 30-36 cm, de mare capacitate, pentru sisteme de memorii exterioare. Desigur, capacitatea discurilor și citirea informației stocate în ele se face cu ajutorul unei raze laser focalizată acut.

Dintre avantajele principale ale discurilor optice menționăm următoarele: densitatea de înregistrare a informației mare (de ordinul a 10^8 biți/cm²), ceea ce permite realizarea unei capacități de $10^{10} - 10^{11}$ biți/disc; viteza mare de transmitere a datelor, care atinge valori de 50 Mbiți/s, în dispozitivele monocanal, și mai mult de 320 Mbiți/s, în dispozitivele multicanal; timp scurt de selectare a datelor (sub 0,5 s); preț de cost redus; durată foarte mare de păstrare a informației înregistrate (10 - 15 ani); o probabilitate extrem de mică ($10^{-8} - 10^{-12}$) de apariție a unei erori la înregistrarea sau la citirea informației.

În prezent, există discuri optice pentru o singură înregistrare, discuri cu "zonă de rezervă", adică cu posibilitatea completării informației stocate, discuri reversibile (care se pot șterge), numărul ciclurilor înregistrare-ștergere fiind, relativ, destul de mare.

Informația stocată pe un disc optic poate fi audio (sunet), video (imagine) sau digitală (numerică) - necesară în sistemele de calcul.

Discurile optice sunt confecționate din sticlă șlefuită sau din material plastic, acoperite cu un material înregistrator, fotosensibil, de exemplu, peliculă metalică subțire, cu coeficient mare de absorbție a radiației luminoase, având grosimea de ordinul a 30 nm, pulverizată direct pe "talpa" discului.

Schema bloc a unui dispozitiv optic de memorare, care permite operații de înregistrare-citire, este dată în fig.4.45. La înregistrare, semnalul "in" (1) trece prin blocul de amplificare și de corectare a erorilor (2), de unde ajunge în modulatorul (3), care realizează

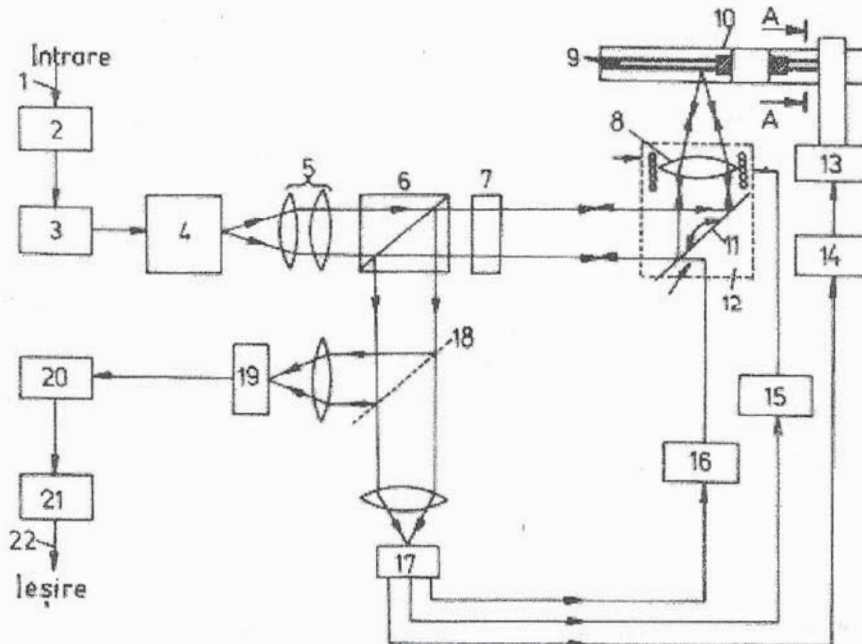


Fig.4.45. Schema bloc a unui dispozitiv optic de memorare care permite operații de înregistrare-citire.

modulația radiației emise de laserul semiconductor (4). Prin sistemul optic (5)-(8) raza laser modulată cade pe mediul înregistrator (9) al discului optic (10). Pe mediul (9), de mare sensibilitate, se formează o succesiune de "semne (pete) optice" alveolare, cu diametrul de ordinul a 1-2 μm , și de diverse adâncimi, după cum raza laser modulată "a ars" sau "nu a ars" un orificiu în șanțul spiralic al discului. Printr-o alegere convenabilă a lărgimii și adâncimii șanțurilor pistei, microrelieful creat asigură o densitate de înregistrare de 10^6 biți/ mm^2 .

În regimul de citire, la intrarea laserului (4) se aplică o tensiune constantă foarte mică, astfel încât acesta generează o radiație luminoasă continuă, de mică intensitate, ce ajunge pe canalele discului (care nu poate modifica starea optică a mediului înregistrator). "Semnele optice" de pe disc modulează intensitatea radiației laser reflectate. Precizăm că radiația laser este plan-polarizată, astfel că lama sferică de undă (7) și divizorul de fascicul (6), de polarizare, trimite fasciculul reflectat (o fracțiune din cel incident) spre oglinda semi-transparentă (18). Mai departe, lumina reflectată este culeasă de fotoreceptorul de date (19) iar cea transmisă - ajunge la fotoreceptorul de erori de poziționare (17). La nivelul blocului (19) semnalul luminos se transformă în impulsuri de curent, care se decodifică cu ajutorul demodulatorului (20), amplificându-se și corectându-se de erori în blocul (21). Semnalul de ieșire (22) ce aduce informația din memoria optică, se introduce apoi în calculator. Pe de altă parte, de la blocul (17), pe canalele (16), (15) sau (14)-(13), se asigură corectarea poziției lentilei de focalizare (8), a oglinzii (11) și a mecanismului de fixare și de rotire a discului, pentru a se asigura o urmărire corectă a pistei. Pentru mai multă claritate în figurile 4.46 și 4.47 am redat așezarea discului în stabilizatorul de poziție, prevăzut cu "prisme de frânare", respectiv structura capului optic de înregistrare-citire ((12) -în fig.4.45), format dintr-o oglindă oscilantă (11) și un obiectiv de microscop (8).

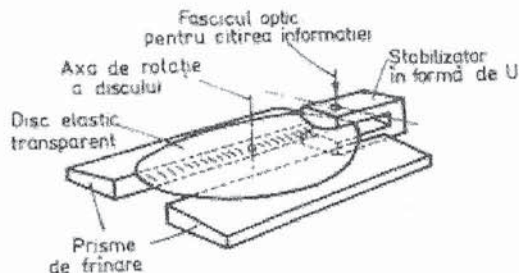


Fig.4.46. Așezarea discului în "stabilizatorul de poziție".

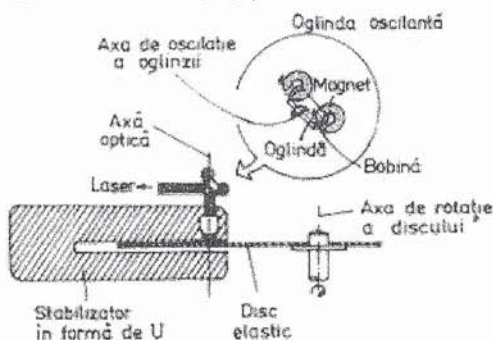


Fig.4.47. Structura capului optic de înregistrare-citire.

O formă particulară de memorie optică stabilă este *videodiscul*, pe care este înregistrat simultan, prin modulare, atât semnalul audio cât și semnalul video, corespunzând, de exemplu, unui program de televiziune de aproximativ 30 minute. Videodiscul este oarecum similar discului de pick-up, însă, spre deosebire de acesta, înregistrarea și redarea semnalelor se face cu ajutorul unei raze laser bine focalizate, deci fără contact mecanic.

Popularitatea și deosebitul lor succes comercial au făcut ca, în ultimii ani, videodiscurile să concureze serios videocasetele.

D. Holograme generate pe calculator

Cele prezentate până aici au scos în evidență numai o fațetă a relației holografie-calculatoare, anume impactul favorabil, dinamizator, al dezvoltării holografiei asupra tehnicii de calcul. Există, însă, și un alt aspect al acestei relații, cel invers, adică al utilizării posibilităților oferite de calculatoare pentru generarea de holograme, domeniu care a evoluat spectaculos în ultimele trei decenii (primele holograme "simulate" au fost obținute în anul 1969, de către Brown și Lohmann).

Baza obiectivă a aplicării tehnicilor numerice în vederea realizării procesului holografic, sau a unor părți din el, a constituit-o existența unui aparat matematic, deja elaborat, pentru descrierea analitică a câmpurilor de unde, acumularea unei vaste experiențe de calcul a acestora, prin eșantionare cu calculatorul și, nu în ultimul rând, stăpânirea algoritmilor de transformare Fourier rapidă.

Cum s-a ajuns la ideea realizării hologramelor numerice? În primul rând, așa cum s-a putut înțelege și din partea finală a capitoului anterior, pentru efectuarea pe cale optică a unor operații matematice, sunt necesare filtre spațiale capabile să realizeze anumite funcții de transfer, mai simple sau mai complexe. Dificultățile întâmpinate în realizarea unor tipuri de filtre prin procedeele clasice (de exemplu, distorsiunile datorate caracteristicii neliniare de înregistrare a materialului fotosensibil) au condus la metoda sintetizării acestora ca "holograme calculate". Apoi, după obținerea primelor succese, s-a înțeles că metoda poate fi extinsă și la generarea de fronturi de undă optice ale unor obiecte care sunt inaccesibile optic sau nu există fizic. De exemplu, când trebuie să se vizualizeze un obiect descris numai analitic, ca rezultat al unei investigații tridimensionale (ca, de pildă, prin difractometria cu raze X), se realizează mai întâi o hologramă numerică a acestuia. De asemenea, când se testează prin metode interferometrice o piesă optică, este necesară compararea frontului de undă reflectat sau transmis de aceasta cu frontul de undă dat de o piesă de referință, considerată etalon; deoarece realizarea unui etalon perfect este practic imposibilă, se recurge la generarea frontului de undă etalon cu ajutorul unei holograme calculate cu ajutorul computerului.

După T. S. Huang (*Digital Holography*, Proc. IEEE, 59 (9), 1335, 1971) se consideră că procesul de generare pe calculator a hologramelor are *patru etape*.

În *prima etapă*, utilizând un calculator digital, se calculează propagarea amplitudinii complexe a unde de la obiect până la hologramă și distribuția de amplitudine complexă în planul hologramei. Această etapă se bazează pe teorema de eșantionare Whittaker-Shannon, conform căreia calculul distribuției de amplitudine din planul hologramei se poate face numai pentru un număr *limitat* de puncte ale obiectului (de fapt și în cazul hologramelor obișnuite, obținute pe cale optică, din cauza rezoluției finite a materialului fotosensibil, adică a granulației sale, are loc o eșantionare a obiectului). Fiecare punct obiect, din rețeaua de eșantionare, luat în calcul, dă în planul hologramei (aflat la distanță mare de el) o distribuție de amplitudine exact ca în situația în care punctul este plasat într-unul din planele focale ale unei lentile, iar holograma în celălalt plan focal. Se știe însă că lentila reprezintă un operator Fourier (vezi Cap. III), astfel că distribuția de amplitudine din planul hologramei, situat la distanță mare de obiect (rețeaua de eșantionare), este transformata Fourier a distribuției din planul obiectului. Așadar, în această etapă, calculatorul trebuie să efectueze (cât mai repede) transformata Fourier a punctelor obiectului.

În cea de-a doua etapă, amplitudinile complexe-calulate în prima etapă - se transformă în numere reale pozitive care se transmit perifericelor de ieșire ale calculatorului. Rezultatul calculelor și transformărilor din această etapă este înregistrat, de exemplu, sub forma unei figuri (cu diferite trepte de intensitate) pe ecranul unui tub catodic sau pe un display cu cristale lichide*.

Urmează etapa a treia, în care figura obținută anterior se fotografiază pe un film de înaltă rezoluție, după care, în ultima etapă, în scopul obținerii unor dimensiuni spațiale care să-i permită figurii o comportare de tip rețea de difracție, se trece la reducerea dimensiunilor sale, la o anumită scară convenabilă, adecvată reconstrucției.

În prezent, s-au conturat clar mai multe direcții și domenii de aplicare practică a hologramelor numerice: în prelucrarea optică a imaginilor (ca filtre spațiale "calculate" pentru îmbunătățirea calității imaginilor și pentru recunoașterea formelor sau caracterelor), în construcția de aparatură optică de înaltă calitate pentru controlul calității suprafețelor optice, la reconstrucția imaginilor în holografia acustică și în radiolografie etc. (pentru detalii, vezi [14], [33], [37 - 40] .)

Dintre diversele tipuri de holograme calculate menționăm hologramele binare (sau cu două tonuri), în care imaginea apare în alb și negru, hologramele discrete cu 2^n tonuri (mai multe trepte de gri), hologramele cu tonuri continue și kinoformul.

Conform definiției date de L. Lesem, P. Hirsch și J. Jordan (*The Kinoform - a New Wavefront Reconstruction Device*, IBM J. Res. Develop. 13 (3), 150, 1969), kinoformul este un dispozitiv optic, generat cu ajutorul calculatorului, ce servește la (re)construirea frontului de undă, adică este o hologramă de fază calculată, cu transmitanța constantă și grosime optică variabilă. Remarcăm că nu există analogi fizici ai kinoformului, respectiv că el nu seamănă absolut deloc cu hologramele obișnuite de fază. Într-un anumit sens, kinoformul poate fi comparat cu o rețea de difracție în trepte (eșelon). Spre deosebire de aceasta însă, kinoformul iluminat dă numai un singur ordin de difracție, astfel că întreaga lumină incidentă este folosită pentru reconstruirea imaginii (tot conținutul de frecvențe spațiale este folosit pentru o singură imagine). Deoarece nu mai sunt necesare calcule cu privire la fasciculul de referință și la separarea dintre imagini, calculul unui kinoform este mai simplu decât al hologramelor binare sau cu tonuri continue. El operează numai asupra fazei unde incidente, de reconstrucție, cu front cunoscut, transformând-o în frontul de undă necesar pentru formarea imaginii obiectului dorit (pentru care a fost calculat).

Cum se sintetizează un kinoform? Faza unde ce vine de la obiectul difractant, calculată în planul plăcii fotografice, se reduce modulo 2π (vezi fig.4.48 care se referă la kinoformul unei lentile sferice subțiri) iar rezultatul se afișează, de exemplu, cu un plotter cu nivele de gri. Figura astfel obținută este redusă pe cale fotografică. Imaginea obținută după reducerea fotografică este apoi albită (pentru a îndepărta porțiunile înnegrite - absorbante - din figură). Tehnica obținerii rapide și de calitate a kinoformului s-a dezvoltat mai ales după anul 1973, prin utilizarea unei metode noi, propuse de W.J.Dallas (vezi, [33]).

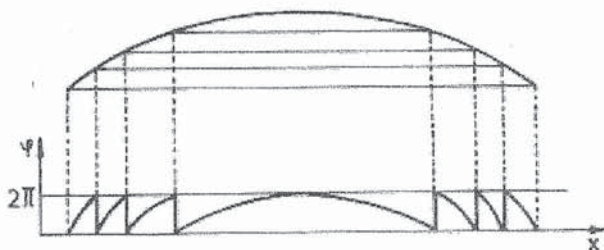


Fig.4.48. Kinoformul corespunzător unei lentile sferice subțiri.

* Există și posibilitatea înregistrării figurii respective de către o imprimantă cu mai multe trepte de gri sau trasării ei de către un inscriptor analogic.

În prezent, pe principiul kinoformului, se pot construi piese și aparate optice ieftine și sigure, inaccesibile opticii tradiționale: lentile pentru fronturi de undă ultrasonore sau de microunde, multiplicatori de imagini, scanning optic cu orice funcție de baleiere, rețele de difracție capabile să compenseze diferite aberații introduse de alte elemente ale aparatelor optice sau spectrale etc. Mai mult, s-a ajuns la modelarea pe calculator a ambelor etape ale procesului holografic, precum și la modelarea procesului de interferență holografică. În acest fel, pe de o parte, s-a putut simplifica mult calculul puterilor de rezoluție, determinarea influenței aberațiilor și zgomotelor, s-a reușit discretizarea hologramelor, și, pe de altă parte, s-au realizat albume de tablouri de interferență (care ușurează munca celor ce utilizează interferența holografică), s-au elaborat metode de testarea modelelor de interpretare a franjelor și extrapolarea studiului comportării obiectelor la modificări inaccesibile experimental, etc.

BIBLIOGRAFIE

1. M. Born, E. Wolf, *Principles of Optics*, Pergamon Press, Oxford, 1986;
2. W. L. Bragg, *A new type of X-ray microscope*, Nature, 143, 678, 1939; *The X-ray microscope*, Nature, 149, 470, 1942;
3. F. P. Carlson, *Applied optics for engineers*, Academic Press, New York, 1977;
4. R. J. Collier, C. B. Burchardt, L. H. Lin, *Optical holography*, Academic Press, New York, 1971;
5. A. Cozannet ș.a., *Optique, telecommunications (transmission et traitement de l'information)*, Eyrolles, Paris, 1981;
6. I. Cucurezeanu, *Laserii*, Editura Academiei, București, 1966; *Aplicații ale holografiei optice* (în colaborare), Editura Tehnică, București, 1984; *Curs de holografie* (în colaborare), Tipografia I. P. București, 1974;
7. Yu. Denisyuk, *Prințipi golografii*, Izd. Inst. S. I. Vavilov, Leningrad, 1978;
8. D. C. A. Duțu, *Laserul, lumina de mână*, Editura Albatros, București, 1981;
9. M. Françon, *Holographie*, Masson et Cie, Paris, 1969; *Cohérence en optique*, CNRS, Paris, 1965; *Vibrations lumineuses, optique cohérente*, Dunod univ., Paris, 1970; *Optique - formation et traitement des images*, Mason et Cie, Paris, 1972; *Optika speklov*, Izd. Mir, Moskva, 1980;
10. S. E. Frish, *Problems of wave optics*, Mir Publishers, Moscow, 1976;
11. D. Gabor, *A new microscopic principle*, Nature, 161, 777, 1948; *Holography: 1948-1971* (Edwards Memorial Lecture), The City University, London, 1972;
12. J. W. Goodman, *Introduction to Fourier optics*, McGraw-Hill, San Francisco, New York, 1968;
13. E. Hegedüs, B. Bodó, *De la desene simple la holografie*, Editura Facla, Timișoara, 1978;
14. K. Iizuka, *Engineering optics*, Springer-Verlag, Berlin, 1985;
15. R. Jones, C. Wykes, *Holographic and speckle interferometry*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1983;
16. N. Kalitévski, *Optique ondulatoire*, Ed. Mir, Moscou, 1980;
17. E. N. Leith, J. Upatnieks, *Reconstructed wavefronts and communication theory*, J. Opt. Soc. Am., 52, 1123, 1962; *Wave front reconstruction with diffused illumination and 3-dimensional objects*, J. Opt. Soc. Am., 54, 1295, 1963; *Wave front reconstruction photography*, Physics Today, 10, nr. 8, 26, 1965;
18. D. J. Lowell, *Optical anecdotes*, SPIE, Washington, 1984;
19. A. N. Mateev, *Optics*, Mir Publishers, Moscow, 1988;
20. G. C. Moisil, E. Curatu, *Optică, teorie și aplicații*, Editura Tehnică, București, 1986;
21. Yu. I. Ostrovski, *Holography and its application*, Mir Publishers, Moscow, 1977; *Golograficeskaia interferometria* (în colaborare cu M. M. Butusov, G. V. Ostrovskaiia), Izd. Nauka, Moskva, 1977;
22. I. M. Popescu ș.a., *Aplicații ale laserilor*, Editura Tehnică, București, 1979;
23. N. Popescu, M. Opran, *Laseri, aplicații*, Editura Militară, București, 1979;
24. V. Sainov, S. Sainov, *Izobrazitelinaia holgrafia*, Izd. Akad. Nauk, Sofia, 1986;
25. D. Sivoukhine, *Optique (première partie) - Cours de physique générale (tom IV)*, Ed. Mir, Moscou, 1984;

26. L. M. Soroko, *Osnovî golografii i kogerentnoi optiki*, Izd. Nauka, Moskva, 1971;
27. P. Sterian, N. Puşcaş, *Laseri şi procese multifotonice*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1988;
28. G. W. Stroke, *An introduction to coherent optics and holography*, Academic Press, New York, 1966;
29. L. V. Tarasov, *Laser age in optics*, Mir Publishers, Moscow, 1981; *Laser physics and applications*, Mir Publishers, Moscow, 1986; *Bases physique de l'électronique quantique*, Ed. Mir. Moscou, 1979;
30. G. I. Vasilenko, *Golograficescoe opoznovanie obrazov*, Izd. Sov. Radio, Moskva, 1977; *Golograficeschie razpoznaiuscie ustroistva* (în colaborare cu L. M. Ţibulkin), Izd. Radio i Sveazi, Moskva, 1985;
31. J. C. Viénot ş.a. *Holographie optique*, Dunod, Paris, 1971;
32. V. L. Vineţkii, N. V. Kuhtarev, *Dinamicescaia golografia*, Naukova Dumka, Kiev, 1983;
33. V. I. Vlad, *Introducere în holografie*, Editura Academiei, Bucureşti, 1973; *Prelucrarea optică a informaţiei* (în colaborare), Editura Academiei, Bucureşti, 1976;
34. F. T. S. Yu, *Introduction to diffraction, information processing and holography*, The MIT Press, Cambridge, 1973;
35. M. Young, *Optics and lasers*, Springer-Verlag, Berlin, 1984;
36. * * * , *Opticeskaia golografia* (sub. red. lui Yu. N. Denisyuk), Izd. Nauka, Leningrad, 1979;
37. * * * , *Komputeri v opticeskih issledovaniï* (sub red. lui B. R. Frieden), Izd. Mir, Moskva, 1983;
38. * * * , *Photonics* (Ed. by M. Balkanski, P. Lallemand), Gauthier-Villars, Paris, 1975;
39. * * * , *Optical data processing applications* (Ed. by D. Casasent), Springer-Verlag, Berlin, 1978;
40. * * * , *Primenenie metodov Fourier-optiki* (pod. red. H. Stark), Izd. Radio i sviazi, Moskva 1988.